

Tess를 이용한 교수·학습에서 변환지도에 대한 사례연구 -부진아를 대상으로-

고 상 숙 (단국대학교)

홍 석 만 (단국대학교 대학원)

칠판과 분필만을 이용한 증명 위주의 기하 수업을 탈피하여 현장에서 사용할 수 있는 능동적인 교수·학습에 한가지 방법을 제시하고자 수학에 자신감이 없는 고등학교 1학년 학습 부진아를 대상으로 컴퓨터 프로그램, Tess를 이용하여 학생의 변환 개념에 대한 이해도를 조사하였다. 또한, 테셀레이션을 직접 만들어 가는 과정을 통하여 타 교과와의 수학적 연결성을 이해하고, 수학의 실용성과 실생활과의 연관성, 도형의 아름다움을 학생이 스스로 찾고, 발견하는데 초점을 두었다. 우리의 전통 문양도 수학교육에 충분히 이용될 수 있다는 사실을 확인할 수 있었고, 학생의 수학에 대한 태도가 크게 향상됨을 알 수 있었다.

I. 서론

이상원(2000)에 의하면 학습 부진에 관련된 선행 연구들을 학습 부진 학생들에게 적당한 학습경험을 제공하게 되면 인지적, 정서적 측면의 능력을 향상시켜 줄 수 있고 학습을 성공적으로 이끌어 갈 수 있다는 결론을 제시하고 있다.

교사는 학습지도할 때 학생들로 하여금 학습 의욕을 일으키게 하기 위한 학습 동기의 부여와 기초지식이 중요하므로 이러한 점을 충분히 유의하고 학습의욕이 저하될 기본적인 원인과 동기가 무엇이며 동기에 한층 자극을 이를 주어서 만족할 수 있는 조건이 무엇인가 분석하고 이를 제거시키는 것이 중요하다.

본 연구에서 사용하는 학습부진아에 대한 개념의 유형은 다음과 같다.

(1) 한국 교육 개발원(1984)

“학습 부진이란 정상적인 학교 학습을 할 수 있는 잠재 능력이 있으면서도 선수적 학습 요소의 결손으로 인하여, 설정된 교육 목표에 비추어 볼 때 수락할 수 있는 최저 학업 성취 수준에 도달하지 못한 학습자”를 뜻하기로 한다.

2) 이화여대 인간발달연구소(1992)

학습 부진아 : 지능은 보통이나 다른 어떤 요인에 의하여 학습가능성 만큼 학습을 성취하지 못하고 있는 학생

학습에서 어려움을 겪는 학습 부진아에게 우리 주위에서 찾을 수 있는 많은 아름다운 문양을 이용한 수업으로 수학의 아름다움을 느끼도록 하여 자연스럽게 수학에 관한 흥미를 이끌어준다면 충분히 많은 효과를 기대할 수 있을 것이다.

기하학은 흥미를 제공하고 단순한 계산의 틀에서 벗어날 수 있게 해주어 학생들이 수학에 관심을 가질 수 있도록 도와준다. 따라서 수학을 틀에 박히고 지루한 것이라고 여기거나 학문적인 능력이 부족한 학생들이, 기하학 영역을 배울 때는, 재치와 열정을 보일 수도 있다 (Hatfield, et al., 1993).

수학적 개념이 생활적인 경험과 학교 안팎에서 연결될 때, 학생들은 엄청나게 많은 개별적 개념과 기능을 배우고 암기하는 대신, 몇 개의 영역에 관련된 일반적인 원리를 알 수 있으며, 수학의 유용성을 인식하게 되고, 수학이란 ‘단지 학교에서만 행해지는 학문적인 훈련이며 학교 밖의 문제를 해결하는 것과는 관계가 없다’는 생각을 해소시킬 수 있을 것이다. 수학적 연결성(Mathematical connection)이란, 초등이나 중등 교육과정의 다른 주제영역에서 수학적 개념의 통합을 의미하며 이는 수학에서 다른 내용들 사이의 관계(수학 내적 연결성)를 인식하거나 수학과 다른 교육과정, 그리고 다른 학문과의 관계(수학 외적 연결성)를 인식하는 것이다(NCTM, 1989).

수학적 연결성을 위한 한가지 방법으로서 테셀레이션을 이용할 수 있는데, 채희진 외 8인(1999)에 의하면 테셀레이션을 만들어 보는 활동 과정을 통해 자연스럽게 기하에 관한 수학적 개념을 학습할 수 있고, 수학적 사고력과 창의력을 키울 수 있다고 한다.

“학교수학의 교육과정과 평가규준”(NCTM, 1989)에서는 컴퓨터로 말미암아 우리의 사회가 기존의 산업 사회에서 정보화 사회라는 새로운 시대로 진입하게 되면서 수학적 소양의 중요성이 더욱 증대되었음을 지적하면서, 수학교육이 지향하여야 할 일반적인 목표로 다음과 같은 다섯 가지를 제시하고 있다. 학생들은 수학의 가치를 이해하여야 하며, 수학을 행하는 자신의 능력에 대한 확신을 가져야 하며, 수학문제의 해결자가 되어야 하며, 수학적으로 의사 소통하는 것을 배워야 하며, 수학적으로 추론하는 것을 배워야 한다는 것이다. 이러한 일반적인 목표를 성취하고 학생들의 ‘수학적인 힘’의 획득을 보장하기 위해서 특히 문제해결 능력의 개발을 중시하고, 수학적인 문제를 탐구하는 과정에서 계산기와 컴퓨터를 적절히 사용하도록 제안하고 있다.

컴퓨터의 다양한 기능 중에 시각화 기능은 추상적인 수학적 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐만 아니라, 그 시각화가 학생들이 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 준다는 장점이 있다.

송영준(2001)에 의하면 수학에서는 테셀레이션이라는 구체적인 모양 속에 숨어 있는 추상적인 구조를 보는 경험이 중요하다는 것이다. 즉, 반복되는 그 도형은 무엇이고, 그것이 어떤 식으로 반복되는가 하는 것을 밝혀 나가는 것이 수학에서 해야 할 일이라는 것이다. 테셀레이션으로 만들어진 그림이나 실제 모양 등을 감상하거나 그려보는 것은 미술에서 할 일이다. 따라서, 본 연구에서는 학습 부진아에게 활동 중심으로 합동 변환을 쉽고 능동적으로 학습할 수 있도록 주안점을 두었다.

다시 말하면 본 연구에서는 학습 부진아를 위한 능동적인 교수·학습에 한가지 방법으로서 컴퓨

터 프로그램을 이용한 능동적인 학습자료를 제공하여, 1) 학습 부진아가 변환 개념에 대한 직관적인 이해도와 용어를 정확하게 습득하도록 하고, 2) 테셀레이션을 만들어 가는 과정을 통하여 미술 교과와의 수학적 연결성을 부각시켜 수학의 실용성과 도형의 아름다움을 학생이 스스로 찾고, 발견하는데 초점을 두었다. 또한, 3) 우리의 전통 문양에서 사용된 여러 가지 변환을 학생에게 직접 찾아보도록 하여 우리의 전통의 것도 수학교육에 있어서 유용하게 사용될 수 있다는 사실로 학습 부진아에게 자신감을 주어서 앞으로 수학에 대한 학습 태도를 향상하는데 도움을 주도록 하였다.

II. 이론적 배경

A. Polya의 문제해결 교육론

Polya(1954)는 발견술에 대한 연구와 자신의 수학하는 경험을 토대로 문제에 대한 이해, 해결 계획의 작성, 계획의 실행, 반성의 네 단계로 이루어진 질문과 권고형태의 대화법을 통한 체계적인 문제 해결 방법을 제시한다. 분석법, 단순화, 유추, 패턴 찾기, 대칭성에 주목하기, 극단적인 경우 고려하기, 보조문제 고려하기 등 사고전략을 강조하고 있다. 그 결과로 스스로 활동하여 발견하게 하는 학습-지도, 추측하고 발표하게 하는 학습-지도, 탐구단계, 형식화 단계, 동화단계를 거치는 학습-지도를 통해 학생 스스로 생각하면서 배우는 수학교육을 할 것을 제안한다.

Polya의 현대적 발견술의 바탕에 있는 사고전략을 정리해 보면 다음과 같다.

① 문제에 대한 이해 : 목표에 주의를 집중하기, 문제의 주요 부분에 주목하기, 조건에 주목하여 문제를 조망해 보기, 그림을 그리고 적절한 기호를 붙이기, 조건을 분해하여 써보기

② 계획의 작성 : 관련된 지식을 동원하기, 유용한 패턴 찾아보기, 관련된 문제나 정리를 알아보기, 미지인 것이나 결론이 같거나 유사한 문제를 생각해보기, 관련된 문제의 풀이 결과와 방법을 활용하기 및 보조요소를 도입하여 그것을 활용하기, 문제를 달리 진술해 보기, 정의를 뒤집어 보기, 보다 단순한 문제, 보다 일반적인 문제, 보다 특수한 문제, 유사한 문제 등 관련된 문제를 풀어보기, 미지인 것과 조건 및 자료를 변형하여 보조문제를 작성하여 문제를 부분적으로 해결해 보기, 진척이 없을 때, 상황을 재평가하기, 자료 조건, 핵심적인 개념의 사용 여부 점검하기

③ 계획의 실행 : 매 단계를 점검하면서 풀어나가기

④ 반성 : 풀이 결과와 논증과정을 점검하기, 다른 풀이방법을 알아보기, 일별해 보기, 풀이 결과나 방법을 활용할 수 있는 문제를 찾아보기

특히, Polya는 반성단계의 중요성을 강조하고 있는데, 이는 풀이과정과 결과를 개관하고 음미해 봄으로써 오류를 발견·수정하고 문제풀이를 개선할 수 있으며, 다른 문제와의 관련성을 조사하고 적용 가능성을 생각해 보는 가운데 획득한 지식이 견고히 되고 풀이과정이 단순화되어 한눈에 알 수 있게 됨으로써 그 내적 바탕이 인식되고 사고양식화 되어 문제를 해결하는 능력을 발달시키는 데 매우 중요한 단계가 된다고 보기 때문이다.

B. 시각화와 수학교육

Steen(1988)은 수학을 패턴(pattern)의 과학으로 설명하고 있다. 수학자는 수와 공간에서 패턴을 구한다. 패턴을 사용하여 새로운 패턴이나 패턴의 패턴들을 만들어 낸다. 수학적 이론은 패턴들 사이의 관계이며, 수학의 응용은 패턴을 사용하여 자연적 현상이나 수학적 현상을 설명하고 예상하는 것이다. 패턴은 시각화를 함의한다. 수학의 성격이 이러하다면 시각화는 수학교육에서 가장 중요시되어야 할 학습방법일 것이다.

수학적 시각화에서 우리가 흥미를 가지는 것은 설명을 위한 보조적인 위치로서의 시각화가 아니라 수학적 개념을 이해하고 문제를 표현하기 위해 적절한 도형을 그릴 수 있는 학생들의 능력이다. 수학적 시각화는 발견과 이해를 위해, 수학적 이미지를 형성하고 효과적으로 그 이미지를 사용하는 과정이다 (Choi-Koh, 1999).

시각화는 수학적 행동의 모든 측면에 걸쳐 도움을 줄 수 있다. 지식의 이해, 적용, 종합, 문제해결, 심미적, 정의적인 측면 등에 결정적인 영향을 준다 (신동선·류희찬, 1998).

Zimmermann과 Cunningham(1991)은 시각화란 수학적인 개념, 원리, 문제를 기하학적인 표시나 그래픽을 사용하여 나타내는 과정이라고 설명하였다. 시각적인 것과 수학의 직관적인 면을 강화시키는 것은 수학작업에 새로운 가능성을 열어주며, 특별히 기하학적 도형의 시각화는 문제를 정확하게 표시해준다. 시각화의 장점은 수학문제에 대한 직관과 이해를 증가시켜주고, 역동적인 체계와 과정을 보여주는 매우 복잡한 문제의 특별한 요소와 세부사항에 초점을 맞춘다는 것이다 (고상숙, 2001).

C. 테셀레이션

테셀레이션(tessellation)이란 마루나 욕실 바닥에 깔려 있는 타일처럼 어떠한 틈이나 포개짐이 없이 평면이나 공간을 도형으로 완벽하게 덮는 것을 말한다. 이는 라틴어 'tessella' 에서 유래되었는데 고대 로마 모자이크에 사용되었던 작은 정사각형 모양의 돌 또는 타일을 의미한다. 다시 말해 '타일 깔기', '모자이크' 와 같은 뜻이다. 테셀레이션은 우리에게 단지 예술적인 아름다움만을 주는 것이 아니다. 그 속에는 무한한 수학적인 개념과 의미가 들어 있어 틀에 박히고 지루한 방식에서 벗어나 흥미 있게 도형의 각의 크기, 대칭과 변환, 합동 등을 학습할 수 있게 해준다(채희진의 8인, 1999).

테셀레이션은 1960년대부터 미국에서 교육과정의 일부분이 되어 아직도 다양한 수준에서 변환의 기하학을 쉽고 재미있게 소개하는 교육과정의 일부분으로 다루어지고 있다. 여러 방법의 테셀레이션 활동은 학생들이 많은 수학적 개념(대칭과 변환)들과 만나고, 개념들을 통합하고 복습할 수 있게 해준다(Orton, 1994).

또한, 이런 테셀레이션 활동은 예술적 창조와 기하학적 탐구를 가능하게 해준다(NCTM, 1989). Gratson Wheatley는 테셀레이션 패턴을 만드는 것은 기대되는 배치의 가능성과 타일의 정규적인 패

턴의 개념화와 이상화 그리고 그림의 작성을 결정하면서 구성된 이미지의 정신적 회전을 요구한다고 말한다.

특히, M.C. Escher의 미술은 학생들에게 강한 호소력을 지니며, 학생들은 기하학적 도형을 생기고 있는 형상으로 변환시킴으로써 호기심이 북돋아지고 기쁨을 느끼며 동시에 수학의 세계와 예술 사이의 질서와 관계성을 이해할 수 있다(Zurstadt, 1984).

도형의 모양과 면적을 변경시키지 않는 4가지 변환 중에 학생들이 쉽게 발견할 수 있는 것이 평행이동, 반사, 회전, 미끄러짐 반사이다. 학생들은 평행이동, 반사, 회전 같은 용어를 사용해서 형상들이 일상생활에서 어떻게 변하는지를 시각화하고 말로 설명할 수 있어야만 한다(NCTM, 1989). 변환은 활동용어(미끄러뜨리기, 뒤집기, 돌리기)로 정의될 수 있고, 그림에 의해 쉽게 표현될 수 있기 때문에 학생들이 조사하기에 적합한 주제이다. 조작물을 가지고 그것들을 조작하게 하는 활동의 교수법에 가까운 귀납적인 방법이 변환에 대한 학생들의 이해를 촉진한다는 관점을 지지함을 알 수 있다(Geddes & Fortunato, 1993). 변환은 디자인이나 건축과 같은 수학을 응용한 것들에 도움을 주고 수학 안에 여러 개념들을 통합하며 중학교 학생들은 상표나 회사 로고들을 대칭선이나 회전시켜 대칭한 것으로 분석하면서 대칭선이 있는 상표는 안정감을, 회전 이동이 있는 상표들은 움직임을 부여한다는 것에 흥미를 가질 수 있다(Renshaw, 1986).

III. 연구방법 및 절차

A. 연구 방법

연구 방법은 질적 연구로서, 이는 수학 교육의 연구 활동에 사용되는 여러 가지 방법 중의 하나이다. 질적 연구는 우리가 이해하고 설명하고자 하는 현상에 대하여 방해받지 않는 자연스러운 그대로의 환경에서 그 의미를 이해하고 설명 할 수 있도록 돕기 위한 방법을 지지한다.

본 연구의 목적은 컴퓨터를 이용한 재미있고, 능동적인 기하수업을 위한 방안으로서 학습부진아에게 연역적 증명의 필요성과 함께 수학의 실용적 가치와 심미적 가치를 추구하게 하는데 있으므로 질적 연구 방법 중에서 사례 연구를 선택하였다.

Yin(1994)는 다음과 같이 사례 연구의 범위를 정의하였다.

- 1) 실생활 문맥에서 현대적 현상을 조사하는 것
- 2) 현상과 문맥간의 경계가 불분명할 때 사용한다.

그래서 본 연구의 현상은 학생의 변환에 대한 이해도이며, 문맥(다를 내용)은 컴퓨터를 사용한 테셀레이션에서 변환이라고 할 수 있으므로 사례 연구가 적합하다.

B. 연구 대상

현재 고등학교 1학년인 여자 학생을 대상으로 기하학적 도형에서 변환을 중심으로 시각적 효과

및 수학적 연결성을 중심으로 한 Polya의 문제해결을 학습자 위주의 수업방식을 사용하였다.

연구 대상 학생은 인천 남구에 위치한 모 여자고등학교 1학년 학생으로 중학교 2학년 때부터 수학에 흥미를 잃어버리고 타 교과에 비하여 수학을 많이 싫어하고 자신감이 없는 수학 학습 부진아로서 연구자와의 기초적인 개념을 중심으로한 학습을 통하여 1학기말에는 약간씩 수학에 흥미와 관심을 보이기 시작하였다.

C. 연구 절차

연구는 2002년 7월 18일, 19일 이틀동안 전체 4차시로 하여 하루 90분씩 이루어졌다. 기말고사가 끝난 후에 시점이므로 학생에게 시험에 대한 부담을 주지 않아 효과적인 관찰을 할 수 있을 것이라 사료되었다.

주어진 상황에서 학생의 학습과정에 대한 심층적인 연구를 목적으로 함으로 질적 연구 방법중 사례 연구를 선택하였다. 매 차시마다 문제 해결 4단계를 사용하였으며, 학습 부진아 학생이 능동적으로 컴퓨터를 이용하여 학습하는 것을 중심으로 문제를 어떻게 해결해 나가는가를 알아보고자 하는 것이므로, 수업 모습을 관찰하는 것은 연구목적에 부합하는 것이다. 연구 과정에서는 연구자는 학생을 위한 안내자이고 도움을 주는 역할을 강조하여 학생 스스로 경험을 통한 발견적인 문제 해결력을 중심으로 진행되었다.

D. 연구 도구

모든 차시는 Polya의 문제 해결 4단계로 구성되었다.

문제(활동목표)에 대한 이해단계는 활동해야 할 내용을 확인하는 단계로서 구성되었다. 계획의 작성에서는 주어진 목표를 어떻게 실행해 나갈 것인지 충분히 생각하고 발표하도록 하였고, 계획의 실행에서는 컴퓨터를 직접 조작함으로써 능동적 학습을 유도하였다. 반성의 단계로 실행했던 결과를 발표하고 좀더 넓은 사고를 하도록 시행되고, 용어의 의미를 정확하게 이해하고 사용할 수 있도록 하였다. 매 차시는 멀티미디어 수업으로서 진행되었다.

연구시 사용된 프로그램 'Tess'는 캐나다의 Pedagoguery Software, Inc.의 제품으로 수학사랑 연구팀에 의해 한국어로 번역되었고, 현재 1.05버전을 제작사¹⁾ 또는 수학사랑²⁾의 웹사이트에서 언제든지 세어웨어를 다운로드 할 수 있다. Tess의 특징으로는 변환군(대칭변환군, symmetry group)이 중요한 역할을 하지만, 변환군에 대해 자세히 알지 못해도 테셀레이션을 비교적 쉽게 그릴 수 있다는 것이다. 도형을 그림과 동시에 선택된 변환이 적용되어 테셀레이션 전체의 모양을 실시간으로 볼 수 있다. 마우스의 세밀한 조작으로 결과를 즉시 볼 수 있다는 것으로 비교적 단시간에 테셀레이션을 할 수 있고, 우리 주변에서 볼 수 있는 무늬들에 적용된 변환을 찾아내고, 그것을 가지고 그 무늬를

1) <http://www.peda.com>

2) <http://www.mathlove.org>

비슷하게 만들어 보는 변환을 이해하는데 좋은 연습을 할 수 있다.

따라서, Tess를 이용해서 기본적으로 그리기 도구 및 사용되는 용어를 설명하여 충분히 사용할 수 있도록 하고, 기본적인 변환의 작품을 이용하여 직접 그려본 후에 변환 용어를 알 수 있고, 변환되는 기본 패턴을 이해할 수 있도록 하였다.

한국의 전통 문양은 학생에게 수학의 미적 요소와 실제 우리 생활 속에서 사용되고 있다는 실용성과 미술과의 연결성을 스스로 찾고 느끼는데 이용하였다.

일대일 학습으로서 연구가 진행되어진 관계로 인하여 학습자에게 문제해결 4단계에 있어서 이해와 계획 단계를 문답을 이용하여 거의 구별을 하지않고, 하나의 과정으로 연구를 시행하였다.

☞ 1차시

1차시의 활동목표는 '에서의 작품을 감상하고 그가 가진 도형에 대한 예리한 관찰력을 배운다' 이다.

도입 단계에서 학습 부진아의 지적능력 수준을 다시 한번 체크하고, 에서의 작품을 먼저 선보임으로서 테셀레이션을 처음 접하는 학생에게 쉽게 이해를 할 수 있도록 하였다.

이해-계획 단계에서는 에서의 대한 설명만 간단히 하고 작품에 대한 이해와 감상은 학생이 스스로 탐구하도록 과제로 남겼다.

계획 실행단계에서는 에서의 작품을 감상하고, 그 속에 어떠한 패턴이 숨겨졌는지 살펴보고 사용된 변환을 찾아보도록 하였다.

반성의 단계에서는 자신이 탐구한 내용을 발표하도록 하였다.

☞ 2차시

2차시의 활동목표는 'Tess의 기본 사용법과 응용을 통하여 여러 가지 변환의 패턴을 그려볼 수 있다'이다.

도입 단계에서는 학습부진아에게 처음 접하는 프로그램으로 Tess를 이용한 다양한 작품을 보여주고 흥미를 유발시켰다.

이해-계획 단계에서는 기본적인 그리기 기능을 충분히 숙지할 수 있도록 그리고 싶은 것들을 그려보도록 하였다.

계획 실행 단계에서는 다각형과 원 등의 도형을 그려보도록 하고, 수학적 내용과 연결시켰다. 또한 기본적인 직각삼각형을 이용하여 평행, 회전, 선대칭 이동, 미끄러짐 대칭에 관하여 직접적인 조작을 하도록 하였다.

반성의 단계에서는 자신이 실습한 내용을 발표하고, 변환 용어를 이해하도록 하였다.

☞ 3차시

3차시의 활동목표는 '에서의 작품을 이용한 변환을 통해서, Tess에서 자신만의 테셀레이션을 그려볼 수 있다'이다.

도입 단계에서 다시 한번 에서의 작품을 감상해 보고, 그 속에 있는 패턴을 살펴보도록 하였고, 이

해-계획 단계에서는 예서의 작품 속에 있는 패턴을 가지고서, Tess에서 어떠한 변환을 사용해야 할지를 생각해 보도록 하였다.

계획 실행 단계에서는 그림을 직접 그려보도록 하였고, 반성의 단계에서는 자신이 실습한 내용을 예서의 작품과 비교해 보고 차이점 및 결과를 발표하도록 하였다.

☞ 4차시

4차시의 활동목표는 우리의 전통 테셀레이션 문양을 그리고, 주위에서 살펴볼 수 있는 여러 가지 테셀레이션을 찾아본다'이다.

도입 단계에서 우리의 전통 테셀레이션 문양을 감상해 보고, 그 속에 있는 패턴을 살펴보도록 하였다.

이해-계획단계에서는 감상한 우리의 전통 문양을 Tess에서 변환을 어떻게 지정할 것인지 생각해 보도록 하였고, 계획 실행 단계에서 직접 그림을 그려보도록 하였다.

반성의 단계에서는 여러 가지 전통 문양 속에 사용된 변환이 무엇인지 발표하도록 하였다.

IV. 연구결과 및 논의

각 연구문제에 대한 연구 결과를 제시하고, Polya의 문제해결 4단계에 의한 수업사례와 그에 대한 학습 결과로서 연구 결과의 타당성을 이끌고자 한다.

학습 부진아는 처음 연구를 시작하기 전 답음과 합동 등에 정확한 용어를 알지 못하고 있었고, 자신감이 없어서 자신의 생각을 확실하게 발표하지 못했다.

1차시에서는 예서의 그림 자체를 이해 못하다가, 점차 흥미를 가지고 작품 속에 있는 기본적인 모양을 발견하였고, 그 속에 있는 변환의 형태를 찾기 시작하였다. 연구자가 생각했던 것 이상으로 작품 속에 있는 변환을 쉽게 찾아내었고, 자신감을 갖고 자신의 생각을 발표하였다.

2차시에서는 평소 컴퓨터에 익숙한 학생이라서 새로운 프로그램에 대한 거부감은 나타나지 않았고, 빠르게 프로그램을 사용할 수 있었다. 자신이 그런 도형을 쉽게 변환 시켰고, 특별히 어렵다거나 힘들다는 내용은 없었다. 용어에 대한 설명은 학습 부진아가 변환을 한 후에 이해하기 쉽도록 간단한 설명을 통하여 확실하게 이해시킬 수 있었다.

3차시에는 예서의 작품을 응용한 자신만의 테셀레이션을 그려보도록 하였다. 작품에 이용된 변환 순서를 기본으로 하여 실시간으로 변화되는 모습을 보면서 학생은 다시금 용어에 대한 정의를 복습하게 되었으며 다양한 작품을 만들었다. 하지만, 그림을 그리는데 있어서 생각처럼 예쁜 그림이 나오지 않아서 약간의 시간적 소모와 아쉬움을 나타내었다.

4차시에는 우리의 전통 문양에서도 테셀레이션이 존재한다는 사실에 매우 큰 흥미를 나타내었고, 우리 주변에서 여러 가지 테셀레이션이 있다는 사실과 수학과 미술교과와의 연계성이 있다는 것을 알게 되었다. 이제까지와는 다른 기하학-도형-의 접근으로 보다 수학이 많이 친숙해 졌다고 하였다. 또한, 학습 부진아에게 있어서 고등학교에서 앞으로 배울 변환의 함수 식에 대한 간략한 설명을 하

였고, 조금더 수학 시간에 자신감을 갖도록 하였다 (아래 프로토콜 참고).

<4차시 수업 사례 예시>

연구자 : 자, 지금 지금 시간은 이제까지 우리가 함께 했던 마지막 정리 시간이야. 지금까지 어렵거나 힘든거 있었니?

학 생 : 아니요. 참 재미있었어요.

연구자 : 그러면 여기 준비되어 있는 그림들을 한번 살펴볼까? (그림 10~14를 보여 주었다)

연구자 : 여기에서도 일정한 형태의 변환을 찾아 볼 수 있을까?

학 생 : 음. 먼저 (그림 10) 삼각형이 있네요. 그 속에서의 모양은 약간은 차이가 있지만, 삼각형이 변환되어 있어요.

연구자 : 그림, 삼각형이 어떤 변환을 했을까?

학 생 : 대칭 이동한 것이 보여요.

연구자 : 다른 변환은 없을까?

학 생 : 회전 이동한것도 같은데요.

연구자 : 그래, 여기에서는 여러 가지 변환이 사용되었어. 정확하게는 나도 어떤 변환이라고 꼭 꼬집어 말할 수는 없지만. 다음 그림을 한 번 살펴볼까? 어떤 변환이 있을까?

학 생 : 화살표가 있어요. 화살표가 대칭 이동했어요.

연구자 : 그래. 핵심을 아주 잘 찾았어. 여기 그림은 다양한 문양이 숨겨져 있어.

학 생 : 네 그러네요. 딱 뭐라고 애긴 못하겠어요.

연구자 : 일단, 중심 변환을 찾아낸 것이 중요해. 참 잘하는데. 조금더 살펴볼까?

학 생 : 화살표가 여러 가지 예요.

연구자 : 여기서는 여러 가지 화살표가 사용되었고, 변환되었다는 것을 알 수 있지. 화살표 끝에도 양을 보자.

학 생 : 아. 화살표 뒤에 것으로도 새로운 것이 생겼어요.

연구자 : 테셀레이션을 하다 보면 나도 모르는 새로운 변환의 결과로서 재미있는 문양을 얻을 수 있 단다.

연구자 : (그림 12) 여기서는 어떤 변환이 사용되었을까?

학 생 : 작은 물결이 대칭되어 있어요.

연구자 : 어떻게 대칭되어 있니?

학 생 : 뒤집어져 있어요.

연구자 : 약간 넓게 봐 볼까? 방금 말했던 대칭이라는 것을 하나의 무늬로서 보면 어떨까?

학 생 : 평행이동이요.

연구자 : 그래. 보는 관점에 따라서 여러 가지 답을 할 수가 있어. 니가 찾은 것도 정답이고, 조금더 넓게 보고 평행이라고 하는 것도 정답이될 수 있어. 항상 여러 가지로 생각하는 습관

을 길 러야 해.

연구자 : 어디서 많이 본 그림(그림 13)이지?

학 생 : 정말이에요. 많이 본 것 같은데.

연구자 : 붉은 악마. 거기 있는 치우천황 그림. 비슷한거 같지 않아?

학 생 : 맞아요. 비슷하네요.

연구자 : 여기서는 어떤 변환이 쓰였을까?

학 생 : 여기도 변환이 있어요? 진짜예요?

연구자 : 있어. 잘 살펴봐.

학 생 : 모르겠어요. 변환된 것이 없는 것 같아요.

연구자 : 그래. 잠시후에 직접 확인해 보도록 하자. 그림 다음 그림은 어떤 변환이 있을까?

학 생 : 회전이동이에요. 여기를 중심으로 90도 회전되어 있어요.

연구자 : 여기 우리가 본 것들 중에서 Tess에서 직접 한번 그려보자구. 다른 것은 그리기가 어려우니까 쉬운 것 하나를 택하여 그려봐.

(학생은 그림 12를 선택하여 기본문양을 그린 후에 가로축 평행이동을 통하여 비슷한 그림의 결과를 얻었다)

연구자 : 아까, 도깨비 문양에 아무 변환이 사용되어 있지 않다고 했지. 잘 살펴보자.

(연구자는 선대칭을 선택하여 도깨비는 그리지 않았고, 서로 대칭되는 것을 보여주었다)

학 생 : 이제 이해했어요. 가운데를 중심으로 대칭이 되었군요.

연구자 : 직접 보니까 이해하기 쉽지. 비록 그리긴 어렵지만 선대칭이 사용되었다는 것을 금방 알 수 있지.

학 생 : 네.

연구자 : 학교가면서 여러 가지 답을 본 적이 있니?

학 생 : 네.

연구자 : 자 그 여러 가지 답들 중에서 벽들로 쌓은 답을 생각해 보자. 그 속에도 일정한 변환을 생각해 볼 수 있을까?

학 생 : 미끄러짐 대칭이요. 벽들이 그런 모양을 하고 있어요.

연구자 : 잘 했어. 여기 바닥에 있는 카펫트를 살펴보자고. 여기서도 일정한 모양이 반복되고 있지?

학 생 : 지금 보니까 그래요. 신기하네요.

연구자 : 그래. 즉, 미술에서도 수학이 존재하고 있다는 거야. 우리 주위에서 볼 수 있는 아름다운 여러 가지 모양이 있지. 그속에서 우리는 수학적 원리를 찾을 수 있단다.

학 생 : 전혀 몰랐어요.

연구자 : 미술을 잘 하려면 수학도 어느 정도 해야함을 알겠니?

학 생 : 네.

연구자 : 수학은 꼭 딱딱한 것 만은 아니야. 우리가 수학을 배워야 하는 이유 중에 수학은 우리 생활을 더 아름답고, 편하게 해주는 것도 있거든. 늘 생각을 많이 해야하는 것도 그런 한 가지 이유가 될 수 있지. 다시금 지금 우리가 봤던 문양속에 사용된 변환을 말해 보도록 하자.

(학생은 그림을 보고서 자신이 찾아내었던 변환을 정확하게 발표하였다)

연구자 : 사용된 용어의 정의를 정확하게 알고 있으니까 편하지. 이해하기도 쉽고.

학 생 : 예.

연구자 : 앞으로 우리가 같이 했던 변환을 중심으로해서 함수에서 식으로 된 것을 배우게 될꺼야. 잘 할 수 있을까?

학 생 : 네. 물론 어려울 수도 있겠지만, 어느 정도는 할 수 있을 것 같아요.

연구자 : 자신감을 잃지 말고, 차근차근 생각하면 어렵지 않아. 지금처럼 열심히 수업에 참여하고, 자신의 의견을 말하는 습관을 들인다면 수학 수업시간이 더욱 재밌게 느껴질꺼야. 아무튼 수고 많이 했어.

학 생 : 너무 재밌었어요. 앞으로 열심히 할게요.

본 연구에서 연구자는 학습 부진아에게 해결 해야할 과제만 제시해 주었다. 학습 부진아는 처음에 자신감이 없었지만 점차 수업에 흥미를 느끼기 시작하여 문제 해결 과정을 통하여 자신의 생각을 충분히 발표할 수 있었고, 변환 되어지는 모습을 직접 조작·관찰한 후에 용어에 대한 정확한 정의를 인식할 수 있었다. 즉, 시각화와 조작의 과정을 통하여 변환에 대한 개념을 직관적으로 이해하고 용어를 정확하게 습득하여 발표하였다. 또한, 테셀레이션을 만들어 가는 과정을 통하여 자신만의 창의적인 작품을 만들었고, 미술 교과와의 수학적 연결성을 알게 되었으며 수학의 실용성과 도형의 아름다움을 학생이 스스로 찾고, 발견하는데 어려움이 없었다. 실제 생활에서 발견할 수 있는 여러 가지 테셀레이션 문양을 찾도록 하여 그속에 담긴 기본적인 변환들을 살펴보게 하였다. 그에 대한 활용 부분인 우리의 전통 문양을 학습 부진아는 매우 흥미롭게 생각했고, 그 속에 있는 여러 가지 변환을 쉽게 찾아내고, 자신의 생각을 발표 하였다. 학습 부진아는 연구 후에 수학에 대한 흥미와 관심도가 전에 비하여 높아 졌고, 자신감도 많이 가지게 되는 계기가 되었다.

V. 결 론

본 연구의 목적은 컴퓨터를 이용하여 학습 부진아에게 기하학에 대한 흥미를 제공하고, 능동적인 학습을 이끌어 내는데 있다. 또한, 수학적 연결성을 통하여 수학의 실용성과 실생활과의 연관성, 도형의 아름다움을 학생들이 스스로 찾고, 느끼는데 일조 하고자 하는 것이다. 또한, 칠판과 분필만을 이용한 증명 위주의 기하 수업을 탈피하여 현장에서 충분히 사용할 수 있는 능동적인 교수·학습 방

법과 그에 대한 효과를 제시하고자 하였다.

Tess를 이용한 기하 학습 효과로서 가장 큰 결과는 학생들에게 관심과 흥미를 충분히 제공할 수 있다는 것이다. 연구가 진행되는 동안 학습 부진아 학생은 흥미를 갖고, 적극적인 자세로 수업에 참여했다. 흥미가 바탕이 된 수업은 능동적인 학생 중심의 수업을 이끌어 낼 수 있었다. 또한, 연구자는 안내자로서 학생에게 도움을 주는 입장을 유지하면서 수업을 전개할 수 있었고, 학생은 충분히 사고를 하는 시간과 자신의 의견 발표를 통한 반성의 단계로서 발견적인 학습 효과를 얻을 수 있었다. 직관적인 시각과 능동적인 조작의 결과로서 수학적 용어의 정의를 보다 정확하게 이해하고 사용할 수 있었다. 그리고, 도형에 관한 성질-변환을 중심으로-들을 자연스럽게 습득할 수 있었다. 무엇보다도 학생은 컴퓨터 조작에 상당히 익숙하여 새로운 프로그램의 사용법을 쉽게 이해하였고, 연구 결과물을 비교적 단시간에 얻을 수 있었다. 자신이 관찰한 여러 가지 테셀레이션의 그림을 가지고서, 자신의 사고를 바탕으로 하여 Tess를 이용한 작품을 만들어 가는 과정을 통하여 자연스럽게 수학적 연결성을 인식할 수 있었다. 무엇보다도 Tess의 장점은 실시간 적으로 결과물을 알 수 있다는 것과 정확한 변환을 몰라도 테셀레이션을 할 수 있다는 것이다. 그 결과물을 통해 개념 정의나 개념 확장을 시도할 수 있는 기회를 다시 용이하게 가질 수 있다는 점이 학습 부진아에게도 유용한 도구라 할 수 있다. 그리고, 오류 발생 시 즉시 오류를 수정할 수 있어 학습자 스스로 발견적·탐구적 학습이 가능하다.

문제해결에 있어서 컴퓨터 프로그램을 이용한 수업은 학생을 활동적으로 흥미를 가지고 수업에 참여하게 하는 도구로서 충분히 사용할 수 있었다. 이에 대한 결과로서 학생들은 보다 적극적이고 능동적인 학습을 할 수 있었고, 자신이 생각했던 다양한 변환들을 실시간으로 조작하여 스스로 발견 학습이 가능하였다. 또한 오류를 빨리 수정할 수 있었다. 시각화를 사용한 이러한 문제해결을 통해 학생은 수학적 지식의 의미를 눈으로 확인하고, 수학적 개념과 용어들을 보다 근본적으로 이해시킬 수 있다. 학생들에게 수학이 지루하고 의미 없는 수식의 학문이라는 느낌 대신에 수학의 아름다움을 실감시키고, 수학이 실생활이나 다른 학문에 적용된다는 사실을 깨닫게 하는데 많은 도움을 줄 것이다.

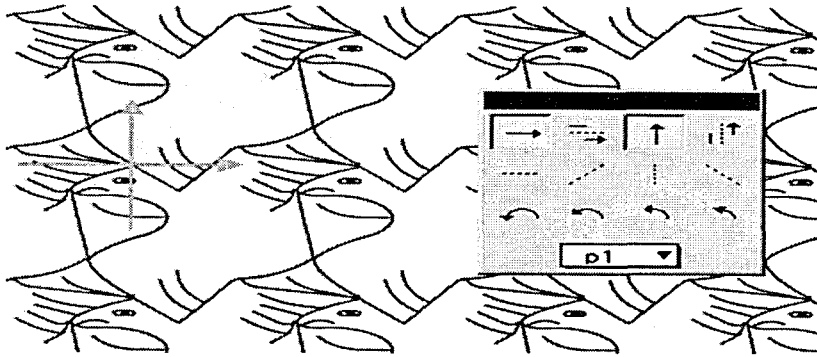
7차 교육과정에 맞추어 현장에서의 수학교육의 모습이 많이 달라지고 있다. 다양한 교구의 도입과 프로그램의 사용을 통하여 (부진아를 포함한) 학생들은 능동적인 학습을 통하여 자연스럽게 수학의 참모습과 의미를 찾아내고자 하는 시도가 많아지고 있다. Tess를 이용한 교수·학습의 사례 연구는 이러한 계기가 되는데 약간이나마 도움이 되고자 한다. 이번 연구는 4차시로 구성되었지만, 학생의 수준에 따라 3차시 정도로 수업을 진행하여도 별 문제점이 없을 것이다. 기하 영역에서의 엄밀한 증명은 필요하다. 하지만, 그 전에 도형에 대한 성질들을 딱딱한 증거가 아니고, 직관적인 것들의 활동을 통해서 학습되어 진다면 학생들은 많이 거부감을 없앨 수 있을 것이다. 또한, 수학의 타 과목과의 연결성을 부각시킨다면 학생들에게 현실적으로 수학의 필요성을 일깨우는 데에도 도움이 될 것이다. 비형식적인 실험이나 경험을 통하여 기하에 대하여 학생들이 친근감을 얻고 난 후에, 사고력을 자극하는 적절한 발문으로 분석적 방법과 종합적 방법을 통합한 보다 엄밀한 기하 지도에 있어서 학생들

은 충분히 잘 적응될 수 있을 것이다.

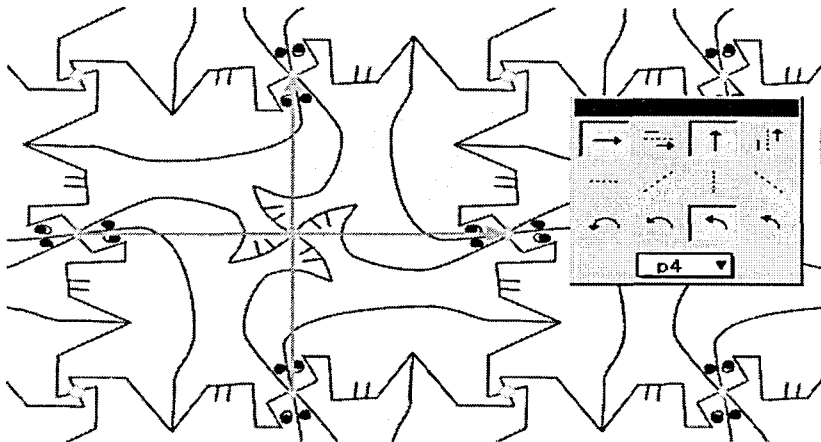
참 고 문 헌

- 고상숙 (2001). 기하 교수·학습 연구와 미국의 교사교육과정 사례, 단국대학교 교과교육연구소 학술 발표대회, pp.47-73.
- 송영준 (2001). 테셀레이션-기하와 대수의 만남, 저널 수학사랑 29, pp.59-62.
- 신동선·류희찬 (1998). 수학교육과 컴퓨터, 서울: 경문사.
- 이상원 (2000). 수학과 학습 부진아 효율적 지도 방안, 대구 중등 수학연구 2000년 하계연수회.
- 채희진 외 8인 (1999). 새롭게 다가가는 평면도형·입체도형, 수학사랑.
- Choi-Koh, S.S. (1999). A student's learning of geometry using the computer. *Journal of Educational Research*, 92(5), pp.301-311.
- Geddes, Dorothy & Fortunato, Irene (1993). "Geometry : Research and Classroom Activities". IN Owens, Doiglas T.(Ed.) *Research Ideas for the Classroom Middle Grades Mathematics*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hatfield, Mary M.; Edwards, Nancy Tanner & Bitter, Gray G. (1993). *Mathematics Methods for the Elementary and Middle school*, second Edition. Boston : Allyn and Bacon. INC
- National Council of Mathematics of Teachers. (1989). *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics*. 구광조, 오병승, 류희찬 (공역)(1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 경문사.
- Orton, Tony (1994). "Tessellation in The Curriculum", *Mathematics in school*, pp.12-16.
- Polya, G (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*, I.
- Renshaw, Barbara (1986). "Symmetry the Trademark Way", *Arithmetic Teacher*, pp.6-12.
- Steen, L.A. (1988). The science of patterns. *Science*, 616(April 29).
- Yin, R.K. (1994). *Case Study Research, Design and Methods*, 2nd Ed. Newbury Park, Sage Publications.
- Zimmermann, W. & Cunningham, S. (Eds.) (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Zurstadt, Betty K. (1984). "Tessllations and the Art of M. C. Escher". *Arithmetic Teacher*, pp.54-55.

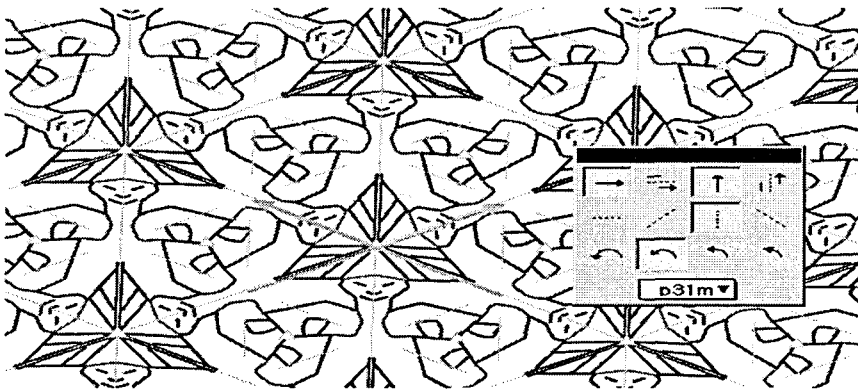
<부록 1> Tess 작품 예시



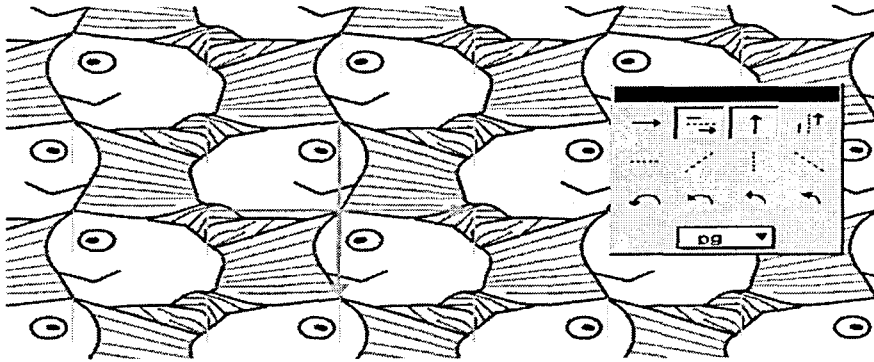
<그림 1> 새 (평행이동)



<그림 2> 도마뱀 (회전이동)

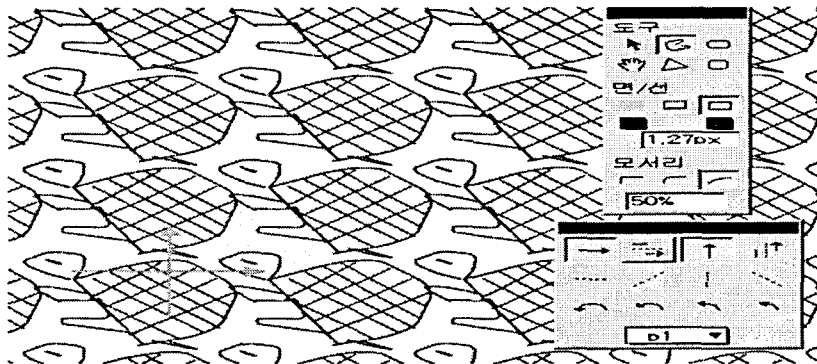


<그림 3> 허수아비 (선대칭, 회전이동)

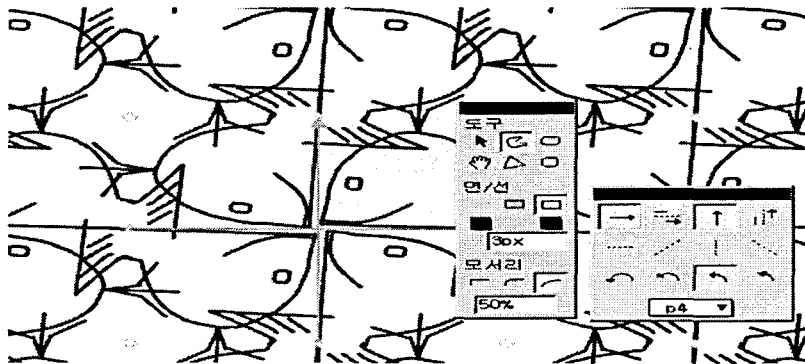


<그림 4> 미끄러짐 대칭이동

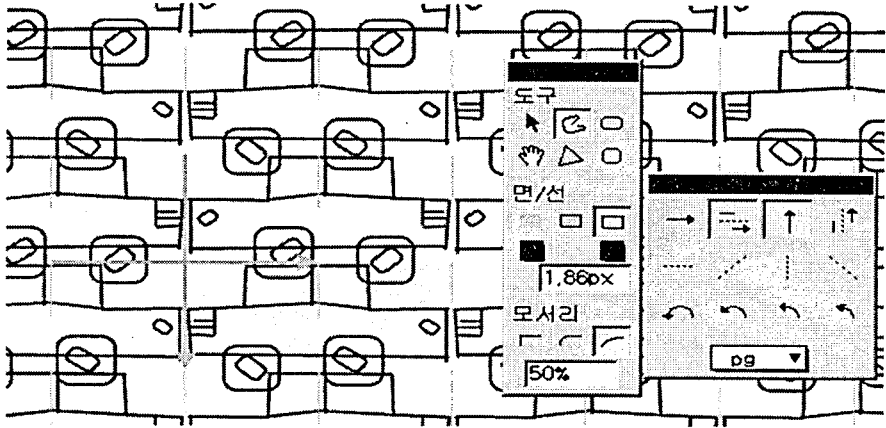
<부록 2> 학생 작품



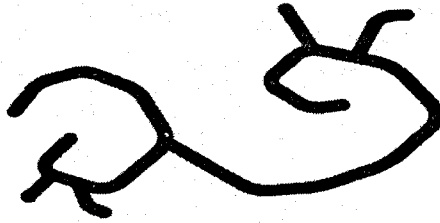
<그림 5> 거북이 (평행이동)



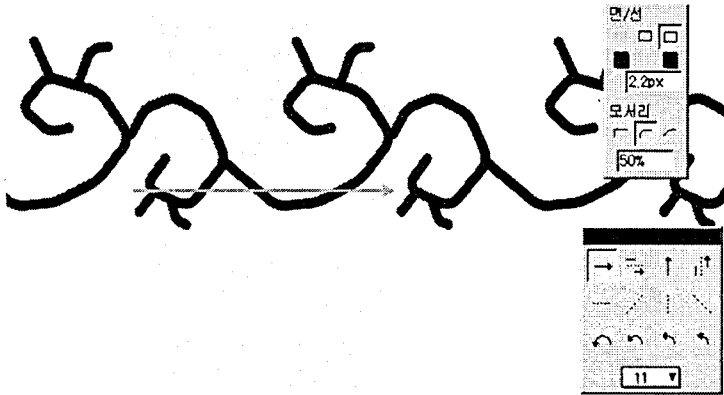
<그림 6> 고래 (회전이동)



<그림 7> 자동차

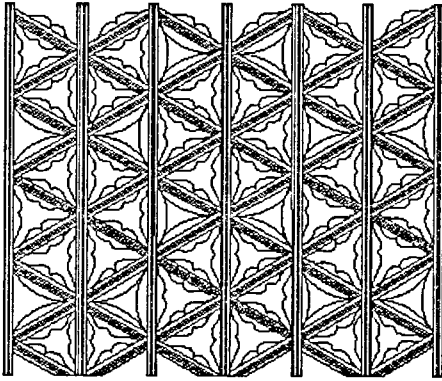


<그림 8> 구름문양 (기본모양)

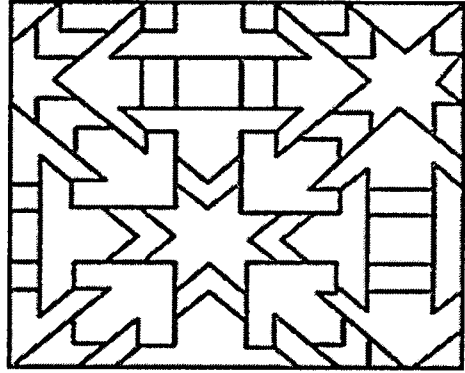


<그림 9> 가로축 평행이동

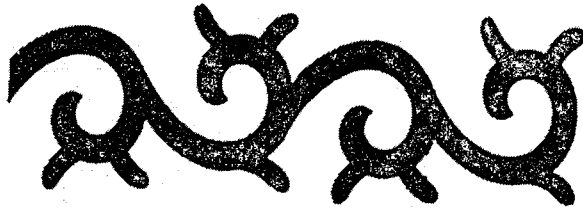
<부록 3> 한국의 문양



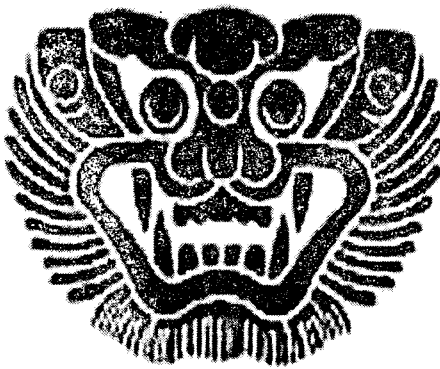
<그림 10> 문살문양



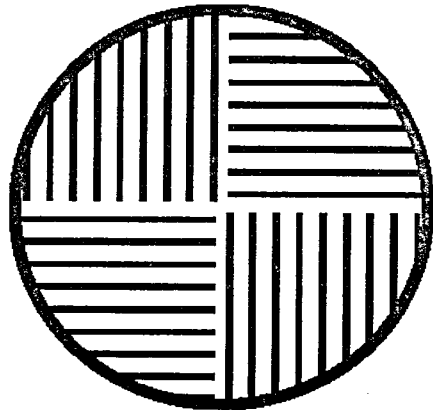
<그림 11> 단청문양



<그림 12> 구름문양



<그림 13> 도깨비문양



<그림 14> 떡살문양

<부록 4> 수업 지도안

<표 1> 1차시 수업지도안

일시	2002. 7. 18		인원	고1 (1명)
활동주제	테셀레이션 1 ⇒ 도형의 성질, 도형과 예술			
활동목표	에서의 작품을 감상하고 그가 가진 도형에 관한 예리한 관찰력을 배운다.			
활동단계	활동요소	활동내용		자료 및 유의점
준비활동	도입	테셀레이션이 학생에게 처음 소개되는 것이다. 따라서 쉽게 이해 할 수 있도록 에서의 작품을 먼저 선보인다. 테셀레이션의 역사와 원리를 설명한다.		멀티미디어 수업
중심활동	이해 계획	에서에 대한 설명만 간단히 하고 작품에 대한 이해와 감상은 학생의 탐구 과제로 남긴다.(개별학습)		
	계획실행	컴퓨터 앞에 앉아서 에서의 작품을 감상한다. 여러 나라의 역사 속에 테셀레이션이 어떻게 자리 잡았는지 감상하고, 그 속에 있는 변환의 패턴을 살펴본다.		
정리활동	반성	자신이 탐구한 내용을 짧게 발표한다.		
활동결과	처음에는 그림 자체를 이해를 못하다가 점차 흥미를 갖고, 패턴을 찾기 시작하고 자신이 탐구한 내용을 자신 있게 발표하였다.			