韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 14집, 2002. 8. 197-215.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 14, Aug. 2002. 197-215.

컴퓨터를 통한 수학적 사고력 신장의 가능성 모색

조 한 혁 (서울대학교)
안 준 화·우 혜 영 (서울대학교 대학원)

최근 수학적 사고력 연구가 구체적 수학내용에 기반한 활동과 조작에 대한 연구보다는 활동이나 조작을 통한 결과로 수학적 사고력에 접근하는 일회성 연구로 이루어지는 경향이 있다. 본고에서는 교육 내용을 선정하기 위해 학교수학에서 아동들이 어떤 수학적 사고를 하는데 장애을 겪는지에 주목하여, 이러한 장애를 극복하는 것을 통해 수학적 사고력의 신장을 생각해보고자 하였다. 이에 대수에서는 문자도입에 따른 추상적 상징의 수용과 이용부분에서, 기하에서는 논증기하의 증명도입과정에서 형식적, 연역적 사고 시작으로 아동이 수학적 사고에 어려움을 겪는다는 사실에 주목하였다. 특히 논증 기하의 연역적, 형식적 증명은 논리와 추론이 바탕이 되어야 한다. 그런데 논리와 추론은 고등학교 1학년과정 집합과 명제부분에 들어있어 아동은 논리와 추론에 대한 어떤 경험도, 교육도 받지 않은 상태에서 증명을 하게 된다. 이에 교육 내용으로 수학적 사고력을 신장을 위해 가장 필요한 내용이 논증 기하가 도입되기 이전에 초등학교 5,6학년 아동을 대상으로한 논리와 추론교육이라고 본다. 또한 교육 방법으로는 컴퓨터를 이용한 교육공학적 접근을 하고자 하였다. 교육공학적 접근이 적극 권장되는 교육적 현실과 정규교육과정에서 이를 받아들일만한 시간적 여유가 없음을 감안하여, 교과 내용과 연계된 컴퓨터 교육을 제안하는 바이다. 이에 논리 및 추론 교육은 컴퓨터 교육으로 초등학교의 특기적성 시간이나 정규수업 시간에 이용할 것을 제안한다. 논리와 추론교육을 위해 무엇을 어떻게 가르칠 것인가에 대한 답으로 논리와 추론교육에 적합한 수학적 내용으로 크게 이산수학과 중등 기하의 초등화하여 탐구하도록 하는 내용을, 교육 방법 측면에서는 논리와 추론 교육을 위한 LOGO 기반 마이크로월드를 설계, 이용하여 수학적 사고력을 신장시키고자 한다. 여기까지가 수학적 사고력을 위한 가능성을 모색한 것이라면 후속연구로 이러한 가능성을 실험연구로 검증하고자 한다.

Ⅰ. 서 론

최근 사회적 변화를 반영하여 기술공학의 교육적 활용이 권장되는 가운데, 교육정보화의 노력으로 이를 위한 교육적 환경이 조성되고 있다. 교육정보화를 교단선진화, 교사정보화, 학생정보화로 나누어 살펴본다면, 교단 선진화를 통해 어느 정도 기술공학을 활용할 수 있는 교육적 환경이 마련되어 있다는 의미이다. 교육에서 기술공학의 활용에 선두에선 테크놀러지가 컴퓨터라고 할 수 있다. 하지만 이를 이용하는 교사정보화, 학생정보화는 교육적 요구를 제대로 반영하지 못하고 있다. 교사정보화, 학생정보화의 핵심은 교사와 학생의 컴퓨터 사용능력의 향상에 있는 것이 아니라 이를 통해 효과적인 교수-학습이 이루어질 수 있도록 기술공학을 활용하여 학습에 필요한 교육자료와 프로그램을 개발, 이용할 수 있어야 한다는 것이다. 그러나 이러한 교육적 바램과는 달리 교육정보화와 관련한

연구결과[1]들을 살펴보면 학교 현장에서 수학수업시간에 기술공학을 활용한 교육자료나 프로그램의 활용이 바램과 같이 원활히 이루어지고 있지 않음을 알 수 있다. 교사가 상대적으로 행정적 측면에서는 정보화되어 있지만 교육의 본질적인 수업을 위한 교육공학의 활용 즉 교육자료나 프로그램개발과 이용측면에서는 정보화가 미흡하다는 것이다. 또한 학생정보화측면에서 살펴보면 학생정보화를 위한 컴퓨터 교육이 초등, 중등, 고등에 걸쳐 특기, 적성교육이나 정규수업시간으로 아동들이 이수하도록 되어 있다. 그런데 현재 학교에서의 컴퓨터 교육은 워드프로세서, 스프레드쉬트, 인터넷 검색과 같은 일반적인 컴퓨터를 생활화하기 위한 기능 위주의 내용으로 이루어져 있다. 물론 컴퓨터 교육이 사회적 요구와 맞물려 일상에서 컴퓨터를 생활화하는데 필요한 이러한 기능 위주의 교육을 담당할 필요도 있다. 하지만 앞서 지적한 아동의 교육적 자료와 프로그램의 사용문제는 컴퓨터 교육을 통해 해결되지 않고 있다. 이러한 교사정보화 측면과 학생정보화 측면에서 문제점을 극복하는 대안으로 새로운 컴퓨터 교육의 방향을 제안하고자 한다. 수학학습에 교육자료와 프로그램의 개발과 이용을 전적으로 교사의 역량에 맡기기에는 무리가 있다. 국가나 교육기관에서 여러 수학 주제에 적합한 교육공학적 접근이 가능하도록 필요한 많은 교육자료와 프로그램을 개발하고, 이를 학습 보조 도구로 효과적으로 교수에 이용할 수 있도록 교사교육을 강화하고, 또한 아동들 역시 교육자료와 프로그램을 학습에 사용하여 인지적 도구로 기술공학을 활용할 수 있도록 교육이 필요하다. 그러나 현실적으로 이러한 테크놀러지로서 컴퓨터를 사용하는 수학 교육이 들어갈 시간적 여유가 교육과정 속에는 없다. 이에 컴퓨터교육이 그 대안이 될 수 있다고 본다. 이런 정보화의 요구를 이해한다면 교육적 목적에서 교과내용과 관련된 교육공학적 접근이 가능하도록 컴퓨터 교육이 이루어져야 한다고 본다.

최근 수학적 사고력에 대한 관심이 집중되는 가운데 이를 주제로 하는 많은 연구 결과들이 쏟아져 나오고 있다. 명확히 학교수학과 연결지을 수도, 연결짓지 않을 수도 없는 수학적 사고력은 체계적인 프로그램이 운영되어 수학적 사고력과의 관계가 연구가 되기보다는 일회성 조작과 활동의 결과로 수학적 사고력의 신장을 논하는 연구들이 많다. 수학적 사고력의 신장을 위해 필요한 것이 무엇인가라는 질문에 대한 답으로서 많은 교육 내용과 방법들이 선택, 연구되고 있다.

교육 내용 측면에서 무엇보다 구체적인 수학적 내용에 근거한 수학적 사고의 신장을 논의하고자 한다. 학교교육에서 아동들이 어떤 수학적 사고를 하는데 인지적 장애를 겪는지에 주목하고, 이러한 장애를 극복하는데 필요한 것이 무엇인지 결정하고자 한다. 바로 이 질문에 대한 답이 아동의 수학적 사고력의 신장을 위해 구체적으로 필요한 것이라고 볼 수 있다. 이에 수학적 사고의 인지적 장애에 대한 논의를 바탕으로 수학적 사고력의 신장을 위한 필요한 무엇을 도출해내고자 하였다.

교육방법 측면에서는 교육 내용의 논의에서 결과로서 도출된 수학적 사고력의 신장을 위해 필요한 논리와 추론 교육에 효과적인 접근방법으로 컴퓨터를 활용한 교육공학적 접근을 하고자 하였다. 이를 위해 LOGO 기반 마이크로월드를 설계하였다. 원래 LOGO는 MIT의 인공지능 연구실에서 수학교육을 위한 프로그래밍 언어로 만들어졌고, 마이크로월드는 1980년 출간된 'mind storm에서 Papert

1) 김민경 · 노선숙 (2001). 수학교육현장에서 교육 정보화의 현황과 과제.

에 위해 로고 프로그래밍 언어를 소개하는 문맥에서 유래되었으며 처음에 인공지능학자들이 사용하던 용어로 관심을 갖고 있는 활동 대상의 실제 세계의 작은 영역을 컴퓨터 프로그램 형태로 구현한 것을 일컫는다. 현재의 마이크로월드는 로고 마이크로월드에 국한된 것이 아니라 보다 많은 컴퓨터 환경을 포함한 포괄적인 탐구환경개념으로 발전하였다.

논리와 추론 교육을 위해 LOGO 기반 마이크로월드는 택한 이유는 크게 두가지이다. 하나는 LOGO가 가지는 교육적 장점들 때문이다. LOGO 기반 마이크로월드를 통한 교육공학적 접근이 가지는 여러 장점들은 다음과 같다. 첫째, LOGO 기반 마이크로월드는 컴퓨터를 인지적 도구로 사용하도록 한다. 최근의 컴퓨터의 교육적 활용 방식에 관한 관심은 컴퓨터를 창의적 사고와 같은 상위수준의 인지 과정을 보다 촉진하고 지원하여 줄 수 있는 인지적 도구(cognitive tool)로 보는 것이다.(Lajoie & Derry, 1993; 박성익외 인용) 기존의 수업을 위한 보조 도구나 행정 보조 도구가 아닌, 현재와 같은 교재나 교사의 수업 내용을 소프트웨어 형식으로 옮겨 놓는 것이 아닌, 컴퓨터의 다양한 능력을 인간의 고차적 사고 기능을 촉진하는데 활용하고자 하는 것이다. LOGO 기반 마이크로월드는 교재나 교사의 수업 내용을 대신하는 수업 보조 도구가 아닌 아동의 지식을 구성하도록 하는 인지적 도구로 사용되어 수학적 사고를 향상시킬 수 있다. 이러한 LOGO 기반 마이크로월드의 인지적 도구로서의 역할은 교육공학적 접근의 바람직한 예가 된다고 볼 수 있다. 둘째, LOGO 기반 마이크로월드는 학습자가 지식을 능동적으로 구성하도록 한다. 교육공학적 접근의 가치를 정보전달 수단으로서 학업성취 및 증진여부에서 찾기보다는 학습자가 지식을 능동적으로 구성하기 위한 매체로 활용하고 파악하는 것에서 찾는 것이 의미있다고 할 수 있다.[2] LOGO 기반 마이크로월드는 본질적으로 학습자가 스스로 탐구해나가는 환경으로 능동적인 지식의 구성이 가능하다는 측면에서 교육적 가치를 지닌다. 셋째, LOGO 기반 마이크로월드는 학습 동기 유발에 효과적이다. 프로젝트와 같은 제작활동을 통해 학습에 집중하게 되고, 아동은 수학적 창의성, 자기 표현력, 자아효능감을 증진시키게 된다. 넷째, LOGO 기반 마이크로월드를 통한 교육 공학적 접근은 기존의 전통적인 수업방식을 벗어나도록 학습 환경을 개선시키는 역할을 담당한다.

논리와 추론 교육을 위해 LOGO 기반 마이크로월드를 택한 다른 이유는 논리와 추론 교육에 기존 LOGO가 다른 소프트웨어보다 우위에 있고, 필요하다면 LOGO 기반 마이크로월드를 개선할 수 있기 때문이다. 또한 논리와 추론 교육의 내용과 시기를 고려해 가장 적합한 교육 환경이 바로 LOGO 기반 마이크로월드이기 때문이라고 보았기 때문이다. 이렇게 수학적 사고력의 신장을 위해 논리와 추론 교육을 위한 적절한 시기와 적합한 수학적 내용이 선정되었다면, 왜 LOGO 기반 마이크로월드를 통해 논리와 추론교육을 하려고 하는지 정당성을 밝혀야 할 것이다. 이에 LOGO 연구의 발달과정을 통해 이러한 LOGO 기반 마이크로월드가 진화와 발전을 거듭하면서 보다 나은 수학적 탐구 환경으로 거듭 나고 있음을 밝히고, 이러한 노력의 일환으로 논리와 추론을 위한 LOGO 기반 마이크로월드를 어떻게 설계했는지 소개하고자 한다.

---

2) Kozma, 1991

마지막으로 현재 진행되고 있는 수학학습 주제에 따른 컴포넌트개념의 마이크로월드들이 종합된 LOGO 기반 마이크로월드에 대한 실험연구를 통해 수학적 사고력 신장을 위한 가능성을 검증하고자 함을 밝힌다.

Ⅱ. 본 론

1. 수학적 사고력 신장을 위한 논리와 추론 교육의 필요성

수학적 사고력의 신장을 위해 무엇이 필요한 것일까? 이를 위해 수학적 사고의 성장과정을 살펴봄으로써 답을 구하고자 한다. 학교교육에서 아동들이 어떤 수학적 사고를 하는데 인지적 장애를 겪는지에 주목하고, 이러한 장애를 극복하는데 필요한 것이 무엇인지 밝혀 수학적 사고력의 신장을 위한 방법을 모색해 보기로 하자.

학생들이 성장함에 따라 수학적 지식도 성장한다[3].

앞의 문구는 아동은 발달 수준에 맞는 지식구조와 사고 방법을 통해 수학적 지식을 받아들이게 된다는 사실을 대변해 준다. 하지만 아동들의 수학적 사고가 자연스러운 곡선의 성장과정이 아니라 계단모양의 성장과정을 거치게 된다면, 아동은 수학적 사고 성장 과정에서 인지적 갈등을 겪게 되고 이에 계단에 오르기 위해 의식적인 노력이 교수와 학습에서 필요함을 또한 암시한다고 할 수 있다. 그렇다면 수학적 사고의 성장과정에서 아동이 인지적 장애를 겪는 부분에 대한 해답을 찾을 수 있을 것이다.

1) 초등 수학적 사고와 초등 수학적 사고의 차이

수학적 성장 과정에서 아동이 극심하게 겪는 인지적 갈등은 초등 수학적 사고에서 고등 수학적 사고로 넘어가는 시기에 일어난다고 할 수 있다. 그렇다면 초등 수학적 사고와 고등 수학적 사고의 차이는 무엇인지 여러 표현을 통해 살펴보기로 하자. 첫째, 초등 수학적 사고에서는 단순한 개념에서 시작, 경험과 일반적인 예를 통해 보다 일반적인 개념을 형성해 가는 상향식(bottom up) 방식의 종합적 접근이 주로 이루어진다면, 고등 수학적 사고에서는 일반적인 개념으로부터 출발하여 구체화하고 응용해나가는 하향식(top-down)방식의 분석적 접근이 필요하다고 할 수 있다. Poincare는 수학적 사고에서 종합과 분석의 상호보완적인 역할에 대해 살펴보았는데, 종합은 초등 수학적 사고에서 주로 일어나는 직관적인 수학적 사고형태이며 분석은 고등 수학적 사고에서 반드시 필요한 형식적이고 연역적인 수학적 사고형태라고 볼 수 있다. 이때 종합과 분석은 서로 상호보완적인 역할을 담당하게 된다.

---

3) David, Tall, Advanced Mathematical Thinking 중에서

둘째, 초등 수준에서의 수학적 사고는 형식적 추상화의 과정이 부족하며, 형식화하는 과정에서의 마지막 엄밀한 단계까지는 도달하지 못한다. 반면 고등 수준의 수학적 사고에서는 형식화하는 과정을 통해 논리적 증명을 하는 마지막 단계까지 이른다. 초등 수학적 사고에서 고등수학적 사고로의 성장은 수학을 기술하는 수준에서 정의하는 수준으로, 설득하는 수준에서 정의를 근거로 논리적 증명을 하는 것으로 바뀌는 의미 있는 변화과정을 겪어야 한다고 밝히고 있다.[4)]

초등 수준에서 고등 수준으로 넘어가는 수학적 사고의 성장과정이 결코 자연스러운 곡선 모양의 성장과정이 아닌 건너뛰기가 필요한 계단형 성장과정임을 알 수 있다. 이에 초등 수학적 사고에서 고등 수학적 사고로 나아가기 위해서는 의식적인 노력과 도움이 필요하다. 초등 수학적 사고에서 익숙한 종합적 접근과 함께 논리적 타당성을 갖게 하는 고등 수학적 사고인 분석적 접근 방법에 대한 교육이 필요하다고 할 수 있다.

2) 학교 수학에서의 수학적 사고의 문제

학교 수학에서 이러한 초등과 고등 수학적 사고의 차이가 극명하게 나타나 아동들이 인지적 갈등을 많이 일으키는, 교수학적 노력이 필요한 부분을 찾아보았다. 많이 알려졌듯이 대수에서는 문자 도입에 따른 추상적인 상징의 수용과 이용의 문제가, 기하에서는 연역적이고 형식적인 유클리드 기하의 증명지도의 문제가 그것이다. 특히 기하에서의 수학적 사고와 관련한 연역적, 형식적 증명문제는 Mason(1982)의 수학적 사고 확인의 세 단계를(자신을 확신시키기, 남을 확신시키기, 적을 확산시키기) 통해 살펴본 수학적 사고의 내용이 결국은 증명개념을 획득하는 것이라는 의견과도 일치하는 것이다. 대수의 수학적 사고성장 과정에서 문제가 되는 시기와 내용은 중학교에서의 문자 도입에 따른 상징의 수용과 이용에 대한 부분에 인지적 갈등을 어떻게 해결하여 수학적 사고력을 향상시킬 것인가에 대한 논의는 직접적으로 교육 방법으로 제안하는 LOGO 기반 마이크로월드에서 해결될 수 있는 문제이기에 나중에 논의하기로 하고 여기서는 기하에서의 증명문제에 집중해서 어떻게 학생들이 겪는 인지적 갈등을 해결할 것인가에 대한 논의를 하기로 하자.

수학적 사고의 성장과정에서의 어려움을 보여주는 중학교 증명 도입의 문제를 살펴보기로 하자. 수학정규교육과정에서 본격적인 증명은 중학교의 기하에서 도입된다. 현재 중학교에서 지도하고 있는 논증 기하는 유클리드 원론의 내용을 중학생 수준에 맞추어 초등화한 것으로 공리계까지는 지도하고 있지 않지만 도형의 몇 가지 기본적인 성질을 받아들이고 삼각형의 합동조건과 닮음 조건 및 보조선 방법을 이용하여 연역적으로 추론하도록 하는 유클리드 기하의 특성을 그대로 갖고 있다(우정호, 1998 ;서동엽,1999 인용) 유클리드 기하를 연역적으로 가르치는 가운데 증명을 시작하게 되는데, 이전까지의 기하학습의 성격과 확연히 다른 접근법임을 알 수 있다. 즉, 갑자기 수학자들이 했던 것과 같은 사고를 하도록 전혀 새로운 형태의 고등 수학적 사고를 하도록 요구받는다. 이제까지 아동들이 익숙한 종합적 접근이 아닌 분석적 접근으로 관점의 전환이 필요해진다.

---

4) 제 18회 대한수학교육학회 세미나 자료집, '고등 수학적 사고'에서

아동이 형식적 연역적 사고가 필요한 분석적 접근에 보이는 어려움이 원인을 크게 두가지로 지적할 수 있다. 하나는 아동의 추론발달단계상 형식적사고가 가능하도록 완전히 발달이 이루어지지 않았기 때문이다. 증명은 수학적 사고의 성장과정을 통해 자연스럽게 가르쳐야 하며 그 단계는 수학적 사고의 마지막 단계라고 할 수 있다. 학생들에게 수학적 사고의 마지막 단계인 증명을 바로 도입하는 것이 타당한가? 중학교2,3학년 아동의 발달단계를 통해 아동이 형식적이고 연역적인 증명을 수용할 수 있는지 살펴보기로 하자. 피아제는 아동의 추론 발달과 관련해 아동의 발달단계를 3단계로 나누고 있다. 감각운동기와 전조작기단계가 단계Ⅰ이 되며, 7,8세에서 11-12세의 구체적 조작기가 단계Ⅱ가 되며 11-12세 이후의 형식적 조작기가 단계Ⅲ이 되는데, 이 단계Ⅲ은 다시 11,12세-14,15세까지 단계Ⅲ-1과 14,15세이후 단계Ⅲ-2, 두 하위 단계로 나누어진다. 이에 피아제는 14,15세 이후의 단계에 이르렀을 때 비로소 형식적 사고가 완성된다고 말하고 있다.(서동엽, 1999 인용) 그렇다면 추론의 발달단계상 중학교 2,3학년의 아동들은 형식적 조작기 중 전 단계인 Ⅲ-1에 해당한다고 할 수 있고, 형식적 사고를 한다고는 하지만 완전하다고는 할 수 없는 추론의 발달단계에 있다고 할 수 있다. 다른 하나는 아동은 그 이전까지 하교교육에서 이러한 논리적 추론을 접할 기회를 전혀 갖지 못하는 것이 문제라고 할 수 있다.

증명 지도와 관련한 국내외 연구에서 논리와 추론 능력의 부족이 아동들이 겪는 어려움의 원인으로 지적되고 있다. 여기서는 세가지 연구결과를 살펴보도록 한다. 첫 번째 살펴볼 연구는 국내 중학교 학생들의 증명 능력을 분석한 연구[5]이다. 그 내용을 통해 아동들의 증명능력이 10-30% 정도의 학생들만이 기본적인 정리를 증명할 수 있는 수준으로 매우 낮음을 알 수 있다.(우정호, 1994, 류성림,1998; 서동엽 인용, 1999) 또한 중학교 학생들의 증명 능력 분석에 대한 연구결과[6]에서 알 수 있듯 학생들은 증명을 함에 있어 기본적인 논리(고전 논리)를 제대로 이해하고 있지 못하여 논리적 추론을 이끌어내지 못하고, 증명을 제대로 이해하지 못한다. 또한 이에 대한 대안으로 추론에 대한 선수학습이 필요하다는 견해도 밝히고 있다. 증명지도와 관련한 국외연구에서도 증명에 있어 추론의 문제를 지적하고 있다. 두번째 연구는 기하적 사고를 모델링하도록 시도한 반힐레에 의해 고무된 아동의 기하 학습에 대한 많은 연구이다. 소련과 미국 모두에서 12살까지의 85-90 %정도의 많은 비율의 아동들이 귀납적 사고에 거의 참여하지 못하고 있다는 사실을 보여준다. 구체적으로 아동들은 전체적인 모양(발힐레의 0수준)으로 형태를 파악하는 단계에 머물러 분석적으로성질을 파악하지 못한다. 그러나 중등 교육에서 연역적인 기하가 이어서 등장하여 실제 0수준에 있는 학생들은 반힐레의 2, 3 수준의 사고에 참여하길 요구받게 된다. 바꾸어 말하면(Douady's terminology) 아동들은 기하 개념들을 도구(tools)로 이용하는 최소한의 경험만을 가지고 있을 때 기하 개념들을 대상(object)으로 사고하길 요구받게 된다. 이는 연역적 기하 도입이 아동의 기하수준발달단계와 맞지 않음을 보여주는 것으로, 교수학적 개선 노력이 필요함을 알 수 있다. 세 번째 살펴볼 연구는 인지심리학자들의 추

5) 서동연 (1999). 중학교 학생의 증명 능력 분석
6) 서동엽 (1999). 중학교 학생의 증명능력 부족

론에 관한 연구[7]이다. 많은 아동들이 고등학교이상에서 기술된 추론 기술을 발달시키지 못하고 있으며 4%정도의 아동들만이 형식적 추론에 상당한 능력을 발전시키는 것처럼 보이고 대부분의 아동들은 그렇지 못해 고등학교이상의 대부분의 아동들에게 논리적으로 사고하는 능력을 향상시키기 위한 도움이 필요하다고 설명하고 있다. 아동들이 논리적 추론이 중요함에도 논리적인 추론을 통한 문제의 해결보다는 기계적 방법으로 문제를 해결해나간다는 사실을 지적한다. 1978년 Depaul university에서 이러한 문제를 해결하기 위해 전통적 산술 위주의 수학에서 보다 추상적인 수학적 사고로의 전이를 위한 과정을 만들어 가르쳤는데, 그 결과 아동들이 생각보다 더 심각한 논리적 추론에 어려움을 겪고 있다는 사실을 밝히고, 그 원인이 많은 부분 추론기술의 부족임을 지적하였다.

위의 연구결과에서 지적하듯 증명을 도입하기전에 논리와 추론교육이 필요하다. 아동의 기하학적 발달 수준과 수학적 사고의 성장과정에서의 문제를 고려하지 않은 채 수학자들의 수학적 사고의 마지막 산물인 증명이 준비도 없이 아동에게 제시되는 것은 바람직하지 못하다. 비록 복잡한 개념들을 적절하게 쪼개어 일목요연하게 잘 정리해 가르친다 하더라고 아동들은 논리적 연결을 이해하지 못하고 단순히 조각을 맞추는 작업으로 전락할 우려가 있기 때문이다. 이에 수학적 사고의 계단을 넘는데 사다리가 필요하다. 이러한 사다리는 무엇보다 필요한 것이 바로 연구결과들에서 지적한 논리와 이를 통한 추론 능력이라고 할 수 있다. 이에 본고에서는 기하 교육과 관련하여 논리와 이를 통한 추론 교육이 수학적 사고력의 신장을 위해 필요하다고 보았다.

3) 논리와 추론 교육의 도입방법

논리와 추론 교육은 논증기하가 도입되기 전에 도입될 필요가 있다. 수학교육에서 중학교 2,3학년 학생들은 형식적 연역적 사고가 가능하다고 보고 유클리드 기하 지도를 하고 있다. 중학교 2,3학년 학생들이 논리적 추론을 통해 증명과정을 이해하길 바라고, 그러리라 믿고 있다. 하지만 아동은 논리와 추론이 이전의 다른 교육경험을 통해 자연스럽게 체화되어 있지 않아 갑작스런 논리적 추론요구에 당혹해하며, 필요한 논리와 이를 통한 추론을 위한 어떠한 교육도 사전에 받고 있지 않다. 현재 교육과정에서 형식적 논리와 추론에 관한 내용은 고등학교과정의 집합과 명제부분에 들어있는 내용이 대부분이라고 할 수 있다. 하지만 그 내용도 과거와 비교해서 많이 생략되어 있다. 논리와 추론이 필요한 시기와 그것을 학습하는 시기가 바뀌어 있다고 할 수 있다. 이에 현재처럼 중학교에 와서 갑자기 연역적 추론을 요구하는 것은 무리가 있다. 그렇다면 논리와 추론을 가르치는 것을 적어도 논리적 추론이 필요한 시기인 중학교 이전부터 시작하는 것이 바람직하다고 할 수 있다. 이에 초등학교5,6학년 정도에서 시작할 수 있는 논리와 추론 교육을 생각해보았다.

논리와 추론 교육은 초등아동에게 형식적 추상적 논리로서가 아니라 실제적이고, 의미있는 문맥을 통해 이루어져야 한다. 초등학교 5, 6학년의 아동들을 대상으로 논리와 추론을 발달시키는 교육을 중

7) Joseph G. Rosenstein, Deborah S. Franzblue, Fred S. Roberts (1997). Discrets Mathematics in the School 중 pp.75-88.

학교의 연역적인 유클리드 기하를 가지고 도형의 성질로 가르칠 것인가? 구체적 조작기에서 형식적 조작기로 넘어가는 과도기에 있는 초등의 아동들에게 논리와 추론을 현재처럼 추상적 원리로 가르치는 것은 발달수준에 맞지 않다. 수학적 사고의 성장과 관련하여 교육과정을 개발할 때의 문제는 궁극적으로 아동이 형식적으로 의미 있는 수학적 사고를 할 수 있도록 인지적 성장이 가능한 상황을 어떻게 제시하는가에 있다. 중요한 것은 어떤 상황에서 논리와 추론을 가르쳐야 아동들의 인지적 성장이 효과적으로 이루어질 수 있을까? 하는 문제이다. 수년간에 걸친 인지심리학자들의 연구에서도 형식논리를 추상적 원리로 가르쳐서는 아동의 추론 능력의 향상이 보장되지 않으며 실제 추론 상황에서 형식논리 주제와 그 사용이 함께 하는 방법을 이용하는 것이 바람직하다고 제안하고 있다. 이는 논리 및 추론 교육이 초등아동에게 의미 있는 문맥 속에서 이루어져야 한다.

초등학생이 논리와 추론이 가능한 의미 있는 문맥의 조건으로 기하와 연결되는 아동의 발달수준에 맞는 친근한 내용을 들 수 있다. 이에 논리와 추론 교육을 위한 의미있는 문맥을 제공하는 학습내용을 크게 두가지를 들 수 있다. 하나는 이산수학을 통한 도형의 접근이다. 이산수학의 그래프는 논리와 추론을 위한 의미 있는 문맥을 제공할 좋은 학습소재가 된다. 조한혁외(2002)는 인터넷상의 조작 도구를 이용한 수학교육 프로그램 개발에서 이산수학의 그래프가 수학적 사고력의 개발에 좋은 소재가 됨을 밝히고, 인터넷상의 조작도구로 이러한 그래프를 탐구하는 예를 보여주었다. 초등학생들 아직 아직 발달단계상 중학교에서 다루듯 도형의 성질로 논리와 추론을 가르치는 것은 바람직하지 못하다. 이산 수학의 그래프가 좋은 대안이 된다. 다음은 이산수학이 초등의 아동에게 지도할때의 장점이다. 첫째, 선행수학 지식이나 복잡한 수학적 기호 없이도 쉽게 문제에 접근할 수 있다. 도형의 연결관계에만 주목하므로 도형의 성질이나 정의가 없이도 접근이 가능하다. 둘째, 수의 조작이 아니라 그림을 통한 사고를 할 수 있으므로 훨씬 초등의 아동이 접근하기 쉽고, 자발적인 시도를 유도할 수 있다. 셋째, 고등학교과정에서 들어가는 이산수학을 초등화하여 가르침으로써 자연스러운 학습과정연결이 일어난다. 이에 이산수학의 그래프를 통한 논리와 추론의 접근을 제안한다. 이산수학의 그래프로 어떻게 논리와 추론을 가르칠 것인가? 초등 아동에게 간단한 소재로 논리와 추론을 도입해야 할 것이다. 가장 간단한 논리와 추론은 같냐, 다르냐는 것이다. 초등의 아동들에게 도형이 같은지 다른지 증명하는 과정인 합동을 가르치는 것은 그리 쉽지 않다. 합동 조건에 따라 연역적인 증명과정을 헤쳐나가야 하기 때문이다. 하지만 도형의 합동 대신에 주어진 두 그래프의 연결관계를 파악하여 같은지 다른지를 찾아나가는 그래프 동형의 문제는 선과 점을 움직여 탐구해 볼 수 있는 적절한 환경을 통해 초등의 아동들도 얼마든지 접근할 수 있다. 이러한 그래프의 동형문제를 탐구해나가는 과정을 통해 논리와 추론을 발전시켜나갈 수 있을 것이다. 그래프의 점의 개수, 선의 개수, 점과 선과의 관계, 색칠하기 문제 등등의 소재를 이용하여 추상적인 형태의 논리가 아닌 실제적 모델을 가지고 논리와 추론을 발달시켜나갈 수 있을 것이다.

논리와 추론을 위한 의미있는 문맥을 제공하는 다른 하나는 중등에서 다루는 도형과 그의 성질을 초등아동의 방법으로 탐구하는 것이다. 초등수준에서 증명의 전 단계로 도형의 성질을 연역적으로

받아들이고 이해하기 전에, 중간단계로 도형의 성질을 탐구하여 논리와 추론을 도입하는 방법이다. 이는 형식적이고 연역적인 증명에 의해 도형의 성질을 학습하는 대신에 초등의 사고 수준을 따르는 조작과 활동을 통해 도형의 성질을 자연스럽게 발견하고, 수용할 수 있는 조작 환경을 만들어 제공한다면 논리와 추론교육이 가능하다고 보는 것이다. 이때의 논리와 추론은 자신의 사고 과정에 따른 조작과 활동을 통해 직관적으로 이해할 수 있는 과정을 통해 이루어져야 한다.

2. 논리와 추론 교육을 위한 LOGO 기반 마이크로월드

전통 LOGO 마이크로월드를 떠올린다면 어떻게 논리와 추론을 LOGO로 가르칠 수 있을지 의아해 할 것이다. 물론 수학적 언어로된 프로그래밍 언어로서 논리와 추론이 가능할 수는 있지만, 어떻게 LOGO 마이크로월드가 앞에서 언급한 이산수학의 그래프를 지원할 수 있을지 이해가 가지 않을 수도 있을 것이다. 발상의 전환이 필요하다.

1) LOGO 연구의 발달과정

LOGO 연구의 발달 과정을 살펴보면 어떻게 논리와 추론교육을 위한 LOGO 기반 마이크로월드가 가능한 지 알 수 있을 것이다. 이에 LOGO 연구의 발달과정을 초기, 중기, 현재 3시기로 나누어 살펴보기로 하자.

초기 연구에서는 많은 교육적 장점을 가진 LOGO에 대한 관심으로 수학학습과 관련한 많은 연구로 나타나게 된다. 하지만 이러한 수학학습과 관련한 초기의 LOGO연구는 한계에 부딪히게 된다. LOGO를 바뀌지 않는 절대적 환경으로 보고 그 테두리 안에서 수학학습을 논하는 연구는 제한적일 수밖에 없다. 초기 LOGO의 대표적인 수학학습을 위한 문제점을 크게 대수적 측면과 기하적 측면에서 다음과 같이 지적할 수 있다. 첫째, 대수적 측면에서 초기 LOGO의 비수학적인 표현들이 고수되었다는 점이다. LOGO는 비록 수학적 언어로 발생되었지만, 초기 문법에서 같은 수학적 개념에 대한 표현들이 수학과 일치하지 않는 문제을 가지고 있었다. 예를 들어 초기 LOGO에서 변수를 표현하기 위해 :x 와 같이 변수 앞에 :을 붙인 이유는 컴퓨터 성능의 문제 때문이지 수학적 의미는 전혀 고려되지 않은 것으로 굳이 고수할 필요가 없다. 그밖에도 함수표현이나 값을 대입하는 표현 등에서도 비수학적 표현들이 사용, 고수되었다. 다음의 표는 한글화 작업과 수학적으로 개선된 표현을 보여준다.

<표 1> 수학적 개선과 한글화

기존 LOGO	LOGO 기반 마이크로월드
FD :X	가자 X
RT :X, LT :X	돌자 X
TO-END	함수- 함수끝
MAKE "X 0	X=0
F :X :Y	F(X,Y)

둘째, 기하적 측면에서 거북기하는 학교 기하와는 다른 성격의 또다른 기하로 학교기하학습과 연결시키기 어렵다는 점이다. 거북기하는 유클리드 기하와 좌표기하로 대변되는 학교기하와는 전혀 다른 관점에서 다루어진다. 이에 LOGO를 가지고 학교기하를 가르치는 것은 무리가 따른다. 예를 들어 좌표기하와 거북기하의 비교에서 서로 다른 차이를 찾아볼 수 있다. 좌표 기하는 방정식을 통해 기하학적 도형을 다루고, 수치적 관계를 그래프로 기하를 다룬다면, 거북 기하는 가자와 돌자를 통해 평면상의 도형을 측정하는 친근한 방법으로 기하를 다룬게 된다. 다음은 거북기하와 좌표기하의 차이를 표로 나타낸 것이다.

<표 2> 거북기하와 좌표기하 비교

거북기하	좌표기하
intrinsic	extrinsic
국소적 접근(local)	전체적 접근(global)
과정적 기술	결과적 기술(방정식)

중기 연구에서는 초기 연구의 한계로 초기 수학학습과 연계된 LOGO 연구는 줄어들게 되고, 대신 LOGO를 통한 교육학적 입장에서 일반적인 교육적 문제(문제해결, 메타인지, 오류 등등)에 대한 연구가 많이 이루어졌다.(Clements, D.H, 1991; Kramarski, B. and Mevarech, Z. R 1997; Lowenthal, F., Marcourt, C. and Solimando, C. 1998; Kapa, E. 1999) 하지만 컴퓨터의 발달로 도스용 LOGO에서 윈도우용 LOGO가 가능해지고, 앞서 제기한 문제점들을 자각하게 되면서 수학학습에 효과적으로 LOGO 마이크로월드를 이용하기 위한 노력들로 새로운 방향의 LOGO 연구가 시작되었다.

현재 연구에서는 보다 수학 학습을 위해 LOGO를 발전, 진화시켜 나가는 방향의 연구들이 진행되고 있다. Hoyles(1985)는 이를 다음과 같이 표현한다.;발생적 형태인 LOGO 마이크로월드의 아이디어를 수용하나, 구체적인 수학 개념들에 대한 학습 경험에 초점을 맞추기 위해 몇 가지 편리를 위한 기능을 추가하고 다른 것들을 잘라내어 거의 끝이 없는 다양한 구조들이 LOGO 위에 보강되어질 수 있다. 이는 전통 LOGO 마이크로월드의 기본 아이디어를 이어가면서 학교 수학과 연계될 수 있도록 진화와 발전시켜나간다는 것이다.[8] 1980년대 이래로 영국의 런던 대학에서 이루어지고 있는 LOGO 연구는 이러한 LOGO 마이크로월드의 진화와 발전의 선두에 서고 있다. 1980년대 수학 학습에 LOGO를 이용한 아동과 교사가 함께 참여하는 연구프로그램[9]으로부터 학교 수학학습을 위한 LOGO 마이크로월드로 변화가 일어나게 된다. 런던 대학에서 발전된 마이크로월드는 이러한 생각을 기반으로, 아동의 특정한 수학 개념 학습을 돕도록 새로운 절차들을 만들어 이용할 수 있는 LOGO기반 마이크로월드라고 할 수 있다. 중요한 것은 마이크로월드가 반드시 LOGO 프로그래밍, LOGO 코드의 수정, LOGO와의 상호작용을 포함하는 것은 아니라는 것이다.

---

8) Maddux, M.L & Johnson, D.L. (1988)
9) LOGO MATHS PROJECT

이러한 연구변화의 대표적인 예이다. 기하적 관점에서 LOGO 연구는 거북기하가 학교기하와의 차이로 LOGO를 통한 기하와 학교에서 나온 아이디어를 종합하지 못해 많은 변화를 보이게 된다. 이에 LOGO를 학교 기하와 접목하기 위해 유클리드 기하나 좌표기하와 같은 서로 다른 기하 체계의 성질들을 표현하는 것이 가능하도록 intrinsic 하지 않은 새로운 기능을 LOGO에 보강하여 학습 환경을 만든 후 연구를 수행하게 된다. 다음의 연구는 유클리드 기하와 좌표기하의 성질들을 LOGO가 표현하도록 어떻게 기능을 보강하는지 보여 주고자 대표적인 예로 든 것이다. 이 연구는 학교에서 기하는 연역적인 방법으로 다루어져 아동의 귀납적 사고 참여의 기회를 갖지 못한다는 문제의식에서 시작한다. 학교에서와 같은 엄밀한 연역체계로 기하를 접근하는 것은 아동에게 별로 흥미롭지 않으며, 학교 수학에서 귀납적 사고에 참여하는 기회가 적다는 점을 감안한다면 LOGO에서의 학교기하의 접근은 좋은 접근방법이 된다고 보았다. 이에 LOGO에서 아동들이 얼마나 기하학적 이해를 귀납적인 방법으로 개발할 수 있는가? 와 과연 아동의 거북의 움직임을 통해 어떤 종류의 기하를 학습할 수 있는지를 밝히고자 하였다. 이에 거북기하에 유클리드 기하, 좌표 기하의 표현이 가능하도록 새로운 기능을 추가한 마이크로월드를 설계한 후 실험연구를 진행하였다. 그 결과 무엇보다 거북기하의 intrinsic한 면과 좌표기하와 유클리드 기하는 서로 상호 보완해주는 기하학습이 일어났음을 보여주었다. 다음은 거북이를 통해 좌표기하와 유클리드 기하를 학습하기 위해 어떻게 기능이 보강되는지 명령어 중심으로 예를 든 것이다.

<표 3> 좌표기하에서의 거북

명령어	
SETH, SETPOS, SET TOWORDS	절대적 방향이나 위치를 기술하여 거북이의 상태를 변화하게 한다.
DIRECTION	거북의 현재 상태로부터 좌표 평면에 있는 점까지의 각을 측정한다.
DISTANCE	거북의 현재상태로부터 좌표평면에 있는 점까지의 거리를 측정한다.

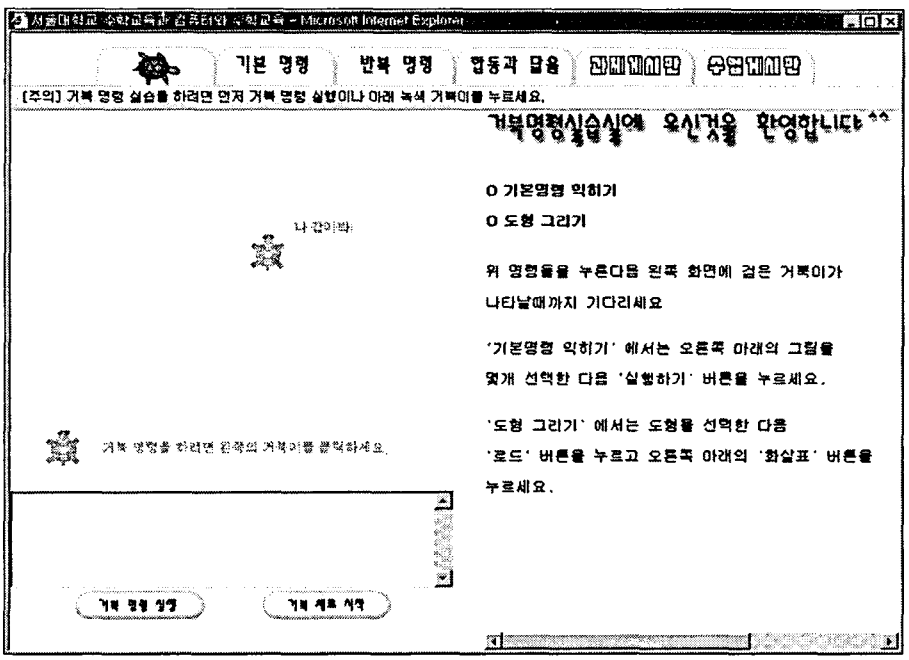
<표 4> 유클리드 기하에서의 거북

명령어	
Post"name	현재의 거북이의 위치를 십자가로 표시하고 그 옆에 입력한 이름을 나타낸다.
Distance;name	현재 거북이과 주어진 이름이 있는 위치 사이의 거리를 잰다.
Direction;name	현재 거북이와 주어진 이름이 있는 위치사이의 각을 잰다.

이렇게 LOGO 연구의 발달 과정은 수학학습을 위해 보다 효과적인 마이크로월드를 설계해서 아동들에게 제공하는 과정이라고 할 수 있다. 이러한 연구발달과정에서 알 수 있듯 기술공학을 활용한 수학교육에서 조심해야 하는 것이 소프트웨어를 위한 수학교육이 되어서는 안된다는 것이다. 즉 필요한 수학 학습을 위해서 적절한 소프트웨어를 개발, 이용해서 학습 효과를 증진시켜야 한다는 것이다.

2) LOGO 기반 마이크로월드 소개

LOGO 기반 마이크로월드는 고정된 소프트웨어 환경이 아니라 기존의 LOGO를 진화 발전시켜 논리와 추론 학습을 위해 필요한 요소들을 설계하여 만든 교수-학습 환경이라고 할 수 있다. 이러한 연구 경향에 따라 설계하는 논리와 추론 학습이 가능한 LOGO 기반 마이크로월드는 수학 학습 주제에 따라 필요한 기능이 컴포넌트개념으로 들어가 있는 다양한 내용의 수학적 탐구가 가능한 환경이다. 이는이전에 발표한 학습 주제에 따른 LOGO 기반 마이크로월드와 서로 다른 것이 아니라 컴포넌트 형태로 모두 들어가 하나의 환경에서 많은 학습 주제들의 탐구가 다양한 방법으로 가능하다는 것을 의미한다. 이에 본고에서는 수학 다양한 학습 주제에 필요한 기능보강과 함께 아동에게 보다 친근한 환경으로 논리와 추론을 위한 마이크로월드가 컴포넌트로 들어간 LOGO 기반 마이크로월드로 설계하였다. 다음은 에듀넷에 있는 LOGO 기반 마이크로월드인 거북명령실습실의 화면이다.



<그림 1> LOGO 기반 마이크로월드 화면

논리와 추론 교육에 LOGO 마이크로월드는 다음과 같은 컴퓨터 언어측면, 수학으로는 대수적측면, 기하적 측면 세측면에서에서 알맞은 환경이라고 할수 있다. 첫째, LOGO 기반 마이크로월드는 본질적으로 프로그래밍 언어로된 환경이다. 프로그래밍 활동은 기본적으로 문제해결을 위한 알고리즘을 구성하는 과정이 논리적 사고와 추론에 의해 이루어진다고 할 수 잇다. 이에 LOGO에서의 프로그래밍 활동 자체가 일반적인 논리와 추론 능력에 기여할 수 있다고 할 수 있다.

둘째, 대수적 관점에서 LOGO 기반 마이크로월드는 수학적 성장과정에서의 인지적 갈등을 줄여줄 수 있다. 앞에서 지적했듯이 대수적 대수적 사고 성장과정에서 아동이 겪는 인지적 갈등은 연역적이고 형식적인 사고가 필요한 추상적인 상징의 수용과 이용문제이다. LOGO는 수학적 언어로서 학생들이 문제해결을 위해 자신사고과정을 논리적으로 기술하는 가운데 관계들을 일반화하기 위해 상징을 자연스럽게 받아들이고 이용함으로써 추상적인 상징을 의미 있게 학습할 수 있는 방법을 제공한다는 점에서 본질적으로 대수 지도에 효과적 환경이라고 할 수 있다. 이러한 논의는 LOGO와 대수학습에 관한 많은 연구결과들로 뒷받침될 수 있다. LOGO는 학교 대수와 직접적인 연결이 많이 이루어져 있었기에 진화와 발전에서 변화가 적었던 부분이기도 한다. 이에 LOGO는 산술적 사고에서 대수적 사고로 넘어가는데 겪는 많은 인지적 갈등들의 원인이 상징의 이용과 수용문제를 효과적으로 해결해줄 수 있는 환경이다.

셋째, 기하적 관점에서 LOGO 기반 마이크로월드는 논리와 추론 교육을 위해 발전 진화시켜 효과적인 교수-학습 환경으로 만들 수 있다. 물론 거북기하를 통해 아동들이 사고과정을 기술하는 과정을 통해 도형을 탐구하는 활동이 논리와 추론 발달에 기여할 수 있다. 하지만 기하적 측면에서 논리와 추론교육을 통해 중학 기하의 연역적, 형식적 증명도입의 문제를 해결하고자 한다면 거북기하로 이러한 학교 기하를 다루기에는 적절치 않은 부분이 있다. 문제는 기하적 관점에서 사고력 신장을 위해 논리와 추론을 위한 LOGO 마이크로월드를 어떻게 설계하느냐는 것이다.

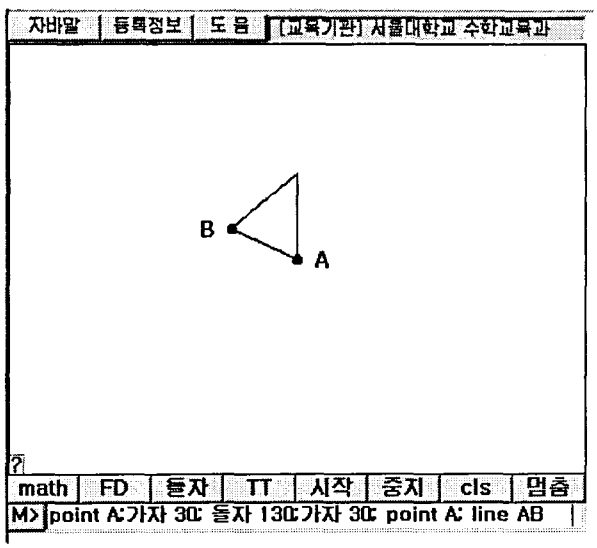
3)논리와 추론을 위한 LOGO 마이크로월드의 설계

LOGO 마이크로월드가 어떻게 설계되었는지 살펴보기로 한다. LOGO 기반 마이크로월드는 이번 연구를 위해 새로이 만들어진 것이 아니라는 점을 밝힌다. 앞에서 밝혔듯이 LOGO는 전통적인 LOGO의 아이디어를 이어가면서, 수학학습을 위해 발전, 진화시켜 왔다. 본 연구에서의 LOGO 기반 마이크로월드는 수학학습을 위해 만들어져 사용되고, 이를 실험연구를 통해 검증해나가는 과정을 통해 수학적 내용이 풍부하게 담겨가도록 개선해나가는 과정에 있다. 그리하여 여러 수학학습 주제를 다룰 수 있도록 컴포넌트개념의 마이크로월드들이 그 안에 담겨 있다. 이에 설계 방향을 크게 세 가지로 나누어 설명하기로 한다.

첫째, 수학과 관련해서 전통 LOGO를 가지고 수학학습을 해나가는데 발생하는 문제점들을 개선하고자 하였다. 둘째, 보다 아동의 기호에 맞는 마이크로월드가 되어야 한다. 마이크로월드는 능동적인 아동의 참여와 활동을 바탕으로 이루어진다는 점에서 효과적으로 동기를 유발하고, 유지시킬 수 있도록 노력하고자 하였다. 셋째, LOGO를 통한 학습을 효과적으로 지원할 수 있는 교수-학습 환경을 함께 설계해야 한다. LOGO의 기능적인 면의 개선도 중요하지만 효과적으로 교수-학습에 사용하기 위한 노력도 함께 필요하다. 이러한 설계방향을 반영하여 논리와 추론 학습이 가능하도록 설계한 LOGO 기반 마이크로월드의 특징을 살펴보기로 한다. 기본적인 수학적 탐구환경으로서 LOGO가 가지는 본질적인 문제점들이 어떻게 해결하고, 논리와 추론 학습을 위한 LOGO에서의 다른 구체적 변화들에 주목하고, 아동 친화적인 환경요구가 어떻게 반영되는가를 중심으로 논의한다.

첫째, 제일 먼저 수학과 LOGO 문법사이에 일치하지 않는 수학적 표현을 개선하고, LOGO 문법을 한글화하였다. 수학과 LOGO 문법사이의 일치하지 않는 수학적 표현의 문제는 LOGO로 수학학습을 할 때 가장 기본이 되는 문제이다. 또한 기존의 영어로된 LOGO 문법을 아동들이 쉽게 이해할 수 있도록한 한글화는 LOGO를 교수-학습에 이용하기 위해서 제일 먼저 필요한 작업이다. 이러한 수학적 개선과 한글화를 통해 아동들은 LOGO 기반 마이크로월드에서 수학적 언어로 수학적 의사소통을 원활히 할 수 있는 기회를 갖게 되는 것이다. 이는 논리와 추론을 위해 LOGO 기반 마이크로월드를 사용하는데 기본이 된다. 수학적 개선과 한글화의 예는 앞에서 제시한 <표 1>를 통해 볼 수 있다.

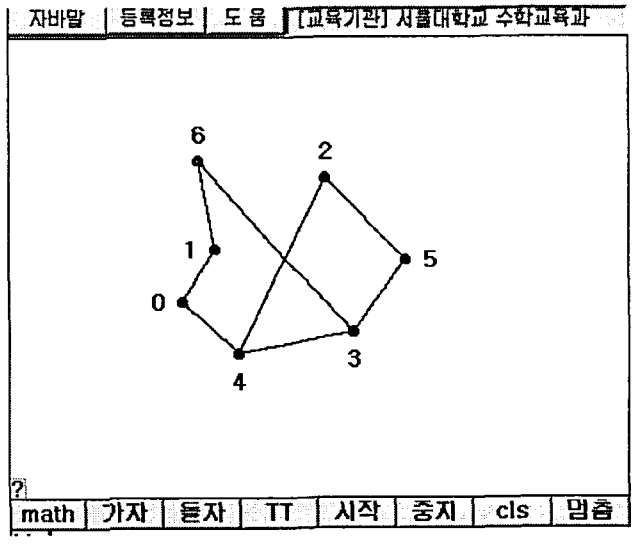
둘째, 거북의 움직임으로 좌표기하와 유클리드 기하가 탐구 가능하도록 기존 LOGO명령어체계를 확장시켰다. 거북기하는 좌표기하와 유클리드 기하와는 완전히 다른 기하여서 학교기하를 지원하기에 무리가 있기 때문에 학교 기하와 접목시키기 위한 노력이 필요하다. 이에 거북 움직임으로 유클리드 기하와 좌표기하가 가능하도록 필요한 명령들을 만들어 활동에 사용할 수 있도록 하였다. 학교 수학에서 논리와 추론을 발달시켜 문제가 되는 유클리드 기하의 증명지도를 위해서 이러한 기능은 기본적으로 갖추어져야 한다. 특히, 이러한 기능은 언급한 초등의 아동들이 활동과 조작을 통해 도형의 성질을 탐구하는 중간단계로 논리와 추론교육에서 특히 필요하다고 할 수 있다. 명령어체계의 확장 과정은 자연스럽게 이루어진다. 예를 들어 유클리드 기하를 지원하기 위해 필요한 대표적인 기능이 거리와 각을 잴 수 있고, 이에 따라 그림을 그릴 수 있어야 한다. 또한 기본적인 작도가 가능해야 한다. 이러한 기능들은 아동들이 유클리드 기하 도형의 성질들을 탐구하려면 LOGO 활동과정에서 자연스럽게 필요하게 된다. 다음은 선 명령의 예를 든 것이다. 이등변삼각형을 그릴 때, LOGO 마이크로월드에서는 정다각형을 그리기는 용이하지만 임의의 이등변 삼각형을 그리는데는 어려움을 겪는다. 초등의 아동들이 거북 명령을 통해 두변의 길이가 같도록 삼각형을 만들어가는 과정에서 나머지 한 변의 길이를 알기 어렵기 때문이다. 이때, 점과 점을 이어주는 선(line)명령이 있거나, 마우스를 이용해 바로 선을 연결해 줄 수 있어야 아동이 머릿속에서 하는 사고과정을 자연스럽게 조작과 활동에 반영할 수 있게 되는 것이다. 다음 그림은 이등변 삼각형의 나머지 한변을 두점을 잇는 선 명령을 통해 해결하는 것을 보여준다.



<그림 2> line 명령

셋째, 시각적 측면에서 다양한 색상처리기능과 움직이는 기하가 가능하도록 동적 기하 시스템

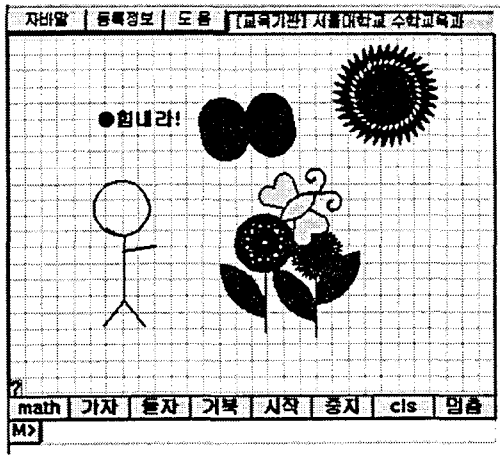
(DGS)기능을 보강하였다. 보다 아동 친화적인 환경을 제공한다는 측면과 LOGO에서 효과적인 수학학습을 위한 기능을 제공한다는 두 측면 모두에서 필요한 기능이다. 아동친화적환경을 제공한다는 측면에서 기존의 LOGO는 시각적 측면에서 딱딱하고 정적이어서 아동의 관심과 호기심을 자극하여 동기를 유발한다는 측면에서 효과적이지 못하다. 다양한 색상처리와 움직이는 기하기능으로 인한 시각적 효과의 증진은 기존의 정적인 LOGO 활동을 보다 동적인 활동으로 변화시켜 아동들의 동기 유발과 주의 환기, 학습 활동 유지에 도움을 준다.



<그림 3> 움직이는 기하로 그래프 그리기

또한 초등 아동은 기존의 LOGO 명령문체계가 아닌 그림을 통해 아동의 수준에 맞는 활동과 조작을 할 수 있다. 어린 아동에게는 딱딱한 LOGO의 명령문체계보다는 그림 위에서 이루어지는 마우스 조작과 활동을 통해 탐구하는 방법이 효과적일 것이다. 대표적인 예로 미국 NCTM에서 유치원과정의 아동대상으로 만든 LOGO 환경은 거북이 대신에 예쁜 무당벌레와 명령문이 아닌 마우스로 버튼을 조작하여 LOGO 활동을 하도록 설계한 것을 들 수 있다. 효과적인 수학학습 측면에서는 보면 LOGO로 수학학습을 하는 과정에서 명령문체계로 접근하기 보다는 그림의 조작을 통해 해결하는 것이 효과적인 상황이 있기 때문이다. 대표적인 예가 이산수학의 그래프라고 할 수 있다. 이산수학의 그래프를 통한 논리와 추론교육을 위해 무엇보다 필요한 기능이 바로 움직이는 기하 기능이다. 명령문체계로 된 LOGO로 점과 선을 연결하여 연결관계에 주목해야 하는 그래프를 명령문으로 그리는 것은 시간 낭비라고 할 수 있다. 그래프 탐구를 위해 기존의 원하는 그림을 명령문을 이용해 그리는 대신에 마우스를 사용하고, 화면에 나타난 점과 선을 움직이고 이에 따라 도형의 연결관계를 파악하는 것이 필요하다. 또한 초등 5,6학년 아동에게 그래프 동형에 대한 탐구를 통해 논리와 추론에 접근할 때 그래프를 움직여봄으로서 직접 탐구해보는 활동이 필수적이다. 이에 움직이는 기하는 이산수학의 그래프를 탐구하는데 기본적인 기능이다. 실제 움직이는 기하의 대표적인 소프트웨어인 GSP는 원래 그래프를 그리는 소프트웨어 개발과정에서 나온 기하소프트웨어이다. LOGO 기반 마이크월드위에서 그래프를 탐구하는 것은 하나의 인터넷 기반 조작도구의 기능까지 갖추도록 한 것으로 보다 풍부한 수학적 환경으로 발전 진화하는 대표적인 예라고 할 수 있다. 다음은 전통적이 LOGO 명령문체계가 아닌 마우스를 통해 점과 선을 연결하고 움직이는 동적 기하 시스템기능을 보여주는 예이다.

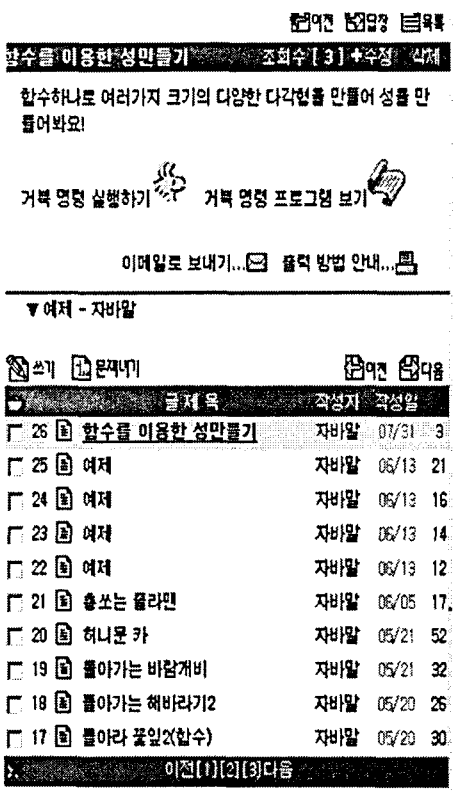
넷째, 초등 수학에서 많이 등장하는 타일을 직접 만들고, 움직이는 것이 가능하도록 필요한 명령을 보강하였다. 이러한 타일 만들기와 움직이기는 아동에게 많은 흥미를 불러일으키는 활동이 될 수 있다. 이러한 타일만들기와 조작이 가능하도록 한 것은 초등의 아동들이 수업시간에 사용하는 조작도구로서의 타일을 인터넷상에 단순히 옮겨 놓은 것이 아니다. 예를 들어 LOGO 기반 마이크로월드에서 초등에 필요한 타일을 직접 만들어 테셀레이션을 할 수도 있지만, 학교기하를 연역적으로 학습하게 전에 중간단계로 도형의 성질을 초등의 아동이 조작과 활동을 통해 탐구하는데 이용할 수도 있다. 예를 들어, 초등의 아동들이 이등변 삼각형의 성질을 탐구하는 방법으로 종이 접기를 생각할 수 있다. 하지만 종이접기 과정은 활동으로 끝날 수 있다. 이러한 종이 접기 과정의 수학적인 의미를 아동들이 알아채기란 쉽지 않다. 예를 들어 종이를 반으로 접는 것이 각의 이등분선을 긋는다는 것을 아동들이 알아낼 수 있을까? 이럴 때 종이 접기 과정을 LOGO로 아동들이 할 수 있다면 아동들은 삼각형을 반으로 접으려면 각을 반으로 자르는 선을 그어야 한다는 필요에 의해 각을 의식하여 명령이나 마우스 조작을 통해 각을 반으로 자른 선을 그리게 된다. 그 과정에서 아동들은 자연스럽게 보조선의 의미를 알게 될 것이다. 이렇게 선을 그었다면 타일만들기를 통해 만들어진 두 삼각형을 포개어 과연 두 밑각에 해당하는 각이 같은지 타일을 움직여 두 삼각형 타일을 겹치도록 하여 이등변 삼각형의 두 밑각의 크기가 같다는 것을 발견하도록 할 수 있다. 마치 종이 접기를 하듯 아동이 자신의 사고 과정에 따라 필요한 이등변 삼각형을 만들고 반으로 잘라 타일이 겹치도록 조작하여 각이 같다는 사실을 자연스럽게 발견하는데 이용할 수 있는 예를 들것이다. 부르너의 EIS이론에 따르면 다양한 수학적 표현을 제시하면 아동은 지적발달단계에 맞는 지식표현형태를 통해 효과적인 학습을 할수 있다. 이에 LOGO에서의 종이접기 활동과 거북이가 그리는 그림, 자신의 활동과정의 상징적 기술을 통해 아동은 그 안에 담긴 수학적 의미를 발견하는데 다른 방법들보다 우위에 있다고 할 수 있다. 다음의 그림은 실험 수업을 통해 LOGO 기반 마이크로월드에서 아동이 타일만들기와 움직이기를 통해 만든 작품이다. 프로젝트과제로 아동이 자유롭게 주제를 택하여 만든 작품이다. 많은 시간을 요하고 사고과정에 집중이 필요한 작품을 스스로 주제를 잡아 타일의 특성을 잘 살려 완성하였다. 이 과정에서 선생님은 관찰자로 처음부터 끝까지 아동들은 흥미를 잃지 않고 열심히 참여했다는 점에서 예로 든 것이다.



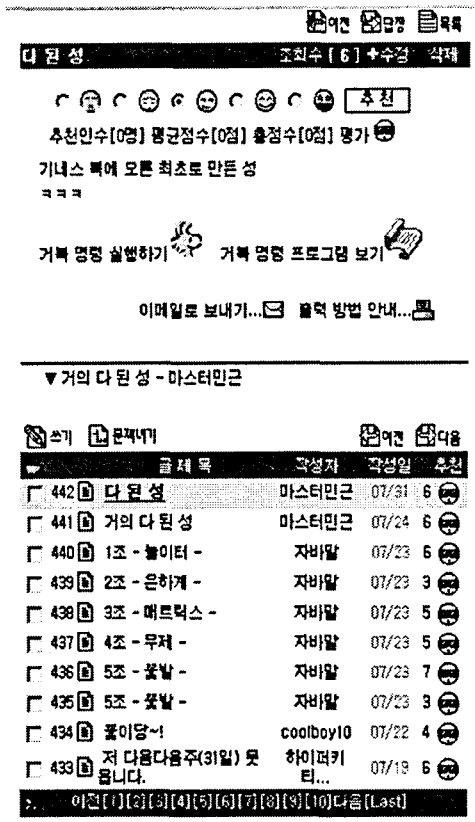
<그림 4> 제목: 꽃밭

다섯째, 웹을 통해 언제든 접근이 가능하고, ON-LINE에서도 교수-학습이 일어날 수 있도록 컴퓨터 매개 통신 수단을 적극 활용하였다. 학교에서와 가정에서, 기타 다른 장소에서 교사와 학생을 위

한 교수-학습 환경이 되도록 시간과 공간의 제약을 받지 않고 언제든 들어와 이용할 수 있도록 웹상에 홈페이지를 만들어 운영하도록 하였다. 또한 on-line을 통해서 교사간, 학생간 수학적 의사소통이 원활히 일어날 수 있도록 게시판과 메일 등 통신이 자유롭도록 설계하였다. 이러한 의사소통을 통해 아동들은 정보를 공유, 교환하여 학습에 이용하게 된다. 다음과 같이 수업게시판을 적절히 활용하여 수업 내용을 도입하고, 과제게시판을 통해 아동들의 과제를 만들어 제출하고, 이를 아동간, 교사-학생간에 수학적 의사소통의 매개로 이용하여, on-line을 통해 또다른 학습을 기대할 수 있다.



<그림 5> 수업게시판



<그림 6> 과제게시판

위와 같이 설계한 논리와 추론을 위한 LOGO 기반 마이크로월드는 에듀넷을 통해 거북명령실습실에서 만날 수 있다.

Ⅲ. 결론 및 제언

본고에서의 수학적 사고의 성장과정과 학교교육에서 이루어지는 증명지도의 문제에 주목하여 수

학적 사고력의 신장을 위해 가장 필요한 것이 논리와 추론 교육이라고 보았다. 이러한 논리와 추론 교육에 대한 교육 내용으로 다음의 두가지를 제안하였다. 하나는 중학 기하와는 다른 교육 내용을 다룬다는 측면에서 증명 도입이전인 초등학교 5,6학년 시기에 아동들의 지적 발달 수준을 고려해 이산수학의 그래프 탐구를 통해 논리와 추론교육에 접근하는 것이다. 다른 하나는 중학 기하와는 다른 교육방법으로 접근한다는 측면에서 초등의 조작과 활동을 통해 기하 도형 탐구를 통해 중간단계를 갖자는 것이다. 논리와 추론 교육을 위한 교육방법으로는 효과적인 개념장으로써 LOGO 기반 마이크로월드를 설계하고 제안하였다. 이러한 LOGO 기반 마이크로월드는 새로이 만들어진 것이라기 보다는 기존의 LOGO에서 출발하여 수학학습을 위해 진화 발전시켜 나가는 과정에 있는 것이다.

LOGO 기반 마이크로월드를 통한 논리와 추론 교육를 얼마나 논리와 추론 능력을 향상시키는가로 평가하는 것도 중요하지만 학습 환경의 개선이라는 측면에서 평가하는 것도 의미가 있다. 논리와 추론의 도입이 고등학교 집합과 명제단원에서 형식 논리로 도입되는 하나의 방법만이 아니라, 다른 학습 내용과 방법으로 논리와 추론을 도입할 수 있다는 새로운 시도라는 부분에 대한 평가도 이루어져야 할 것이다. 여기서 제안한 내용들을 토대로 논리와 추론을 위한 교육과정을 만들어 과정을 통해 아이디어를 구체화시키는 작업은 실제적이지만 상당히 많은 시간과 노력이 필요하다. 이러한 작업을 통해 LOGO 기반 마이크로월드에 대한 논리와 추론을 위한 가능성을 실험을 통해 검증해야 할 것이다.

참 고 문 헌

박성익 외 (200). 교육방법의 교육공학적 이해, 교육과학사.

조한혁 외 (2002). 인터넷 상의 조작도구를 이용한 수학교육 프로그램의 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **13**.

서동엽 (1999), 중학교 학생의 증명 능력 분석, 대한 수학교육학회지 수학교육 연구 **9(1)**.

김민경 · 노선숙 (2001). 수학교육현장에서 교육 정보화의 현황과 과제, 대한수학교육학회지 <학교수학> **3(1)**.

류희찬역, 고등수학적 사고, 대한 수학교육학회 제 18회 수학교육학 세미나.

David Tall (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS

Abelson, H. & DiSessa, A. (1980). *Turtle Geometry*, MIT Press, Cambridge, Messachusetts.

Clements, D.H. (1991) Enhancement of creativity in computer environments, *American Educational Research Journal* **28**, pp173-188.

Kapa, E. (1999) 'Problem solving, planning ability and sharing processes with LOGO', *Journal of Computer Assisted Learning* **15**, pp.73-84.

Kramarski, B. & Mevarech, Z.R (1997) 'Cognitive-metacognitive training within a problem-solving

based Logo environment', *British Journal of rducational psychology* **67(4)**.

Krutetskii, V.A (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*, The University of Chicago Press.

Lowenthal, F.; Marcourt, C. & Solimando, C. (1998) 'Cognitive strategies observed during problem solving with LOGO, *Journal of Computer Assisted Learning* **14**, pp.130-139.

Maddux, M.L & Johnson, D.L. (1988) *LOGO: Method and Curriculum for teachers*, The Haworth Press

Papert, S. (1980) *Mindstorm : Children, Computers and Powerful Idea*. New York, Basic Books.

Subni, T. (1999) 'The impact of LOGO on gifted children's achievement and creativity', *Journal of Computer Assisted Learning* **15**, pp.98-108.

Celia Hoyles and Richard Noss (1992). *Learning Mathematics and Logo*.

Clements, D.H (1999). Concrete Manipulatives, Concrete Ideas, *Contemporary Issues in Early Childhood* **1(1)**.