韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 14집, 2002. 8. 27-41.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 14, Aug. 2002. 27-41.

인지적으로 안내된 교수(CGI)에 대한 고찰

김 원 경 (한국교원대학교)
백 선 수 (대구와룡초등학교)

인지적으로 안내된 교수(CGI)는 학생들의 수학적 사고(특히, 비형식적 지식)의 발달; 그러한 발달에 영향을 미치는 교수; 교수 실제에 영향을 미치는 교사의 지식과 신념들; 교사의 지식, 신념들, 실제들이 학생들의 수학적 사고에 대한 이해에 의해 영향을 받는다는 점에 초점을 둔 통합된 연구 프로그램이다. 본 논문에서는 아동의 비형식적인 지식을 중시하는 최근의 연구들을 고찰하고, CGI를 위한 수업을 어떻게 조직하며, 그러한 교수법이 수업을 어떻게 진행할 것인지에 대한 구체적이고 명확한 지침을 제공하지 않으므로 CGI를 적용하는 교실들의 유사점을 살펴본다. 그리고, 마지막으로 최근의 연구들을 고찰함으로써 CGI의 효과를 알아본다.

Ⅰ. 들어가며

2000년 3월 경에 초등학교 2학년 교실에 수업을 보강하러 들어간 적이 있다. 교실에 들어서는 순간, 학생들의 인사를 받고 쏟아지는 질문이 선생님 이름에 관한 것이었다. 앞에서 세 번째 앉은 학생이 "선생님 이름이 뭡니까?"라고 물었다. 그 순간 올바른 언어 사용에 대한 지도가 있어야 되겠다는 생각이 들었다.

그래서 여러 학생들에게 "선생님의 이름"을 여쭐 때에는 어떻게 해야 올바른지에 대해 이야기 해 보자고 했다. "과연, 선생님 이름이 뭡니까? 라고 묻는 것이 올바를까?" 그러자, 한 학생이 "선생님, 성함이 뭡니까?"라고 여쭈어야 한다고 했다. 그래서, 그러한 반응들을 칠판에 기록하였다. 그렇게 한 후, 각각의 질문에 대하여 찬성하는 쪽에 손을 들도록 했다. 그 결과가 아래 표와 같다.

학생들의 발문	응답자 수
선생님 이름이 뭡니까?	0
선생님 성함이 뭡니까?	3
선생님 성함이 어떻게 되십니까?	?
선생님 성함이 무엇입니까?	9

그런데, "선생님 성함이 어떻게 되십니까?"라고 반응한 학생들의 수가 너무 많아 모두 헤아리기가 곤란하였다. 그래서 "이 질문에 대해 몇 명의 학생들이 손을 들었을까?"라고 물으면서 그것을 문제로 제시하였다.

우선, 우리 반 전체의 학생 수를 알아보자고 했다. 그러자, 한 학생이 자신은 우리 반의 학생 수를 안다면서, 자신은 마지막 번호인데, 51번이므로 51명이라고 했다. 그러자, 또 다른 한 학생이 자신은

신발장에 붙어있는 번호를 보았는데, 51번까지 있으므로 51명이 확실하다는 것이다. 그러면, 우리 반 학생수가 51명이라는 사실에 대하여 이의 있는 학생은 발표해 보자고 했다. 그러자, 아무도 이의를 제기하지 않았다.

그러면, "선생님 성함이 어떻게 되십니까?"라는 질문에 몇 명의 학생이 손을 들었는지 답해 볼 사람은 손을 들어 보자라고 제안하였다. 그러자 몇 명의 학생들이 즉각적으로 손을 들었다. 그래서, "다른 학생들에게 생각할 기회를 주자."라고 말하면서, 5~10분간의 시간을 주었다. 그리고 난 후, 학생들의 발표를 들었다.

> 학생1: 저는 51에서 3과 9를 더한 12를 뺐었어요. 그래서 39를 얻었어요.
> 교사: 방금 발표한 학생의 설명에 대하여 이상한 점이 있으면 발표해 보자.
> (그러자, 아무도 이의를 제기하지 않았다)
> 그러면, 다른 방법으로 해결한 사람이 있으면 발표해 보자.
> (그러자, 학생들은 한참 동안 아무런 반응을 보이지 않았다. 그리고 수업 종료 시간이 다 되어 가므로 교사는 시간에 제약을 받을 수밖에 없었다.)
> 교사: 그러면, 우리 반 학생들은 모두 51명이므로, 그것에서 3을 빼면 얼마지?
> 학생들: 48
> 교사: 또 48에서 9를 빼면?
> 학생들: 39가 됩니다.
> 교사: 이렇게 구하면 어떨까?
> 학생들: 괜찮은 방법인 것 같아요.[1)]

여기서 우리가 주목해야 할 것은 51-3-9를 계산하는데 있어서, 교과서(2가, p. 25)에 제시된 것처럼 (51-3)-9의 순서로 계산하는 것이 아니라, 51-(3+9)로 계산하는 것이 학생들에게는 보다 자연스럽고 편리하게 보인다는 것이다. 결과적으로 학생들의 비형식적인 수학적 지식은 교과서에 제시된 알고리즘을 따르지 않을 수 있고, 보다 효율적일 수 있으며, 장래의 수학(괄호 밖의 '-'기호가 괄호 안의 기호에 영향을 줌)과 연계될 수도 있다. 또한, 앞의 예는 NCTM(1998)에서 주장하는 다음과 같은 주장과도 일맥상통한다.

"새로운 학습은 선수 학습에 가장 의존하며, 이는 경험을 통해 개발된 비형식적인 직관뿐 아니라 학교 학습을 통해 개발된 아이디어를 포함할 수 있다. 모든 연령의 학생들은 기본적으로 사용할 수 있는 상당한 지식을 가지고 수학 학습에 임한다. … 학생이 기존의 지식과 관련성을 발견할 수 있을 때, 수학은 더 의미 있게 되며 기억과 적용이 용이하게 된다. … 서로 다른 학생들은 서로 다른 경험과 사전 지식을 가진 채 수학 수업에 임하게 되므로, 교사는 학생의 이해를 평가하고 그것을 의미심

1 그 학급의 학생들이 한 가지 방법으로만 반응한 것을 지금 다시 분석하면 여러 가지 요인이 작용했다고 생각한다. 첫째는 학생들이 답이 여러 가지일 수 있는 개방형 문제(Open-ended Problem)를 접해보지 못했거나, 처음에 발표한 학생이 그 학급에서 수학적 권위자로 인정받고 있거나, 다양한 방법으로 해결하는 것을 가치롭게 생각하지 않는 사회 수학적인 문화가 형성되었기 때문이라고 생각된다.

장한 방법으로 조직하는데 있어 전문가가 되어야 한다."

따라서, 본 논문에서는 아동의 비형식적인 지식의 중요성을 인식하고 그것을 교사 재교육에 활용하는 인지적으로 안내된 교수(Cognitively Guided Instruction; CGI)에 관하여 고찰하고자 한다.

Ⅱ. 인지적으로 안내된 교수에 대한 고찰

1. 아동의 비형식적인 전략을 중시하는 최근의 연구들

오늘날 아동의 비형식적인 전략의 존재를 인식하고 그것의 중요성을 부각시키는 네 가지 접근법이 있다. 그것을 간략히 소개하면 다음과 같다.

1) 인지적인 도제(Cognitive Apprenticeship)

Brown, Collins, & Duguid(1989)가 제안한 교수 모델로서, 이 모델은 모든 지식의 지시적인 속성(indexical character)에 근거하고 있다; '(…) 지식은 그것이 개발되고 사용되는 활동, 상황, 문화의 산물의 일부분으로서 상황화된다.'(상게서, p. 32) 모든 단어들은 적어도 부분적으로 지시적이라고 그들은 주장한다. '이것', '여기', '지금'과 같이 순수한 지시적인 단어들은 그것들이 사용되는 상황에서만 해석되어질 수 있다. 하지만, 그들은 모든 단어들이 적어도 부분적으로 상황에 의존적이라고 주장한다: '한 단어의 의미는 그 정의가 몇 개의 예시적인 문장으로 제시될 때조차도, 하나의 정의에 의해 원칙적으로 파악될 수 없다.'(상게서, p. 33)

그들은 새로운 지식과 기능들이 실제의 상황 속에서 개발되어야만 한다고 결론 내렸다. 대부분의 실제적인 상황들은 초보자가 다루기엔 너무나 복잡하기 때문에, 그들은 직업 교육에서의 도제에서 유추하여 인지적인 도제라는 아이디어를 제안한다. 이러한 방법에서의 핵심적인 단어는 coaching(지도), scaffolding(비계설정), fading(흐릿하게 함)이다. 이러한 모델에서는 추상적인 것에서 구체적인 것으로 이행하는, 위에서 아래로(top-down)의 전략을 사용하고 있는데, 그 교수 활동들은 학생들의 비형식적이고 상황화된 지식을 이미 존재하는(pre-existing)체계와 *연관시키는데* 초점을 둔다. 이러한 방법의 명확한 장점은 해석과 의미에 관한 협상이 분명하게 되고, 그것이 수업의 중심이 된다는 점이다. 하지만, 구성주의 관점에서, 하나의 결점은 전문가의 지식이 수업을 위한 직접적인 목적으로서 받아들여진다는 점이다. 이것은 학생들이 자신들만의 풀이를 구성하는데 자유롭지 못하고, 교사가 마음속에 품고 있는 것을 발견해야 한다는 것을 의미한다.

2) 사회적 구성주의(socio-constructivism)

모든 지식은 스스로 구성되고, 따라서 수학교육은 개인 특유의 구성을 인정해야만하고 수학적 의미, 해석, 그리고 절차들이 명확하게 협상되는 교실 분위기를 조성해야만 한다. Cobb, Yackel, Wood(1992)에 따르면, 교사들은 학생들의 문화화 과정이 사회 실제와 보다 광범위한 공동체의 해석

을 포함하도록 자극해야만 한다. 이러한 사회적 구성주의자들의 교수 방법에서는, 학생들이 스스로 발명한 문제 해결이, 토의를 위한 주제로서 구조화되고, 학급 공동체의 문화화의 과정을 위한 시작점으로서 기능한다.

3) 현실적 수학 교육(Realistic Mathematics Education)

현실적 수학 교육은 수학을 활동으로서 해석한 Freudenthal의 연구에 기초하고 있다. 프로이덴탈은 자신의 출발점을, 순수 수학자나 응용 수학자이든 상관없이, 수학자의 활동을 고려했다. 그는 수학적 활동을 문제를 찾고, 주제들(수학적인 것이거나 실제로부터 얻은 데이터이든 상관없이)을 조직하는 문제 해결 활동으로서 규정했다. 현실적 수학교육의 핵심 원리를 간단히 소개하면 다음과 같다 (Gravemeijer, 1994).

첫 번째 원리는 '안내된 재발명(guided reinvention)'과 '점진적인 수학화(progressive mathematizing)'로 불려진다. 재발명의 원리에 따르면, 학생들에게 수학이 발명되는 과정과 유사한 과정을 경험할 기회가 주어져야만 한다. 수학의 역사는 교육 과정 설계를 위한 영감의 원천으로서 사용되어질 수 있다. 재발명의 원리는 또한 비형식적인 풀이 절차에 의해서도 초래될 수 있다. 학생들의 비형식적인 전략들은 보다 형식적인 절차들을 앞서는 것으로서 종종 해석되어질 수 있다. 이러한 경우에, 유사한 풀이 절차들을 수학화하는 것은 재발명 과정을 위한 기회를 만든다. 일반적으로 보다 다양한 풀이 절차들을 허용하고, 점진적인 수학화의 과정을 통해 가능한 학습 경로를 나타낼 수 있는, 상황적인 문제를 만드는 것이 필요하다.

두 번째 원리는 교수학적인 현상학(didactical phenomenology)이라는 개념과 관계된다. 교수학적인 현상학은 수학의 특정 부분에 의해 수학화될 수 있는 학습자 주변의 현상을 살펴보고 역사적인 고찰에 의해 수학화 과정을 분석함으로써, 수학적 내용이 어떻게 그 현상을 조직하고 기술하고 분석하는지를 보여주고, 수학적 내용이 어떤 중요성을 갖는지를 분석하여 학생들이 어떻게 그것을 생각해 낼 수 있게 하고 더 잘 이해하게끔 도우며 그것을 예상할 수 있도록 할 수 있는가를 알아내는 것과 관련된 학문을 말한다.

세 번째 원리는 *스스로 개발된 모델(self-developed models)*이 비형식적인 지식과 형식적인 수학 사이의 간격을 메우는 역할에서 발견된다. 조작물들이 정보 처리 이론에서는 이미 존재하는 모델로서 제시되는 반면에, 현실적 수학교육에서는 모델들이 학생들에 의해 스스로 개발된다. 이것은 학생들이 문제를 해결하는 가운데 모델들을 개발한다는 것을 의미한다. 먼저, 하나의 모델은 학생들에게 친숙한 상황에 대한 모델이다. 일반화와 형식화의 과정에 의해 모델은 점차적으로 그 자체로서 존재하게 된다: 그것이 수학적인 추론을 위한 모델로서 이용되는 것이 가능하게 된다.

4) 인지적으로 안내된 교수(Cognitively Guided Instruction; CGI)

앞으로 논의하게 될 인지적으로 안내된 교수는 교사들에게 학생들의 비형식적인 전략들을 알려줌

으로써 시작된다. 이 프로젝트의 아이디어는 교사들이 참고적인 틀을 구성할 수 있도록 그들에게 비형식적인 전략에 관한 연구 결과들을 제시하는 것이다. 이러한 틀의 도움으로 교사는 학생들의 자발적인 학습과정을 안내할 수 있다.

2. 인지적으로 안내된 교수를 위한 수업 조직하기

최근까지 우리는 아동이 기본적인 수 개념에 대하여 얼마나 이해하는지를 명확하게 인식하지 못했고, 초기의 수학 교수법은 그들의 풍부한 비형식적 지식을 이용하지 못했다. 결과적으로, 우리가 학교에서 가르치고자 했던 수학들은 종종 아동들이 자신들의 일상생활에서 사고하고 문제를 해결하는 방식과 단절되어 있었다(Carpenter et al. 1999). 아동들은 성인들이 행하는 것과 똑같은 방식으로 수학을 항상 생각하지는 않는다. 만약 우리가 아동들이 내부로부터 자신들의 이해를 구성할 수 있는 기회를 제공하기를 원한다면, 우리는 아동들이 수학에 관해 어떻게 생각하는지를 이해할 필요가 있다. CGI는 어떻게 아동의 수학적 사고가 발달하는지에 관한 이해와, 아동들이 자신들의 개념을 내부로부터 구성하도록 돕는 방법에 대한 고찰이다. 교사들이 진정으로 아동의 사고를 이해하고 그들에게 자신들의 사고에 기초하여 구성할 수 있는 기회를 제공했을 때, 많은 학생들은 유의미한 학습이 가능하고, 아동의 수학적 사고에 대한 명확한 지식을 가지는 것이 교사들에게 매우 중요함을 알게 된다. 이번 절에서는 인지적으로 안내된 교수를 위한 수업을 조직하기 위한 절차들을 살펴본다.

1) 문제 선정하기

교사들은 아동들에게 문제들을 해결하는데 있어서 풍부한 경험들을 제공하기 위해 문제들을 선정한다. 경우에 따라서, 교사는 아동들이 발표력을 기를 수 있도록 상대적으로 단순한 문제들을 선정하기도 하고, 아동들이 보다 심사숙고한 전략들을 사용할 수 있도록 복잡한 문제들을 선정하기도 한다. 교사들은 아동들을 위해서 흥미롭고 매력적이며 이해할 수 있는 문제 상황을 선정한다. 그러한 상황들은 그들이 읽고 있는 책, 그들이 추구하고 있는 사회적인 연구들, 혹은 그들이 계획 중인 견학과 같이, 현재 그들이 교실에서 수학시간에 행하고 있는 것과 직접적으로 관련되어 있지 않을 수도 있다.

아동들이 문제를 사고하고 해결하는 방법을 반영하는 덧셈과 뺄셈 문제들의 서로 다른 유형들 사이에는 중요한 차이가 있다. 따라서 교사는 수업을 위한 문제들을 선정하기 위해서, 그리고 아동들이 그것들을 어떻게 해결했는지를 해석하기 위해서는 다양한 문제들의 유형을 알고 있어야 한다. 문제를 분류하는 방법에는 여러 가지 방법이 있겠지만 가장 유용한 방법들 중의 하나는 문제에 기술된 행위나 관계들의 유형에 초점을 맞추는 것이다. 이러한 분류는 아동들이 문제에 대해 생각하는 방식과 일치한다. 결국 이러한 분류는 아동들이 다르게 해결하는 문제들을 구별해 주며, 문제의 상대적인 난이도를 알도록 해 준다. 덧셈과 뺄셈 문제에서 기본적인 4가지 문제 유형은 첨가(Join), 구잔(Seperate), 합병(Part-Part-Whole), 구차(Compare)이다. 첨가와 구잔 문제는 행위를 포함하고 있는데, 첨가 문제에서 원소들이 주어진 집합에 더해진다. 그리고 구잔 문제에서는 원소들이 주어진 집

합으로부터 제거된다. 합병 문제에서는 한 집합과 그것의 두 부분 집합들 사이의 관계를 포함한다. 구차 문제는 서로 소인 두 집합들 사이의 비교를 포함한다.

성인들에게 있어서는 $3+\square=8$과 $\square+3=8$이 동일한 문제로 인식될 수 있지만, 덧셈을 처음으로 접하는 학생들에게는 서로 별개의 문제로 인식된다. 따라서 같은 유형의 문제일지라도 미지수가 어느 것이냐에 따라 학생들이 문제에 대하여 사고하는 방법과 해결하는 전략에 있어서는 엄청난 차이가 있고, 따라서 그 난이도도 다르게 된다. 덧셈과 뺄셈에 관한 기본 유형 4가지를 미지수가 무엇이냐에 따라 다음과 같이 11가지로 세분화할 수 있다(Carpenter et al. 1999. p. 12).

첨가 (Join)	(결과가 미지) Connie는 공깃돌을 5개 가지고 있고, Juan가 그녀에게 8개를 주었다. Connie는 공기돌을 모두 몇 개 가지고 있는가?	(가수가 미지) Connie는 공깃돌을 5개 가지고 있다. 그녀가 공깃돌을 모두 13개 가지기 위해서는 몇 개가 더 필요한가?	(피가수가 미지) Connie는 공깃돌을 몇 개 가지고 있는데, Juan가 그녀에게 5개를 더 주었다. 이제 그녀는 공깃돌을 13개 가지고 있다. 처음에 Connie는 공깃돌을 몇 개 가지고 있었는가?
구잔 (Separate)	(결과가 미지) Connie는 공깃돌을 13개 가지고 있었다. 그녀는 Juan에게 5개를 주었다. 새영에게 공깃돌이 몇 개 남았는가?	(감수가 미지) Connie는 공깃돌을 13개 가지고 있었다. 그녀는 Juan에게 몇 개를 주었다. Connie에게 공깃돌이 5개 남아 있다면, Connie는 Juan에게 공깃돌을 몇 개 주었는가?	(피감수가 미지) Connie는 공깃돌을 몇 개 가지고 있었다. 그녀는 Juan에게 5개를 주었다. 이제 그녀에게 공깃돌이 8개 남았다. 처음에 Connie는 공깃돌을 몇 개 가지고 있었는가?
합병 (Part-Part-Whole)	(전체가 미지) Connie는 빨간색 공깃돌을 5개 가지고 있고, 파란색 공깃돌을 8개 가지고 있다. 그녀가 가진 공깃돌은 모두 몇 개인가?	(부분이 미지) Connie는 공깃돌을 13개 가지고 있다. 5개는 빨간색이고 나머지는 파란색이다. Connie가 가진 파란색 공깃돌은 몇 개인가?	
구차 (Compare)	(차가 미지) Connie는 공깃돌을 13개 가지고 있다. Juan는 공깃돌을 5개 가지고 있다. Connie는 Juan보다 공깃돌을 몇 개 더 많이 가지고 있는가?	(비교량이 미지) Juan는 공깃돌을 5개 가지고 있다. Connie는 Juan보다 8개를 더 가지고 있다. Connie는 몇 개를 가지고 있는가?	(관계항이 미지) Connie는 공깃돌을 13개 가지고 있다. 그녀는 Juan보다 공깃돌을 5개 더 많이 가지고 있다. Juan가 가진 공깃돌은 몇 개인가?

2) 전략들을 발표하기

문제 해결은 일반적으로 해결 전략들을 공유하는 단계가 뒤따른다. 교사가 문제를 선정하고, 그것을 아동들에게 제시하고, 적절한 시간을 기다린 후에, 그는 아동들에게 그들이 문제를 어떻게 해결했는지를 학급 전체 혹은 소집단에 개별적으로 발표하게 한다. 한 아동이 한 가지의 풀이 전략을 발표했을 때, 교사는 다른 아동에게 어떻게 그 문제를 풀었는지를 발표하게 한다. 교사는 만약 다른 아동

이 그것을 다르게 풀었다면, 두 가지의 풀이가 어떻게 유사하거나 다른지 질문할 수도 있다. 몇몇 아동들이 자신들의 풀이 전략들을 발표하고 나머지 아동들이 그것들을 토의한 후에, 교사는 종종 첫 번째와는 다른 유형의 문제를 제시하고 전체적인 과정이 반복된다. 많은 경우에, 학생들은 한 시간 동안에 두 문제 내지 네 문제만 해결한다.

학생들이 사용하는 전략들을 알아보기 위해 위에서 예로 든 피가수가 미지인 첨가 문제를 예로 들어 살펴보자. 피가수가 미지인 문제는 최초의 양이 미지이고 따라서 표현될 수 없기 때문에 모델링하기가 어렵다. 몇몇 아동들은 이러한 문제들을 시행착오(Trial and Error)를 이용하여 해결하려고 한다(Carpenter et al. 1999. p. 17-18).

> Robin은 장난감 자동차가 몇 대 있다. 그녀의 친구가 그녀에게 생일 선물로 5대를 더 주었다. 그래서 그녀는 장난감 자동차를 11대 가지고 있다. Robin은 자신의 생일 날 이전에 장난감 자동차를 몇 대 가지고 있었나?
>
> Karla는 정육면체 조각을 3개 헤아린다. 그리고 나서 그녀는 처음의 모둠에 5개를 더해서 전체를 헤아린다. 전체가 11이 아니라 8이라는 것을 발견한 그녀는 정육면체 조각들을 되돌려 놓고 다시 시작한다. 이번에는 5개의 정육면체 조각 모둠을 만들고 그것에 5개를 더 더한다. 다시 그녀는 헤아리고, 자신의 첫 어림이 너무 작았다는 것을 깨닫는다. 이번에는 1만큼만 작다는 것을 깨닫고, 처음의 5개의 모둠에 1개를 더 보탠 후, 다른 5개 모둠을 그것에 더한다. 전체를 헤아린 후, 그것이 이제 11이 됨을 발견한다. 그려는 처음의 6개 정육면체 조각을 다시 헤아린다. "그녀는 생일날 이전에 6개를 가졌어요."라고 대답한다.

3) 학생들에 관하여 배우기

대부분의 교사들은 아동들의 사고에 관해 장기간에 걸쳐 계속 관찰하고 있기 때문에, CGI를 시작하기 위한 충분한 지식을 획득하는 것이 그렇게 어렵지 않다. 필요한 것은 아동의 사고 틀에 관한 초기 지식(앞에서 아동들의 반응을 예상한 다양한 문제 유형에 대한 지식과 아동들이 반응할 것으로 예상되는 일부 문제해결 전략들에 대한 지식)을 가지고, 아동들에게 문제를 해결하게 하고, 아동들이 자신들의 사고를 발표하게 하고, 아동이 발표하는 것을 주의 깊게 참관하는 것이다. 아동들의 지식은 특히 많은 문제해결 경험들을 하게 될 때, 지속적으로 변한다. 따라서, 아동에 관한 지식은 지속적으로 바뀌어야만 하고, 이것은 수업 시간에 아동을 관찰하고 그들의 목소리에 귀 기울임으로써 가능하다.

4) 변화를 관찰하기

학생들은 교사가 기대하는 것보다 훨씬 어려운 문제들을 해결할 수 있다. 연구자들(Carpenter et al. 1999)은 학생들이 덧셈과 뺄셈 문제들을 해결하기 위해 발명한 전략들에 대한 합리적이고 일관성 있는 밑그림을 규명했으며, 그것들이 시간이 지남에 따라 어떻게 전개되는지를 밝혔다. 아동들이 사용하는 가장 기본적인 전략은 각각의 문제에 기술된 행위나 관계를 직접적으로 모델링하기 위해

물리적인 사물들(산가지)과 손가락을 사용하는 것이다. 시간이 지남에 따라, 아동들의 전략은 보다 추상화되고 효율적이게 된다. 대부분의 아동들은 덧셈과 뺄셈 문제 해결 기능을 획득하는데 3가지 수준을 통과한다. 처음에 그들은 문제를 직접적인 모델링 전략(Direct Modeling strategies)에 의해서만 해결한다. 시간이 지남에 따라, 직접적인 모델링 전략은 보다 추상적인 헤아리기 전략(Counting strategies)으로 대체되고, 다시 그것은 수 구구(Number facts)를 이용하는 것으로 대체된다. 직접적인 모델링에서 헤아리기 전략으로의 변화는 갑자기 일어나지 않고, 아동들은 한 동안 두 가지 전략을 모두 사용할 수도 있다. 그와 유사하게, 아동들은 자신들이 직접적인 모델링이나 헤아리기 전략에 매우 의존적일 때에도, 2배나 합이 10이 되는 수와 같은 몇몇 수 구구들을 매우 일찍 학습하고, 수 구구의 사용도 장기간에 걸쳐 전개된다. 직접적인 모델링 전략과 헤아리기 전략을 학생들이 사용한 예를 들면 다음과 같다.

문제	직접적인 모델링 전략에 대한 설명	헤아리기 전략에 대한 설명
첨가(결과가 미지) Ellen은 토마토가 3개 있고, 토마토를 5개 더 땄다. Ellen은 토마토를 몇 개 가지고 있는가?	**모두 첨가하기** 사물이 3개인 한 집합과 5개인 한 모둠을 만든다. 그 모둠들을 합해서 두 집합의 합집합을 헤아린다.	**첫 번째 수부터 위로 헤아리기** 3에서 시작해서 5더 헤아린다. **큰 수부터 위로 헤아리기** 5에서 시작해서 3더 헤아린다.
첨가(가수가 미지) Chuck은 땅콩을 3개 가지고 있다. Clara가 그에게 땅콩을 몇 개 더 주었다. Chuck은 이제 땅콩을 8개 가지고 있다. Clara가 그에게 땅콩을 몇 개 더 주었는가?	**몇까지 첨가하기** 사물이 3개인 한 집합을 만든다. 전체 8개가 될 때까지 이 집합에 사물들을 추가한다. 정답은 더해진 사물들의 수를 헤아림으로써 발견된다.	**몇까지 위로 헤아리기** 3에서부터 8이 될 때까지 헤아린다. 정답은 헤아려진 수사(counting words)의 수이다.
구잔(결과가 미지) 8마리의 바다표범이 놀고 있었다. 3마리의 바다표범이 헤엄쳐 가버렸다. 몇 마리의 바다표범이 놀고 있는가?	**몇으로부터 빼기** 사물이 8개인 한 집합을 만들고, 3개를 제거한다. 답은 남은 사물의 개수이다.	**아래로 헤아리기** 8에서부터 시작해서 거꾸로 3번 헤아린다. 헤아리기 순서에서 마지막 수가 답이다.
구차(차가 미지) Megan은 스티커가 3장 있고 Randy는 8장 있다. Randy는 Megan보다 스티커를 몇 장 더 가지고 있는가?	**짝짓기** 사물이 3개인 집합과 8개인 집합을 만들고, 한 집합이 모두 사용되고 없을 때까지 1대1로 대응된다. 정답은 보다 큰 집합에 남아있는 대응되지 않은 사물들의 수이다.	**잘 사용되지 않음**
첨가(피가수가 미지) Deborah는 책을 몇 권 가지고 있는데 도서관에 가서 3권을 더 가지고 왔다. 그녀가 지금 모두 8권을 가지고 있다면 처음에 몇권을 가지고 있었는가?	**시행착오** 사물들로 이루어진 한 집합이 만들어진다. 3개의 사물로 이루어진 집합이 처음의 집합에 더해지고, 결과가 헤아려진다. 마지막 집합이 8이면 처음의 집합에 있는 사물의 수가 정답이다. 8이 아니면, 다른 처음의 집합이 만들어진다.	**시행착오** 어떤 한 수에서 3을 위로 헤아린 후에 마지막 수가 8이면 처음의 수가 정답이다. 8이 아니면 다른 수로부터 3을 위로 헤아려본다.

문장제 문제에 대한 학생들의 풀이는 모델링과 헤아리기 전략에만 국한되지 않는다. 학생들이 학교 안과 밖에서 수 구구를 학습함에 따라 이러한 지식을 문제를 해결하는데 활용할 수 있다. 아동들은 어떤 수 결합을 다른 것들보다 일찍 배우고, 그들은 문제에 대한 풀이를 유도하기 위해 기억된 수 구구들을 사용한다. 아동들은 일반적으로 2배(예를 들면, 4+4, 7+7)나 합이 10이 되는 결합(7+3, 4+6)과 같은 것을 비교적 일찍 배운다. 아동들이 유도된 수 구구를 사용하는 다음의 예를 살펴보자.

개구리 6마리가 백합 잎에 앉아 있었다. 8마리가 더 왔다. 그곳에는 개구리가 모두 몇 마리인가?

Rudy, Denise, Theo, Sandra가 거의 동시에 "14"라고 대답했다.
교사: 14마리가 있는지 어떻게 알았니?
Rudy: 6 더하기 6은 12이기 때문에, 2를 더 더하면 14이다.
Denise: 8 더하기 8은 16. 하지만 이 문제는 8 더하기 6이다. 그것은 2가 더 작고, 따라서 그것은 14이다.
Theo: 자, 나는 8에서 하나를 빼서 6에 주었다. 그러니까 7더하기 7이 되었고, 그것은 14야.
Sandra: 8에 2를 더 더하면 10이고, 4를 더 더하면 14이다.

5) 도구들과 조작 자료들을 사용하기

CGI 교실에서는 아동들이 도구로서 사용할 수 있는 자료들이 있다. 교사는 산가지, 종이, 연필과 10자리 개념을 나타낼 수 있는 자료(base-ten block, locking cubes)를 사용하게 할 수 있다. 하지만 이러한 자료들은 이전과는 다르게 사용된다. 전통적으로 조작 자료들은 CGI가 아닌 교실에서는 수학적인 아이디어들을 설명하기 위해서 사용되어 왔다. CGI 교실에서는 학습될 수학적 아이디어를 설명하기 위해 자료를 사용하는 대신에, 손가락, 산가지, 종이, 연필과 같은 모든 자료들은 아동들이 특정한 문제를 해결하기 위해서 선택할 수 있는 도구가 된다. 비록 도구들은 아동들이 문제를 해결하는데 유용하지만, 그것들은 또한 교사가 아동들이 생각하고 있는 것을 이해하려고 할 때, 교사에게도 유용하다.

3. CGI 교실들의 유사점

가르치는 것은 복잡한 것이다. 거의 매분 마다 교사는 무엇을 가르치고, 어떻게 가르치며, 누구를 개별적으로 지도하고, 진도를 얼마나 빨리 나가야 하며, 학생들에게 어떻게 반응해야 할 것인가 등에 관하여 의사결정을 해야 한다. 비록, 교수·학습에 관한 의사결정은 많은 것들(학교장, 부모들, 교과서 등)에 의존하지만, 교사가 학생들에 대하여 정확하고 자세히 알고 있으므로, 교실에서 무엇을 행할 것인가에 관한 당면한 의사 결정은 교사 이외의 어느 누구도 내릴 수 없다. 당면한 교수 결정이 교사 이외의 어느 누구에 의해서도 내려질 수 없기 때문에, CGI에서는 교실을 어떻게 구성하고, 교수를 어떻게 실행할 것인지에 관한 명확한 방침을 제공하지 않는다. 다만, CGI 교사들이 행한 것에 관한 몇몇 정보를 제공하며, CGI 교사들에 의해 개발된 교실들의 주요 유사점들을 제시한다.

1) 문제해결에 기초한 교육과정

CGI 교실에서, 모든 학습 활동들은 문제해결이 필요하다. 아동들은 이야기 상황에서 벌어지는 다양한 수학 문제들을 해결하면서 개념과 계산적인 기능을 배운다. 중요한 점은 각각의 아동이 수학적인 상황을 해결하기 위한 최상의 방법을 결정하는데 있어서 능동적으로 참여한다는 점이다. 문제 해결이 일어나는 것은 아동들이 수학적인 상황을 나타내기 위해서 전략을 결정하거나 그러한 전략을 실행할 때이다.

아동들이 문제 해결에 몰두할 때, 그들은 기능을 연습하고 동시에 개념을 학습한다. 학습되어야 할 내용이 명확하게 차례차례로 배열(뺄셈 이전의 덧셈, 등)되어 있고, 아동들이 문제를 해결하기 위해서 기능들을 사용하기 전에 그것들을 학습했던 전통적인 교수와는 달리, CGI 교실에서의 교육과정은 통합되어 있다. 예를 들어, 아동들은 정보의 단편으로서 수 구구(number facts)를 학습하지 않는다. 그것 보다는 그들은 문제를 반복적으로 해결함으로써 그것들을 학습하고, 따라서 그들은 다양한 수 구구들 사이의 관계를 알 수 있게 된다.

CGI 학급에 있는 아동들은 문제 해결을 통해 이해를 동반한 수학을 배운다. 문장제 문제들과 기호적인 문제들은 모두 아동들이 수학적인 개념과 기능을 학습하기 위한 수단이다. 교사들은 아동의 발달을 촉진시키도록 문제를 선정하기는 하지만, 대부분의 경우에, 교사들은 문제 해결 전략을 명확히 지도하지는 않는다. 대신에 아동들은 자신들만의 문제해결 전략들을 개발하는데, 그것은 교사가 일방적으로 제공하는 전략들보다 효율적이거나 몇 배나 추상적일 수도 있다. 기능들과 수 구구들은 문제 해결 과정 중에 학습되고, 따라서 정보의 단편으로서 학습되기 보다는 이해를 동반하여 학습된다.

2) 의사 소통을 위한 분위기 조성하기

근본적으로 문제가 어떻게 풀렸는가에 대해 학생들이 발표하는 것은 쉬운 일이 아니다. 하지만, 학생들이 자신들의 전략들을 발표하는 많은 경험들을 하게 됨에 따라 그것은 보다 쉬워진다. 아동들은 지속적으로 자신의 사고를 발표하도록 요구되고, 자신들의 동료들은 다른 학생의 사고를 듣고 존중하도록 기대된다. 점차적으로, 아동들은 자신들의 사고가 중요하다는 것을 인식하게 되고, 수학을 행하는 과정을 가치롭게 생각하게 된다.

어떤 문제를 해결하는 "단 하나의 최상의 방법" 혹은 "옳은 방법"은 없다는 것에 대한 점진적인 이해는 각각의 아동의 사고를 존중해주는 생각과 밀접하게 관련되게 된다. 잘 작동하고 있고 설명될 수 있는 전략은 중요하고 정당하다. 교사가 다양한 풀이 전략들을 기대하고 존중할 때, 아동들은 여러 개의 전략들이 받아들여질 수 있을 뿐 아니라 바람직하다는 것을 깨닫는다. 따라서 어떤 풀이 전략도 다른 것보다 더 훌륭할 수 없으며, 각각의 아동의 사고는 모든 사람에게 중요해진다.

3) 이해를 위한 교수

이해는 관계를 찾는 것과 동의어이기 때문에, 관계를 강조하는 것은 이해를 신장시키는데 도움이

된다. 아무도 지식을 다른 이에게 전달할 수 없다. 개개인은 관계를 구성함으로써 이해를 개발해야만 한다. 이것은 교사가 아동에게 어떤 것도 말할 수 없다는 것을 의미하지는 않는다; 때때로 관계를 구성하는 최상의 방법은 다른 이에게 그것을 지적하게 하는 것이다. 하지만, 아동에게 뭔가를 말해 줄 때조차도, 그들이 이해하기 위해서는 관계를 파악할 수 있어야만 한다.

관계성이 강조될 수 있는 방법에 대해 생각해 보자. 아동들에게 다음과 같은 문제를 해결하게 할 수 있다.

> Maria는 금붕어를 8마리를 가지고 있고, Andy는 7마리를 가지고 있다. 그들은 금붕어를 모두 몇 마리 가지고 있는가?
> Andy는 조개를 15개 발견했다. 그는 Maria에게 8개를 주고 나머지를 가졌다. 그는 몇 개나 가지고 있는가?

두 문제는 똑 같은 수를 포함하고 있다. 아동들이 이와 같은 문제를 풀 때, 그들은 8, 7, 그리고 15 사이의 관계를 인식하기 시작한다.

Ⅲ. CGI의 효과에 대한 고찰

인지적으로 안내된 교수는 학생들의 수학적 사고의 발달; 그러한 발달에 영향을 미치는 교수; 교수 실제에 영향을 미치는 교사의 지식과 신념들; 교사의 지식, 신념들, 실제들이 학생들의 수학적 사고에 대한 이해에 의해 영향을 받는다는 점에 초점을 둔 통합된 연구 프로그램이다. CGI는 아동의 수학적 사고의 발달에 관한 명확한 지식(Carpenter 1985)으로부터 시작되었으며, 그것을 학생들의 수학적 사고에 대한 교사들의 지식(Carpenter et al. 1988)을 연구하기 위한 맥락과, 교사가 학생의 사고에 대한 지식을 교수 판단(Carpenter et al. 1989)을 내리는데 사용했다. CGI프로그램에 참여하지 않은 교사들은 아동의 수학적 사고에 관하여 직관적으로 많이 알고 있다고 하더라도, 그것은 단편적이었고, 결과적으로 대부분의 교사의 의사결정에 중요한 역할을 하지 못했다는 것을 발견했다(Carpenter et al. 1988). 만약 교사들이 학생들의 사고에 관한 자신들의 지식에 기초하여 수업을 계획하려면, 그들은 교수 결정을 내리기 위한 일관된 기초가 필요하다. 이러한 문제를 역점을 두어 다루기 위해, Capenter 등은 교사들이 범 자연수의 연산 내용 영역에서 아동의 수학적 사고의 발달에 관한 개념적인 지도를 구성하도록 돕기 위해 CGI를 설계했다(Carpenter, Fennema, and Franke 1996).

일련의 연구(Carpenter et al. 1989; Fennema et al. 1993; Fennema et al. 1996)에서 아동의 수학적 사고의 발달을 이해하기 위해 학습하는 것이 교사의 신념과 실제에 있어서의 근본적인 변화를 이끌 수 있고, 이러한 변화들이 학생들의 학습에 반영되었음을 발견했다.

CGI의 연구 분야를 다음과 같이 4가지 분야로 나누어 볼 수 있겠다: (a) 아동의 사고에 대한 연구, (b) 아동의 사고에 관한 교사의 지식과 신념, (c) 교사의 지식과 신념, 실제에 대한 CGI 전문 개

발 프로그램의 효과, (d) CGI 교실에서의 학생들의 성취와 관련한 연구. CGI를 위한 기초인 아동의 사고에 대한 모델은 광범위한 연구 토대에 의해 만들어졌다는 점을 지적하면서 생략하고, 나머지 연구 분야에 대한 연구 결과들을 요약하면 다음과 같다.

1. 아동의 사고에 관한 교사의 지식과 신념

CGI의 전문 개발 프로그램(PDP)에 참여하지 않았던 교사들에 대한 연구에서, 교사들이 아동의 수학적 사고에 관하여 많은 직관적인 지식을 가지고 있다는 것을 발견했다; 하지만, 그러한 지식이 단편적으로 이루어져 있어서, 그것이 대부분의 교사들의 교수·학습과 관련한 의사 결정에서 중요한 역할을 하지 못했다(Carpenter et al. 1998). 이 연구는 또한 학생들의 사고에 대한 교사의 지식이 학생의 성취와 관련되어 있다는 것을 보여주었다. 학생의 사고에 관해 더 많은 것을 알고 있는 교사들의 학생들은 문제 해결에서 그렇지 못한 교사들의 학생들보다 더 높은 성취수준을 보였다.

2. 교사의 지식, 신념, 교수에 대한 CGI 전문 개발 프로그램에 참여한 효과

교사에 대한 CGI 전문 개발 프로그램의 효과를 조사한 첫 번째 연구에서, 1학년 교사들을 대상으로 덧셈과 뺄셈에 전적으로 초점을 맞추었다(Carpenter et al. 1989). 그 연구는 20명의 CGI 교사들과 20명의 통제집단 교사들을 비교하는 실험적인 연구였는데, CGI 교사들이 통제집단 교사들 보다 문제 해결을 더 많이 강조하고, 계산적인 기능을 덜 강조하였으며, 단 하나의 방법보다는 다양한 풀이 전략들을 기대했고, 학생들에게 더 많이 귀 기울였고, 학생들의 사고에 관하여 더 많은 것을 알고 있었다.

초기의 실험 연구가 서로 다른 교사 집단을 비교했던 것에 반해서, 21명의 교사에 대한 3년간의 장기간의 연구(Fennema et al. 1996)는 CGI 교사가 되는데 있어서 신념과 실제에서의 몇 가지 수준들을 규명하였다. 그것을 정리하면 다음과 같다.

수준	교사의 행동 특성
1수준	교사들은 아동들이 수학을 어떻게 행하는지 명확하게 지도될 필요가 있다고 믿음. 교수는 일반적으로 채택된 교재에 의해 안내되고 특별한 기능을 학습하는데 초점을 맞춤. 교사들은 단계들을 일반적으로 설명하고, 아동들을 그러한 절차들을 적용하는 것을 연습함. 아동들은 표준화된 절차들을 사용하여 문제를 해결하도록 기대되고, 대안적인 풀이에 대한 토의가 거의 없거나 전혀 없음.
2수준	교사들은 문제를 해결하기 위해 아동들에게 명확하게 지도해야 하는지에 대하여 회의를 품기 시작하고, 아동들에게 자신들의 전략들을 사용하여 문제를 해결하게 하거나 특별한 방법을 보여주기도 함.
3수준	아동들에게 어떤 전략들을 지도하지 않고도 그들이 문제를 해결할 수 있다고 믿고, 그에 맞게 행동함. 그들은 아동들이 모방해야 하는 절차들을 제시하지 않고, 아동들은 대부분의 수학 시간을 다양한 문제들을 해결하고 발표하는데 보냄. 아동들은 다양한 전략들을 발표하고, 서로 다른 전략들을 비교하고 대비함. 처음의 실험 연구에서 CGI 교사들을 통제집단의 교사들로부터 구분하는 특징임.
4수준	교사들이 학생들을 경청함으로써 배웠던 것을 교수 판단을 내리는데 사용. 수준 3의 교사들은 아동들의 사고에 대한 자신들의 이해를 적절한 문제를 선정/ 적용하고, 학생들의 사고를 정확하게 평가하는 반면에, 4a와 4b 수준의 교사들은 교실에서의 아동들의 사고의 관점에서 교수를 개념화함.

장기적인 연구에서 연구 말기에 21명의 교사들 중의 19명이 3수준이거나 보다 높은 수준(7명이 4a와 4b 수준이었다)이었다. 21명의 교사들 중의 18명이 신념과 실제에 있어서 적어도 한 수준이 변했고, 12명이 적어도 2 수준이 변했다.

3. 학생들의 성취

처음의 실험 연구(Carpenter et al. 1989)에서, CGI 학급이 통제집단의 학급 보다 문제 해결에서의 성취도에 있어서 유의미하게 높은 수준임을 발견했다. 비록 CGI 학급에서는 수 기능에 대하여 덜 강조했음에도 불구하고, 수 기능에 대한 시험에서 두 집단의 성취도 사이에는 아무런 차이가 없었다. 사실, CGI 학생들이 통제 집단의 학생들보다 수 기능을 더 잘 회상했다는 몇몇 증거들이 있다. 또한 표준화된 성취도 검사가 이 연구에서 실시되었는데, CGI 학급과 통제집단 학급 사이에 아무런 차이가 없었다.

장기적인 연구(Fennema et al. 1996)는 처음의 실험 연구의 결과들을 확장했다. 그 연구의 3년째까지 모든 교사의 수업의 개념과 문제 해결 수행은 연구의 시작 때 그들이 수행했던 것 보다 본질적으로 높았다. 기능에 있어서의 전반적인 수행은 변하지 않았다. CGI 학급에 보다 장기간 참여한 학생들은 그 연구의 2년째와 3년째 동안에 상급 학년에서 더 많은 성과를 보이면서 개념과 문제 해결에서의 향상된 수행은 누적적인 것처럼 보인다. 학생의 성취에 있어서의 변화들은 교사의 실제에 있어서의 변화를 반영했다. 그 연구에 참여한 각각의 교사들에게 있어서, 학생들의 개념과 문제 해결에 있어서의 수행의 본질적인 향상은 교사의 실제적 수준(앞에서 언급한 4수준)에 있어서의 변화를 직접적으로 따랐다.

Ⅳ. 나가며

본 논문에서는 최근에 아동의 비형식적이고 직관적인 지식을 중시하는 4가지의 접근 방법을 간단히 소개한 후, 인지적으로 안내된 교수를 위한 요소들을 소개하였다. 인지적으로 안내된 교수는 아동의 비형식적이고 직관적인 지식이 교사의 교수 판단의 기초가 되어야 함을 시사한다. 따라서, 학생들이 접하게 될 다양한 문제 상황들을 고려하고, 그러한 문제들에 대해 학생들이 어떻게 반응하는지, 어떤 곤란을 느끼는지를 파악하여 학생들 스스로 문제를 해결할 수 있도록 도움을 제공한다.

CGI로 수업을 했을 때, 교사들은 기존에 단편적으로 알고 있던 학생들의 비형식적인 지식들을 통합하여 체계화함으로써 교수·학습에 관한 의사결정에 영향을 미칠 수 있었고, 교사가 학생들의 사고에 관해 더 많이 알고 있을 때 학생의 성취 수준이 높았다. 또한 학생들의 성취 수준에 있어서도 기능에 대한 강조가 덜 이루어졌음에도 불구하고 통제집단과 별다른 차이가 없었으며, 오히려 개념과 문제 해결 수행에서 더 높은 성취도를 보였다.

CGI에서는 교사가 다양한 문제 상황들과 난이도, 학생들이 사용하게 될 전략들을 미리 고려하는

것이 중요하다. 그렇다면 우리나라의 교과서와 교사용 지도서는 어떠한가? 우리나라 교과서에서는 덧셈과 뺄셈 단원에서는 결과나 차가 미지인 것만을 다루고 있고, 문자와 식(문제해결) 단원에서는 가수나 피가수, 감수나 피감수가 미지인(□로 표현함) 문장제 문제들을 다루고 있다. 그런데 교과서의 배열 상 어려운 내용이 뒤에 나온다고 보았을 때, 우리나라의 교과서는 피감수가 미지인 문제를 감수가 미지인 문제보다 앞서 다룸으로써 피감수가 미지인 문제가 더 해결하기 쉽다고 판단하는 것 같다. 또한, 교사용 지도서에서는 학생들의 다양한 예상 반응을 제시하지 않고 교사들에게 단지 다양하게 해결할 것을 요구하는 것으로 일관하고 있다. 따라서 교사 측면에서는 학생들이 어떻게 문제를 해결할 것인가에 대한 밑그림이 그려지지 않은 상태에서 지도함으로써 자신들의 수준에서 문제를 해결한 방법을 학생들에게 강요하고 있다. 한 예로 초등교사가 사용한 교과서 중에 가수나 피가수가 미지인 덧셈 문제를 뺄셈의 역 연산으로만 해결한 경우가 있었다. 따라서, 우리나라의 교과서나 교사용지도서는 학생들의 비형식적인 지식을 잘 고려한 교재라고 보기 어렵다.

마지막으로 본 논문을 통하여 제언하면, 첫째 앞에서 소개한 예들은 우리나라의 상황이 아닌 관계로, 우리나라 학생들이 어떠한 비형식적인 지식을 가지고 있는가에 대한 실질적인 연구가 이루어져야겠다. 둘째, 본 논문에서는 범 자연수의 연산만을 예로 제시하였는데, 그러한 분야를 초월하여 도형이나 확률과 같은 수학의 전 분야에 대한 연구도 필요하다고 판단된다.

참 고 문 헌

Brown, J.S.; A. Collins & P. Duguid (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher*, **18(1)**, pp.32-42.

Carpenter, T.P. (1985). Learning to Add and Subtract: An Exercise in Problem Solving. In *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, edited by E. A. Silver. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T.P.; E. Fennema & M.L. Franke. (1996). Cognitively Guided Instruction: A Knowledge Base for Reform in Primary Mathematics Instruction. *The Elementary School Journal* **97(1)**, pp.3-20.

Carpenter, T. P.; E. Fennema; M.L. Franke; L. Levi & S.B. Empson. (1999). *Children's Mathematics : Cognitively Guided Instruction*, Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T.P.; E. Fennema; P.L. Peterson; D.A. Carey (1988). Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Students' Problem Solving in Elementary Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education* **19**, pp.385-401.

Carpenter, T.P.; E. Fennema; P.L. Peterson; C.P. Chiang & M. Loef. (1989). Using Knowledge of Children's Mathematics Thinking in Classroom Teaching: An Experimental Study.

American Educational Research Journal **26(4)**, pp.499-531.

Carpenter, T.P.; M.L. Franke; V. Jacobs & E. Fennema. (1998). A Longitudinal Study of Invention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education* **29**, pp.3-20.

Cobb, P., E. Yackel & T. Wood (1992). A Constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, **23(1)**, pp.2-33.

Fennema, E.; T.P. Carpenter ; M.L. Franke; L. Levi; V. Jacobs & S. Empson. (1996). Learning to Use Children's Thinking in Mathematics Instruction: A Longitudinal Study. *Journal for Research in Mathematics Education* **27(4)**, pp.403-434.

Fennema, E.; M.L. Franke; T.P. Carpenter & D.A. Carey. (1993). Using Children's Knowledge in Instruction. *American Educational Research Journal.* **30(3)**, pp.555-583.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* Culemborg; Techipress.

NCTM(1998) *Principles and standards for school mathematics*: Discussion draft.