연관relevant논리와 다치논리의 관계 연구
: BNc_1과 $L\L C^+$의 구문론적 관계 연구

양 은 석 (연세철학연구소)

【요약문】 이 글에서 우리는 연관 명제계산과 무한다치 명제계산 사이의 관계를 살핀다. 구체적으로 우리는 연관 명제계산 BNc_1이 무한다치 명제계산 $L\L C$를 포함하는 확장 체계로 간주될 수 있다는 것을 보인다. 즉 $L\L C$에 직관주의 명제논리에 사용된 부정을 첨가한 후, BNc_1이 이 체계 $L\L C^+$ 로 번역될 수 있다는 것을 보인다.

【주요어】 연관논리, 다치논리, BNc_1, $L\L C$, $L\L C^+$, 번역.

1. 들어가는 말

지난 30여 년 간 다치논리와 연관논리를 관련짓는 연구가 어느 정도 진척되었다. 먼저, 잘 알려진 연관논리를 위한 4치 의미론four-valued semantics 연구를 들 수 있다. 이는 던Dunn [8, 11], 던/빔보Bimbo [4], 벨납Belnap [2, 3], 레스탈Restall [19] 등에 의해 진행되었다. 둘째로, 던(/마이어Meyer) [10, 12]에 의해서 연관 명제계산propositional calculus R-mingle(RM)이 더밋의 무한 다치 명제계산(LC)을 포함하는 체계super system에 상응한다는 것이 밝혀졌다. 이 글에서 우리는 다른 연관 명제계산과 무한 다치 명제계산 사이의 관계를 살핀다.

연관 명제계산 중 구성할 수 있는 거짓constructable falsity 계산 N이 1949년 넬슨Nelson [17]에 의해 제시되었다. 직관주의 명제계산 H에서 부정 공리들 negation axioms을 빼고 대신 부정함의negated implication, 부정부정negated negation, 모호성absurdity, 드 모르강 규칙을 첨가함으로써, 우리는 N 체계를 얻을 수 있다. 이 체계에서 다시 모호성 규칙을 뺄 경우, 우리는 N^-을 얻게 된다. 이는 1984년 알무크다드/넬슨Almukdad & Nelson [1]에 의해 연구되었고, 2000년 던 [11]에 의해 연구된 L 논리 중 BN_1과 같다. 거기에 체인chain 규칙을 덧붙일 경우, 같은 글에서 던에 의해 다뤄진 BNc_1이 된다.

반면 무한 다치 명제계산과 관련하여 1969년 레서Resher [18]에 의해 $L\L C$ 체계가 구상되었다. 이는 부정negation에 관한 한 루카치비치 무한 다치 명제계산

(ŁC)의 진리치evaluations를, 함의implication에 관한 한 더밋의 LC의 진리치를 따르는 체계이다. 비록 ŁC 자체는 아닐지라도 그것의 모든 정상 확장normal extensions이 완전할 수 있다는 것이 양은석 [22]에 의해 보여졌다.

이 글에서 우리는 연관 명제계산 BNc_1이 무한 다치 명제계산 ŁC를 포함하는 확장 체계로 간주될 수 있다는 것을. 즉 ŁC에 직관주의 명제논리에 사용된 부정을 첨가한 후, BNc_1이 이 체계로 변역될 수 있다는 것을 보인다. 우리는 그러한 부정을 가-부정pseudo-negation이라 부르고 가-부정을 포함한 ŁC를 ŁC$^+$로 명명할 것이다.

2. ŁC와 ŁC$^+$

다른 글([22])에서 ŁC의 모든 정상확장의 완전성이 이미 증명되었기 때문에 여기서는 우리 목적에 필요한 최소한의 논의만 수행한다. 즉 우리는 단지 ŁC (혹 ŁC$^+$)를 위한 진리표tables for evaluations, 공리도식axiom schemata, 추론규칙rules of inference 정도만 제시한다.[1] ŁC를 위한 진리치evaluation는 다음 표에 의해 L(~, →, ∧, ∨, p_0, p_1, ...)의 모든 잘 정식화된 식들well-formed formulas로 확장되는 함수 v: PA → [0, 1] 이다. (PA: 명제 변항들의 집합, [0, 1]: 0과 1 사이의 유리수)

<TABLES>

1. $v(\sim P) = 1 - v(P)$,
2. $v(P \rightarrow Q) = \begin{cases} 1 & \text{if } v(P) \leq v(Q) \\ v(Q) & \text{otherwise,} \end{cases}$
3. $v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q))$,
4. $v(P \vee Q) = \max(v(P), v(Q))$.

<AXIOM SCHEMATA>

A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$	(positive paradox)
A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	(self-distribution)
A3. $(A \wedge B) \rightarrow A$ / $(A \wedge B) \rightarrow B$	(∧-elimination)

1) 기호 사용과 관련해 나머지 것들에 대해서 우리는 통상적인 기보법notation과 용어법terminology을 따른다. ŁC의 (모든 정상확장의) 완전성과 관련된 자세한 논의를 위해선 양은석 [22]을 참조.

A4. $((A\to B)\wedge(A\to C))\to(A\to(B\wedge C))$ ($\wedge$-introduction)
A5. $A\to(A\vee B)$ / $B\to(A\vee B)$ ($\vee$-introduction)
A6. $((A\to C)\wedge(B\to C))\supset((A\vee B)\to C)$ ($\vee$-elimination)
A7. $(A\to B)\vee(B\to A)$ (chain)
A8. $A\to\sim\sim A$ / $\sim\sim A\to A$ (double negation)
A9. $\sim(A\vee B)\to\sim A\wedge\sim B$ / $\sim A\wedge\sim B\to\sim(A\vee B)$ (negated disjunction)

<RULES>
MP (modus ponens)
AD (adjunction)

(df1) $P\vee Q := ((P\to Q)\to Q)\wedge((Q\to P)\to P)$,
(df2) $0 := \sim 1$,
(df3) $P\leftrightarrow Q := (P\to Q)\wedge(Q\to P)$.

df1, df2에 의해 원초적 기호primitives를 $\sim$, $\to$, $\wedge$, 1로 줄일 수 있고 df3에 의해 A8, A9를 다음으로 표현할 수 있다.

A8'. $A \leftrightarrow \sim\sim A$,
A9'. $\sim(A\vee B) \leftrightarrow \sim A\wedge\sim B$.

$\neg$, **F** 를 각각 가-부정과 항위 문장a constant false sentence이라고 하자. 직관주의 명제논리를 좇아

(df4) $\neg P := P\supset \mathbf{F}$

라고 정의하자. LŁC에 다음 공리를 추가할 경우, 우리는 LŁC 체계를 얻는다.

A10. $(A\to\neg B) \leftrightarrow (B\to\neg A)$ (contraposition)
A11. $\neg(A\to A) \to B$

3. BN_1과 BNc_1

1장에서 언급한 대로 BN_1과 BNc_1의 완전성은 던 [11]에 의해 증명되었다. 그러나 그것들은 L 체계들이라는 이름 하에 보다 일반적인 형태로 다루어졌다.[2] 여기서 우리는 BN_1, BNc_1의 두 체계에 한정해서 논의를 전개함으로써 두 체계가 어떻게 완전할 수 있는 지를 좀더 분명히 한다.

3.1. 예비적 논의

여기서는 BN_1, BNc_1의 의미론 이해를 위한 예비적 논의를 수행한다. 구체적으로 우리는 **Dunn 행렬**matrix과 4치 귀결four-valued consequence을 다룬다. 먼저, 던 [6, 8, 9, 10, 11]에 따라 우리는 *진리치evaluation*를 문장들로부터 진리 값을 갖지 않는 공집합과 참, 거짓을 함께 취하는 집합을 포함하는 2치 집합으로의 함수로 정의한다.

[5, 7, 10, 11]에서 던은 4치 행렬을 속lattice으로 다뤘고 그것을 **lattice 4**라고 불렀다. 그리고 진리 값 집합 { }, {0}, {1}, {0, 1}을 각각 **N, F, T, B**로 표현했다.[3] 이것을 우리는 다시 4치 행렬로 고려한다. 그리고 그것을 Dunn 행렬이라고 부른다.[4] —, →, ∧, ∨의 행렬은 다음으로 정의된다.[5]

---

2) 다양한 체계의 공리화와 관련해서는 Dunn [11], 28-30쪽을 참조.

3) 파인Fine [14]는 **N**과 **B**의 경우를 위해 각각 불충분결정underdetermination과 초과결정overdetermination을 묘사하는 "gaps"와 "gluts"란 용어법을 도입한다.

4) 필자가 알고 있는 한 **lattice 4**는 던에 의해 처음으로 또 지속적으로 연구되었다. 이 점을 강조하기 위해 우리는 **lattice 4** 대신 **Dunn 행렬**이란 표현을 사용한다.

5) —, ∧, ∨에 대한 우리 정의는 1, 2, 3, 4 대신 **T, N, B, F**를 사용한 [7]에서의 ~, &, ∨ 정의와 같다. [7], 15.3절과 24.4.1절을 보라.

—	
T	F
N	N
B	B
F	T

→	T	N	B	F
T	T	N	B	F
N	T	T	F	F
B	T	F	T	F
F	T	T	T	T

∧	T	N	B	F
T	T	N	B	F
N	N	N	F	F
B	B	F	B	F
F	F	F	F	F

∨	T	N	B	F
T	T	T	T	T
N	T	N	T	N
B	T	T	B	B
F	T	N	B	F

여기서 우리는 —, →, ∧, ∨가 애매하게 문장 연결사로도 사용된다는 데 주의할 필요가 있다. 양자의 구분은 논의 문맥에 의해 분명하게 될 것이다.

던 [11]과 유사하게 우리는 진리치를 정의한다. **Dunn**에서 *진리치*는 문장들로부터 **Dunn**으로 가는 함수이다. *함수 진리치functional evaluation*에 대해 우리는 0, 1이 모두 v(A)에 속하는 경우(both 0, 1 ∈ v(A))를 갖지 않는다. *전 진리치 total evaluation*에 대해 우리는 0, 1 중 적어도 하나는 v(A)에 속하는 경우(0, 1 ∈ v(A))를 갖는다. 1 ∈ v(A) 를 $\Vdash^{v}_{1} A$ 로, 0 ∈ v(A) 를 $\Vdash^{v}_{0} A$ 로 쓴다. 그리고 양상논리와 유사하게 v(A, α) 를 $\alpha \Vdash^{v}_{1} A$, $\alpha \Vdash^{v}_{0} A$ 로 해서 진리치를 매개화한다parameterize. 단, 이때 α를 "가능 세계"보다는 "정보 상태information state"로 간주한다. 이제 우리는 귀결 관계를 다음으로 정의한다.

[정의3.1.1] (던 [11]) 4치 귀결 관계consequence relations

(1) $A \vDash^{BN}_{1} B$ 는 모든 v에 대해 $\Vdash^{v}_{1} A$ 이면 $\Vdash^{v}_{1} A$ 이다와 동치iff이다;

(2) $A \vDash^{BN}_{0} B$ 는 모든 v에 대해 $\Vdash^{v}_{0} A$ 이면 $\Vdash^{v}_{0} A$ 이다와 동치iff이다;

(3) $A \vDash^{BN}_{1,0} B$ 는 모든 v에 대해 $\Vdash^{v}_{1,0} A$ 이면 $\Vdash^{v}_{1,0} A$ 이다와 동치iff이다.

(1)은 진리 보존truth-preserving 귀결을, (2)는 거짓 보존 귀결을, 그리고 (3)은 (1), (2) 모두를 나타낸다. 윗첨자 BN은 우리가 **Dunn 행렬**에 진리치를 부여하고 **N**과 **B**의 경우를 갖는다는 것을 분명히 한다.

[명제3.1.2] (던 [11]) 위 귀결 개념들은 모두 동치equivalent이다.

Dunn 행렬과 마찬가지로 **T**나 **N**을 중간 값으로 갖는 3치의 던 행렬 $\mathbf{D_3}$ 을 정의할 수 있다. 우리는 $\mathbf{D_{3L}}$ 로 {**T**, **N**, **F**}의 경우를, $\mathbf{D_{3R}}$ 로 {**T**, **B**, **F**}의 경우를 나타낸다. [정의3.1.1]에서의 진리치를 함수 진리치로 제한함으로써 귀결 관계 $\vDash^{N}_{1}$, $\vDash^{N}_{0}$, $\vDash^{N}_{1,0}$ 을, 전 진리치로 제한함으로써 귀결 관계 $\vDash^{B}_{1}$, $\vDash^{B}_{0}$, $\vDash^{B}_{1,0}$ 을 정의할 수 있다. 나아가 이를 바탕으로 연관논리 R의 "1단계 연관함의first degree entailments"를 위한 체계 구성을 할 수 있고 또 그것의 완전성을 보일 수 있다 (던 [11], 4장).

3.2. BN_1과 BNc_1을 위한 공리화

2장의 논의와 유사한 이유로 여기서 우리는 단지 BN_1과 BNc_1을 위한 공리도식과 추론규칙만 제시한다.

<AXIOM SCHEMATA>

I.	$A \to (B \to A)$	(positive paradox)
II.	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	(self-distribution)
III.	$(A \wedge B) \to A$ / $(A \wedge B) \to B$	($\wedge$-elimination)
IV.	$((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$	($\wedge$-introduction)
V.	$A \to (A \vee B)$ / $B \to (A \vee B)$	($\vee$-introduction)
VI.	$((A \to C) \wedge (B \to C)) \supset ((A \vee B) \to C)$	($\vee$-elimination)
VII.	$(A \to B) \vee (B \to A)$	(chain)
VIII.	$A \leftrightarrow \text{——}A$	(negated negation)
IX.	$\text{—}(A \vee B) \leftrightarrow (\text{—}A \wedge \text{—}B)$[6]	(negated disjunction)
X.	$\text{—}(A \wedge B) \leftrightarrow (\text{—}A \vee \text{—}B)$	(negated conjunction)
XI.	$\text{—}(A \to B) \leftrightarrow (A \wedge \text{—}B)$	(negated implication)

<RULES>

MP	(modus ponens)
AD	(adjunction)

6) $\leftrightarrow$ 은 앞서의 정의 (df3)과 같다.

체계 (추론규칙 +)
BN_1: 공리 I - VI + VIII - XII,
BNc_1: BN_1 + VII.

3.3. 일반화된 Kripke 의미론

잘 알려진 대로 하이팅Heyting 직관주의 논리 H를 위한 의미론이 크립키 [16]에 의해 제시되었다. 그는 우리가 여기서 "정보 순서information order"로 간주하는 2항 접근가능성 관계binary accessibility relation ⊑를 사용하였다. 관련하여 토마슨Thomason [21]은 **B**(gluts)의 진리 값을 허용함으로써 크립키 의미론을 일반화하였다. 이의 연장선상에서 슬래니Slaney/슈렌동크Surendonkz/절Girle [20]에 의해 **B**와 **N**의 진리 값을 허용하는 체계 BN의 의미론이 연구되었고, 던 [11]은 이를 (다른 것들과 함께) BN_1과 BNc_1의 경우로까지 일반화해서 다루었다. 우리는 다른 체계를 제외한 BN_1, BNc_1 만을 집중적으로 다룬다.

*프레임frame*은 $\zeta \in U$ 와 ⊑이 U 위에서 *부분 순서*partial order인 구조 $S = (\zeta, U, \sqsubseteq)$ 이다. 던 [11]에 따라 우리는 U를 "정보 상태"의 집합으로 간주한다. $\alpha \sqsubseteq \beta$, $\alpha, \beta \in U$, 는 α의 정보가 β 정보에 포함된다는 것을 의미한다. Σ에 의해 우리는 모든 프레임들의 집합을 지시한다.

우리는 가부번의denumerably many 원자문장들이 있다는 것과 **문장 Sentences** 집합이 통상적인 방법에 의해 연결사 —, →, ∧, ∨로부터 귀납적으로 정의된다는 것을 가정한다. (매개된parameterized) BN_1-진리치 BN_1-evaluation는 아래 조건 하에 있는 **문장** × U 로부터 **Dunn**, $\mathbf{D_{3L}} \times \mathbf{D_{3L}}$, 으로의 함수 v(A, α) 이다. $\mathbf{Val_{BN1}}$ 에 의해 우리는 이러한 진리치들의 집합을 지시한다. 그리고 $v(A, \alpha) = 1$ 을 $\alpha \Vdash^{v}_{1} A$ 로, $v(A, \alpha) = 0$ 을 $\alpha \Vdash^{v}_{0} A$ 로 쓴다. 편의상, 우리는 종종 윗첨자 v를 생략할 것이다.

$\alpha \Vdash_1 A$ 이고 $\alpha \sqsubseteq \beta$ 이면, $\beta \Vdash_1 A$ $\quad$ (HC_1)
$\alpha \Vdash_0 A$ 이고 $\alpha \sqsubseteq \beta$ 이면, $\beta \Vdash_0 A$ $\quad$ (HC_0)

복합문장을 위한 참, 거짓 조건은 다음에 의해 주어진다.

$\alpha \Vdash_1 -A \Leftrightarrow \alpha \Vdash_0 A$ $\quad$ ($-_1$)

$$\alpha \Vdash_0 -A \;\Leftrightarrow\; \alpha \Vdash_1 A \qquad (-_0)$$
$$\alpha \Vdash_1 A\wedge B \;\Leftrightarrow\; \alpha \Vdash_1 A \text{ 이고 } \alpha \Vdash_1 B \qquad (\wedge_1)$$
$$\alpha \Vdash_0 A\wedge B \;\Leftrightarrow\; \alpha \Vdash_0 A \text{ 또는 } \alpha \Vdash_0 B \qquad (\wedge_0)$$
$$\alpha \Vdash_1 A\vee B \;\Leftrightarrow\; \alpha \Vdash_1 A \text{ 또는 } \alpha \Vdash_1 B \qquad (\vee_1)$$
$$\alpha \Vdash_0 A\vee B \;\Leftrightarrow\; \alpha \Vdash_0 A \text{ 이고 } \alpha \Vdash_0 B \qquad (\vee_0)$$
$$\alpha \Vdash_1 A\rightarrow B \;\Leftrightarrow\; \forall\beta\sqsupseteq\alpha(\beta \Vdash_1 A \text{ 이면, } \beta \Vdash_1 B) \qquad (\rightarrow_1)$$
$$\alpha \Vdash_0 A\rightarrow B \;\Leftrightarrow\; \alpha \Vdash_1 A \text{ 이고 } \alpha \Vdash_1 B \qquad (\rightarrow_0)$$

우리는 $(\rightarrow_1)$을 진리 보존truth preservation으로, $(\rightarrow_0)$을 반례counter example로 부를 것이다.

문장 A는 프레임 $S = (\zeta, U, \sqsubseteq)$ 에서 BN_1-*타당valid*하다는 $\forall v \in \mathbf{Val}_{BN1}$, $\zeta \Vdash^v_1 A$ 와 동치iff이다. 이제 Σ를 프레임들의 집합이라고 하자. 문장 A는 BN_1-타당valid하다, $\vDash_{BN1} A$, 는 $\forall S \in \Sigma$, A는 S에서 BN_1-타당valid하다와 동치이다.

BNc_1을 위해서 우리는 $\sqsubseteq$이 다음의 의미에서 *연결된connected* 프레임들을 고려한다.

임의의 $\alpha, \beta \in U$, $\alpha \sqsubseteq \beta$ 이거나 $\beta \sqsubseteq \alpha$ 이다.

*선형 순서linear order*는 연결된 부분 순서connected partial order이다. 그렇다면 *선형*-프레임은 $\zeta \in U$ 와 $\sqsubseteq$이 U 위에서 선형 순서인 구조 $S = (\zeta, U, \sqsubseteq)$ 이다. (매개된parameterized) BNc_1-진리치evaluation는 다음을 취한다는 것을 제외하고 BN_1과 같은 조건을 만족하는 **문장** $\times$ U 로부터 **Dunn** 으로의 함수 $v(A, \alpha)$ 이다.

$$\alpha \Vdash_0 A\rightarrow B \;\Leftrightarrow\; \text{(i) } \alpha \Vdash_1 A \text{ 이고 } \alpha \Vdash_1 B, \text{ 또는} \qquad (\rightarrow_0)$$
$$\text{(ii) } \alpha \nVdash_0 A\rightarrow B$$

$\mathbf{Val}_{BNc1}$에 의해 우리는 이러한 진리치들의 집합을 지시한다.

문장 A는 프레임 $S = (\zeta, U, \sqsubseteq)$ 에서 BNc_1-*타당valid*하다는 $\forall v \in \mathbf{Val}_{BNc1}$, $\zeta \Vdash^v_1 A$ 와 동치iff이다. 이제 Υ를 프레임들의 집합이라고 하자. 문장 A는 BNc_1-타당valid하다, $\vDash_{BNc1} A$, 는 $\forall S \in \Upsilon$, A는 S에서 BNc_1-타당valid하다와 동치이다.

BN_1(또는 BNc_1)을 위해 주어진 모델 M_{BN1}(또는 M_{BNc1})에 대해서, 우리는 ($\vDash_1$에 상응하는 단순 진리 보존) 귀결을 다음으로 정의할 수 있다.

[정의3.3.1] $\Gamma \vDash_{BN1} A$(또는 $\Gamma \vDash_{BNc1} A$) 은 모든 모델 $M = (\zeta, U, \sqsubseteq, v) \in M_{BN1}$(또는 M_{BNc1}) 에 대해, 만약 모든 $B \in \Gamma$ 에 대해 $\zeta \Vdash^v_1 B$ 이면 $\zeta \Vdash^v_1 A$ 이다와 동치iff이다.

3.4. BN_1과 BNc_1의 완전성

BN_1과 BNc_1의 완전성 증명을 위해서 우리는 다소의 정의와 명제를 필요로 한다. 우리는 [11]의 [정의22]에서 [보조정리29]를 흉내냄으로써 이 작업을 완수한다. 앞서 언급한 대로 이 작업은 단지 다양한 논리를 다루는 일반적 문맥이 아닌 구체적 문맥에서 논의를 수행한다는 점에서만 [11]과 구분된다. 특별히 구분할 필요가 없는 한 $BN_{(C)1}$을 통해 우리는 두 논리 체계를 함께 나타낸다.

우리는 $\vdash_{BN(c)1}$ 를 논리 $BN_{(C)1}$의 연역가능성deducibility 귀결 관계로 해석한다. *$BN_{(C)1}$-이론*에 의해선 연역가능성 아래 닫힌 문장들의 집합 T를 의미한다 (만약 $A \in T$ 이고 $A \vdash_{BN(c)1} B$ 이면, $B \in T$ 이다). *원초적primary $BN_{(C)1}$-이론*에 의해선 $A \vee B \in T$ 이면 $A \in T$이거나 $B \in T$인 이론을 의미한다. *사소한trivial $BN_{(C)1}$-이론*에 의해선 $BN_{(C)1}$의 전 문장 집합을 의미한다. $BN_{(C)1}$-이론 T는 $BN_{(C)1}$의 모든 정리들을 포함하고 그래서 (T는) 공집합이 될 수 없다는 것에 주목할 필요가 있다. $BN_{(C)1}$-이론은 선접disjunction 아래 닫혀있다.

이제 *표준canonical $BN_{(C)1}$-프레임*을 ζ_{can}이 원초적 $BN_{(C)1}$-이론이고 U_{can}이 ζ_{can}을 확장하는 원초적 $BN_{(C)1}$-이론들의 집합 그리고 $\sqsubseteq_{can}$이 U_{can}에 제약된 $\sqsubseteq$인 구조 (ζ_{can}, U_{can}, $\sqsubseteq_{can}$) 라고 하자. 먼저 다음 두 명제는 자명하다.

[명제3.4.1] 표준canonical $BN_{(C)1}$-프레임은 부분적으로 순서 지어진다partially ordered.

[명제3.4.2] 체계 BNc_1에 대해서 표준 프레임은 연관된다 (그래서 선형적으로 순서 지어진다linearly ordered).

이제 우리는 다음과 같은 $BN_{(C)1}$의 린덴바움Lindenbaum 보조정리를 얻을 수 있다.

[명제3.4.3] (린덴바움 보조정리) 만약 $\Gamma \nvdash_{BN(c)1} A$ 이면, $\Gamma \subseteq \zeta$ 이고 $A \notin \zeta$ 인 원초적 이론이 있다.

증명; $BN_{(C)1}$의 잘 정식화된 식들의 열거 $\{A_n : n \in \omega\}$ 를 취하자. 우리는 귀납에 의해 집합들의 열a sequence of sets을 다음처럼 정의한다.

$$\zeta_0 = \{A' : \vdash_{BN(c)1} A'\}.$$
$$\zeta_{i+1} = \begin{cases} Th(\zeta_i \cup \{A_{i+1}\}) & \zeta_0, A_{i+1} \vdash_{BN(c)1} A \text{ 이 경우가 아닐 때,} \\ \zeta_i & \text{그 외} \end{cases}$$

이제 ζ가 이러한 ζ_n들 전부의 합union이라고 하자. 그러면 ζ가 A를 포함하지 않는 이론theory라는 것을 쉽게 알 수 있다. 우리는 또한 그것이 prime이라는 것을 보일 수 있다.

모순을 끌어내기 위해 $B \vee C \in \zeta$ 이고 $B, C \notin \zeta$을 가정하자. 그렇다면 $\zeta \cup B$ 와 $\zeta \cup C$ 로부터 얻어진 이론들 모두 A를 포함해야한다. 이로부터 $\zeta' \wedge B \vdash_{BN(c)1} A$ 이고 $\zeta' \wedge C \vdash_{BN(c)1} A$ 인 ζ의 원소들의 연언conjunction ζ'이 있다는 것이 따라나온다. 그렇다면 선언지 제거$\vee$-elimination에 의해 $(\zeta' \wedge B) \vee (\zeta' \wedge C) \vdash_{BN(c)1} A$을 얻게되고, 다시 분배법칙distributive law에 의해 $\zeta' \wedge (B \vee C) \vdash_{BN(c)1} A$를 얻는다. 이로부터 $A \in \zeta$를 얻을 수 있고 이는 가정과 모순된다. ■

이제 표준 진리치canonical evaluation를 다음으로 정의하자.

$$1 \in v_{can}(A, \alpha) \Leftrightarrow A \in \alpha,$$
$$0 \in v_{can}(A, \alpha) \Leftrightarrow -A \in \alpha,$$

이로부터 $BN_{(C)1}$의 완전성을 위한 다음 보조정리를 얻을 수 있다.

[보조정리3.4.4] (표준 진리치 보조정리) v_{can}은 진리치evaluation이다.

증명; 던 [11], [보조정리29]에 의해. ■

이제 우리는 $BN_{(C)1}$의 강한strong 건전성soundness과 완전성completeness을 증명할 수 있다.

[정리3.4.5] ([11], $BN_{(C)1}$을 위한 강한 건전성과 완전) $BN_{(C)1}$에 대하여,

$\Gamma \vdash_{BN(c)1} A$ 은 $\Gamma \vDash_{BN(c)1} A$ 과 동치iff이다.

증명; (개관) (←) [명제3.4.3](린덴바움 보조정리)과 [보조정리3.4.4](표준 진리치 보조정리)를 적용함으로써 $BN_{(C)1}$의 완전성을 얻는다.

(→) 건전성은 상응하는 모델에서 각 공리의 타당성 입증verification을 통해 증명된다. ■

4. BNc_1과 $LŁC^+$

구문론에 관한 한 BNc_1은 $LŁC^+$의 확장 체계에 해당한다. 이를 분명히 하기 위하여 우리는 BNc_1의 문장들을 $LŁC^+$의 문장으로 보내는maps BNc1으로부터 LŁC+으로의 번역translations을 시도한다.[7] 고전 명제논리로부터 직관주의의 명제논리로의 겐첸Gentzen 번역([15])을 좇아 우리는 이 작업을 완성한다. 우리는 먼저 다음의 번역에 관한 정의를 필요로 한다.

[정의4.1] 명제계산 **L**로부터 명제계산 **M**으로의 *정리보존함수 theorem-preserving map*는 다음을 만족하는 L_L 로부터 L_M 으로의 함수 * 이다: 모든 A에 대해,

$\vdash_L A$ 는 $\vdash_M A^*$ 와 동치iff이다.

다음을 만족하는 함수는 *번역translation*이다: 모든 Γ, A에 대해,

$\Gamma \vdash_L A$ 는 $\Gamma^* \vdash_M A^*$ 와 동치iff이다.

우리는 **L**로부터 **M**으로의 (이러한) 번역이 있다면, $\mathbf{L} \rightarrowtail \mathbf{M}$ 으로 표시한다.

[정의4.2] $^-$ 는 다음 규칙에 따라 BNc_1의 모든 문장들을 $LŁC^+$의 문장들로 귀납적으로 보내는inductively maps BNc_1으로부터 $LŁC^+$로의 번역이다:

---

7) 번역에 관한 이해를 위해선 [13], X장을 참조할 것.

(i) A가 문장변항일 경우, $A^{-} = \neg\neg A$;
(ii) $A = \neg B$ 라면, $A^{-} = \neg B^{-}$;
(iii) $A = B \wedge C$ 라면, $A^{-} = B^{-} \wedge C^{-}$;
(iv) $A = B \vee C$ 라면, $A^{-} = \neg(\neg B^{-} \wedge \neg C^{-})$;
(v) $A = B \rightarrow C$ 라면, $A^{-} = B^{-} \rightarrow C^{-}$.

아래 [정리4.3]을 증명하기 위해 우리는 $LŁC^{+}$ (또는 LC) 의 다음 정리를 사용한다.

(1) $A \rightarrow \neg\neg A$,
(2) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$,
(3) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$,
(4) $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$,
(5) $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$.

[정리4.3] BNc_1의 임의의 문장 A에 대하여, A가 BNc_1의 정리라는 것은 A^{*}이 $LŁC^{+}$의 정리라는 것과 동치iff이다.

증명; ($\Leftarrow$) $\vdash_{LŁC^{+}} A^{-}$ 라고 하자. 그렇다면, (1)과 MP에 의해 $\vdash_{LŁC^{+}} \neg\neg A^{-}$ 을 얻는다. $LŁC^{+} \subseteq BNc_1$ 이기 때문에, 만약 $\vdash_{LŁC^{+}} \neg\neg A^{-}$ 이라면 $\vdash_{BNc1} \neg\neg A^{-}$ 이다. 따라서 $\vdash_{BNc1} \neg\neg A$ 이고 공리 VIII와 MP에 의해 $\vdash_{BNc1} A$ 를 얻는다.

($\Rightarrow$) BNc_1의 증명 길이 위에서의 귀납에 의해 우리는 이를 증명한다. 그러나 두 체계가 같은 추론 규칙과 연역 정리를 갖기 때문에 우리는 BNc_1의 공리 도식의 사례들이 $LŁC^{+}$의 정리로 번역될 수 있음을 보이는 것으로 충분하다. 즉, 우리는 BNc_1의 증명 길이 1 단계만을 고려할 필요가 있다. BNc_1을 위한 공리 도식 I 에서 VII 까지가 $LŁC^{+}$을 위한 공리 도식 A1 에서 A7 으로 번역될 수 있다는 것은 자명하다. VIII, IX 는 다음과 같이 번역될 수 있다. VIII에 대하여 우리는 $\vdash_{LŁC^{+}} \neg\neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg\neg A$ 을 보여야한다. (i) $\vdash_{LŁC^{+}} \neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$ 은 (1)에 의해 성립한다. (ii) $\vdash_{LŁC^{+}} \neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ 은 [13]의 7장 [귀결5.e]에 의해 성립한다. IX에 대하여 우리는 $\vdash_{LŁC^{+}} \neg(\neg\neg A \vee \neg\neg B) \leftrightarrow (\neg\neg\neg A \wedge \neg\neg$

$\neg$B) 을 보여야한다. 이는 (2)에 의해 성립한다. X, XI 은 다음과 같이 번역될 수 있다.

X 에 대하여 우리는 $\vdash_{LLC+}$ $\neg(\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \leftrightarrow \neg(\neg\neg\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg\neg B)$ 을 보여야한다.

(i) $\vdash_{LLC+}$ $\neg(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg B)$

1. $\vdash_{LLC+}$ $\neg\neg\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg\neg B$ (가정)
2. $\vdash_{LLC+}$ $\neg\neg\neg\neg A$ (1, III, MP)
3. $\vdash_{LLC+}$ $\neg\neg A$ (2, [13] 7장 [귀결5.e], MP)
4. $\vdash_{LLC+}$ $\neg\neg B$ (3과 유사하게)
5. $\vdash_{LLC+}$ $\neg\neg A \wedge \neg\neg B$ (3, 4, AD)
6. $\vdash_{LLC+}$ $(\neg\neg\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$ (1, 5)
7. $\vdash_{LLC+}$ $\neg(\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \rightarrow \neg(\neg\neg\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg\neg B)$ (6, (3), MP)

(ii) $\vdash_{LLC+}$ $\neg(\neg\neg\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg\neg B) \rightarrow \neg(\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$. (i)과 유사하게.

XI 에 대하여 우리는 $\vdash_{LLC+}$ $\neg(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \leftrightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg B)$ 을 보여야한다. (i) $\vdash_{LLC+}$ $(\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg B) \rightarrow \neg(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ 은 (4)에 의해 성립한다.

(ii) $\vdash_{LLC+}$ $\neg(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg B)$

1. $\vdash_{LLC+}$ $\neg A \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ ((5))
2. $\vdash_{LLC+}$ $\neg\neg B \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ (I)
3. $\vdash_{LLC+}$ $\neg(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg A$ (1, (3), MP)
4. $\vdash_{LLC+}$ $\neg(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg\neg B$ (2, (3), MP)
5. $\vdash_{LLC+}$ $\neg(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg B)$ (3, 4, IV, MP) ■

5. 맺는 말: 남은 과제

우리는 이 글에서 $LŁC^{+}$의 완전성을 아직 다루지 않았다. 만약 우리가 2장에서 $LŁC^{+}$의 완전성을 보였다면 타당성 보존 함수에 해당하는 모델을 통한 BNc_1 으로부터 $LŁC^{+}$ 으로의 번역을 보일 수 있다. 이는 다른 지면을 통해서 분명하게 될 것이다.

참 고 문 헌

[1] Almukdad, A. and Nelson, D., "Constructable falsity and inexact predicates", *The Journal of symbolic Logic*, 49 (1984), pp. 231-233.

[2] Belnap, N. D., "A useful four-valued logic", *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, J. M. Dunn and G. Epstein (eds.), Dordrecht, D. Reidel Publishing Co., 1977, pp. 8-37.

[3] _____, "How a computer should think", *Contemporary Aspects of Philosophy*, G. Ryle (eds.), Stocksfield, Oriel Press Ltd, 1977, pp. 30-55.

[4] Bimbo, K. and Dunn, J. M., "Four-valued logic", (*The Journal of symbolic Logic*, 49 (1984), pp. 231-233.)

[5] Dunn. J. M., "The effective equivalence of certain propositions about De Morgan lattices", *The Journal of symbolic Logic*, 32 (1967), pp. 433-434.

[6] _____, "Natural language versus formal language", unpublished manuscript, *Presented at the Joint APA-ASL symposium* (1969), New York.

[7] _____, "Intensional algebras", *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. 1, A. R. Anderson and N. D. Belnap, Princeton, Princeton Univ. Press, 1975, pp. 180-206.

[8] _____, "Intuitive semantics for first degree entailments", *Philosophical Studies*, 29 (1976), pp. 149-168.

[9] _____, "A Theorem in 3-valued model theory with connections to number theory, type theory, and relevant logic", *Studia Logica*, 38 (1979), pp.

149-169.

[10] _____, "Relevance logic and entailment", *Handbook of Philosophical Logic*, D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Dordrecht, D. Reidel Publishing Co., 1986, pp. 117-224.

[11] _____, "Partiality and its Dual", *Studia Logica*, 65 (2000), pp. 5-40.

[12] _____ and Meyer, R. K., "Algebraic Completeness Results for Dummetts LC and Its Extension", *Zeitschrift Für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 17 (1971), pp. 225-230.

[13] Epstein, R. L., *The Semantic Foundations of Logic: Propositional Logics*, vol I, New York, Oxford Univ. Press, 1995.

[14] Fine, K., "Models for entailment", *Journal of Philosophical Logic*, 3 (1974), pp. 347-372.

[15] Gentzen, G., "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", *Mathematische Analen*, 112 (1936), pp. 493-565.

[16] Kripke, S., "Semantic analysis of intuitionistic logic I", *Formal Systmems and Recursive Functions*, J. Crossley and M. Dummett (eds.), Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1965. pp. 92-129.

[17] Nelson, D., "Constructable falsity", *The Journal of symbolic Logic*, 14 (1949), pp. 16-26.

[18] Resher, N., *Many-valued Logic*, New York, McGraw-Hill, 1969.

[19] Restall, G., "Four-valued semantics for relevant logics (and some of their rivals)", *Journal of Philosophical Logic*, 24 (1995), pp. 139-160.

[20] Slaney, J., Surendonk, T., and Girle, R., "Time, truth, and logic", *Technical Report TR-ARP-11/89*, Automated Reasoning Project, Australian national Uiversity, Canberra, 1989.

[21] Thomason, R. H., "A semantic study of constructive falsity", *Zeitschrift Für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 15 (1969), pp. 247-257.

[22] Yang, E., "LŁC and algebraic completeness of its extensions", submitted, 200+.