韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 11집, 2001. 1. 389-401.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 11, Jan. 2001. 389-401.

삼각형을 활용한 창의성 신장을 위한 학습 자료 개발[1)]

한 인 기 (경상대학교)
신 현 용 (한국교원대학교)

삼각형은 초·중등학교 수학교육에서 가장 기본적인 평면도형들 중의 하나지만, 삼각형을 활용한 다양한 유형과 수준의 교수-학습 자료들은 많이 개발되어 있지 않다. 특히, 정형적인 교수-학습 활동을 포함하여 학습자들의 창의적 성향을 개발·육성하는데 도움을 줄 수 있는 자료들은 그리 흔치않은 실정이다. 본 연구에서는 삼각형을 창의성 신장을 도구로 활용하여, 다양한 구체적 조작 활동에서부터 다양한 형식적인 논증의 경험을 제공할 수 있는 창의적 학습 자료를 개발할 것이다.

1. 서 론

최근 들어, 사회 각 분야에서 창의성 신장에 관련된 많은 논의가 이루어지고 있으며, 수학교육 분야에서도 창의성의 개발·육성에 대한 많은 연구들이 진행되고 있다. 비록, 창의성 신장과 관련된 포괄적이고 일반적인 영역의 자료들은 비교적 수월하게 제시할 수 있지만, 관련 영역을 제한하여, 예를 들어 수학 교과의 도형이나 수와 같은 수학적 대상을 활용하여 창의성을 구성하는 변인들을 개발·육성할 수 있는 구체적인 자료의 개발은 그리 쉬운 일은 아니다.

수학 교육 분야에서 창의성 신장과 관련된 최근까지의 연구들을 살펴보면, 신현용·한인기(1999)는 문헌 연구를 통해 창의성의 본질, 창의성에 영향을 미치는 변인들, 그리고 이에 상응하여 창의력 신장을 위한 학습 자료 선정 및 개발을 위한 준거를 제시하였다. 한편, 신현용·이종욱·한인기(1999)는 초등학교 수준에서 창의성을 신장하기 위한 몇몇 자료들을 개발하여 소개하였고, 김원경·김미월·김용대(1999)는 중학교 수준에서, 신인선·안대영·이봉주(1999)는 고등학교 수준에서 수학교육과 관련된 창의성 신장을 위한 다양한 유형의 학습 자료들을 개발하였다. 특히, 개발된 학습 자료들은 우수 아동들을 대상으로 활용되어 유창성, 융통성, 독창성이라는 측면에서 유의미한 효과가 있었음이 보고되었다(신현용·김원경·신인선·한인기, 2000).

이러한 연구들에서 개발된 학습 자료들을 살펴보면, 활용된 다양한 소재들(예를 들어, 퍼즐, 게임들, 펜토미노, LOGO 프로그램의 활용, Excel 프로그램의 활용)을 활용하여 수학 교육의 연구 영역의 폭을 넓혔다는 측면에서는 큰 의미를 둘 수 있지만, 개발된 자료들의 체계성, 그리고 구체적인 활동과 형식적인 논증의 연결성 부분에서는 미흡함을 발견할 수 있다. 특히, 이러한 연구들이 영재 교육을 위한 목적으로 개발되었기 때문에, 일반 교수-학습을 위한 보조 자료로 사용되기에는 어려운 것

1) 이 논문은 2000년 교육부 학술연구 조성비에 의하여 연구되었음.

들도 있었다.

본 연구는 창의성 신장을 위한 수학 교수-학습 자료 개발 연구의 확장으로써, 일반 아동들에게 창의성을 신장시킬 수 있는 수학 교수-학습 보조 자료를 개발하는 것을 목적으로 한다. 특히, 본 연구에서는 자료 개발에 사용되는 대상을 삼각형으로 제한하여, 다양한 종류의 수학 교수-학습 자료 개발보다는 한 가지 대상에 대한 다각적인 측면과 수준의 탐구 방법을 제시하여, 수학적 대상으로서의 삼각형에 대한 깊이 있는 통찰을 제공할 수 있도록 할 것이다.

2. 삼각형들의 결합을 이용한 자료 개발

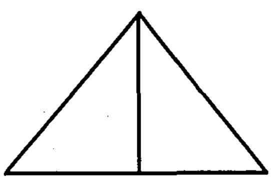
도형에 대한 학습이나 도형의 인식은 주어진 도형을 단순히 시각적으로 수용하는 것보다는 도형들을 결합하거나 분할하는 것과 같은 구체적이고 조작적인 직접적, 혹인 인지적 활동을 통해 활성화될 수 있다.

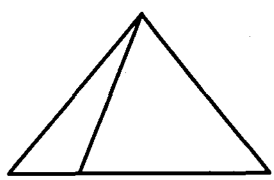
본 활동에서는 주어진 삼각형들을 결합하여 다양한 도형들을 만들 수 있는 기회를 가질 것이다. 이러한 활동의 가장 바탕에는 인지적 조작으로서의 분석과 종합(인지적 조작으로서 분석과 종합에 대해서는 구세프·한인기(1996)를 참조할 것)적 활동이 바탕을 이루며, 이러한 활동들이 수학적 재능의 개발·육성에 커다란 영향을 미친다는 것은 이미 많은 학자들에 의해 주장되었다. 특히, 삼각형들 사이의 위치 관계에 대한 분석, 그리고 삼각형들끼리 겹치게 놓을 때와 그렇지 않은 경우에 꼭지점과 변의 위치에 관한 고찰, 그리고 다양한 도형들에 대한 폭넓은 상상력을 기를 것이다. 이제 개발된 구체적인 활동 내용을 살펴보자.

(1) 두 삼각형을 겹치지 않게 붙여 놓는 경우

활동 1. 두 삼각형을 겹치지 않게 붙여놓아 한 삼각형을 만들려고 한다. 어떤 삼각형을 어떻게 붙여 놓아야 하는가? 작도하고, 설명하여라[2].

풀이. 두 삼각형으로 한 삼각형을 만들려면, 두 삼각형들이 적어도 한 변이 같아야 하며, 그림 1과 같이 얻을 수 있다.


<그림 1>

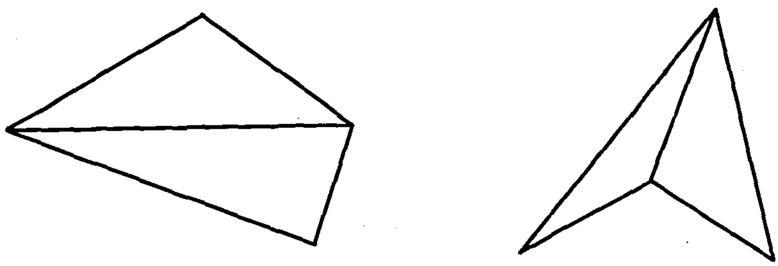

<그림 2>

2) 이 문제의 해결 과정에서 구체적으로 삼각형을 학생들에게 제시하여 활동하도록 할 것인가, 아닌가는 학생들의 수준과 능력에 따라 교사가 결정할 수 있다.

활동 1에서 교사가 고려해야 할 것들 중의 하나는 많은 학생들이 그림 1과 같은 해답을 많이 생각하게 되는데, 그림 2와 같은 풀이도 생각할 수 있도록 토론을 통해서나, 많은 학생들에게 자신들의 풀이에 대한 발표 기회를 풍부하게 준다.

활동 2. 두 삼각형을 겹치지 않게 붙여놓아 사각형을 만들려고 한다. 어떤 삼각형을 어떻게 붙여놓아야 하는가? 작도하고, 설명하여라.

풀이. 두 삼각형으로 사각형을 만들려면, 두 삼각형들이 적어도 한 변이 같아야 하며, 그림 2와 같은 방법으로 얻을 수 있다.

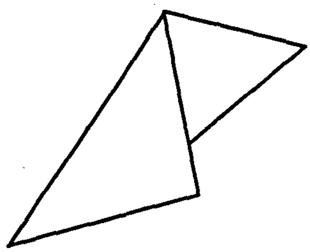


<그림 3>

활동 2는 결과적으로 학생들이 흔히 접하는 문제인 '볼록(혹은 오목) 사각형을 두 개의 삼각형으로 나누어라'는 것과 같은 풀이를 가지지만, 활동 2에서와 같이 다른 방식으로 진술하고, 다른 방법으로 접근하여 해를 찾도록 학생들에게 요구한다면, 학생들은 같은 소재를 가지고 다양한 경험을 할 수 있을 것이다.

활동 3. 두 삼각형을 겹치지 않게 붙여놓아 5각형을 만들려고 한다. 어떻게 붙여 놓아야 하는가?

풀이

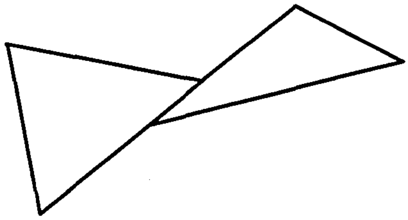


<그림 4>

학생들에게 활동 3은 이미 활동 1, 2와는 다른 어려움을 주는데, 그 이유들 중의 하나는 학생들이 오각형에 구체적인 조작의 경험이 많지 않기 때문에, 두 삼각형으로 오각형을 만든다는, 게다가 오목한 오각형을 만들 수 있다는 것을 찾아내는 것은 쉽지는 않다.

활동 4. 두 삼각형을 겹치지 않게 붙여놓아 6각형을 만들려고 한다. 어떻게 붙여 놓아야 하는가?

풀이.

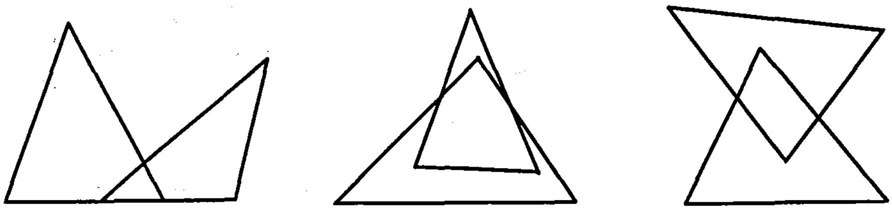


<그림 5>

(2) 두 삼각형을 겹치게 붙여 놓는 경우

활동 5. 두 삼각형을 포개지게 붙여 놓아 5각형을 만들려고 한다. 어떻게 붙여 놓아야 하는가?

풀이. 주어진 문제는 다음과 같은 세 가지의 풀이를 가진다.

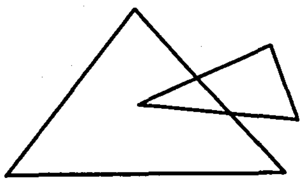


<그림 6>

활동 5는 다양한 해를 가지고 있기 때문에, 학생들과의 많은 활동을 통해 학생들 스스로 다양한 해를 찾을 수 있도록 하는 것이 바람직하며, 특히 이때 학생들이 구한 해들 중에서 삼각형들의 위치가 같은 것이 어느 것인가, 즉 같은 해이지만 그림만 약간 틀려지게 그려 얻어진 해가 어느 것인가를 구별해 보도록 하는 것도 흥미로운 활동이 될 것이다.

활동 6. 두 삼각형을 포개지게 붙여 놓아 7각형을 만들려고 한다. 어떻게 붙여 놓아야 하는가?

풀이.

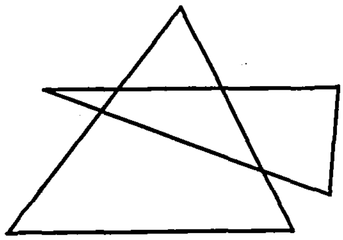


<그림 7>

두 삼각형을 포개지게 붙여 놓아 9각형을 만들 수도 있으며, 그림 7과 유사한 위치 관계를 가지는 다음과 같은 문제도 생각할 수 있다.

활동 7. 두 삼각형을 포개지게 붙여 놓아 10각형을 만들려고 한다. 어떻게 붙여 놓아야 하는가?

풀이.

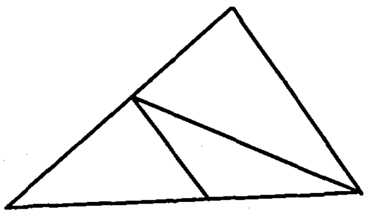


<그림 8>

(3) 세 개의 삼각형을 겹치지 않게 붙여 놓는 경우

활동 8. 세 삼각형을 겹치지 않게 붙여놓아 한 삼각형을 만들려고 한다. 어떤 삼각형을 어떻게 붙여 놓아야 하는가?

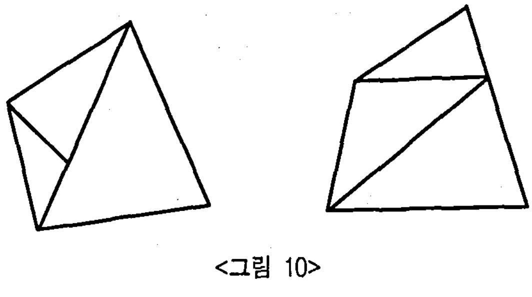
풀이. 세 개의 삼각형을 겹치지 않게 붙여 놓아 삼각형 하나를 만드는 과정에서 활동 1의 풀이가 도움을 줄 수가 있다. 물론, 학생들 중에서는 역으로 삼각형 하나를 분할하여 세 개의 삼각형이 되도록 하여 해를 찾는 경우도 있을 것이다.



<그림 9>

활동 9. 세 삼각형을 겹치지 않게 붙여놓아 사각형을 만들려고 한다. 어떤 삼각형을 어떻게 붙여 놓아야 하는가?

풀이. 주어진 활동에 대한 해결 방법은 다음과 같이 두 가지 경우가 가능하다. 이 두 가지 경우는 앞에서 풀었던 문제들로부터 그 아이디어를 얻을 수 있는데, 이것은 학생들이 스스로 문제해결의 아이디어를 탐구할 수 있는 기회를 제공할 수 있다는 측면에서 매우 바람직하다. 활동 1과 2의 그림에 다음과 같이 삼각형을 붙이면, 구하는 도형을 얻게 된다.



<그림 10>

이밖에도 다음과 같은 활동들을 생각할 수 있다.

활동 10. 세 삼각형을 겹치지 않게 붙여놓아 6각형을 만들려고 한다. 어떻게 붙여 놓아야 하는가?

활동 11. 세 삼각형을 겹치지 않게 붙여놓아 7각형을 만들려고 한다. 어떻게 붙여 놓아야 하는가?

게다가, 세 개의 삼각형을 겹치게 붙여 놓아 만들 수 있는 도형들에 대해 생각한다면, 우리들은 학생들의 삼각형에 관련된 지적 활동을 유발시킬 수 있는 아주 많은 문제들을 만들어 낼 수 있는데, 이것도 본 연구를 통해서 개발된 자료의 장점들 중의 하나이다. 왜냐 하면, 어떤 학습 자료가 다양한 수준에서의 인지 활동을 활성화시키고, 주어진 대상을 여러 가지 측면에서 탐구할 수 있는 기회를 제공하기 위해선, 관련된 많은 학습 과제들이 필요하기 때문이다.

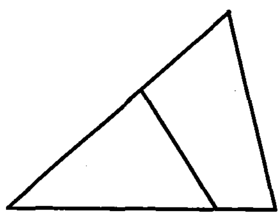
3. 직선을 이용하여 삼각형들로 절단

방금 전에 우리는 두 개, 혹은 세 개의 삼각형들을 결합하여 새로운 도형을 만드는 활동을 통해, 주어진 대상을 다양한 측면에서 관찰하고 많은 결합을 통해 원하는 해답을 구하는 창의적인 활동의 경험을 가졌다. 이제는 주어진 삼각형을 주어진 개수만큼의 직선을 이용하여 분할하여, 원하는 개수만큼의 삼각형을 얻는 활동을 살펴보자.

(1) 직선을 하나 긋는 경우

활동 12. 주어진 삼각형에 직선을 하나 그어, 두 개의 삼각형이 되도록 하여라.

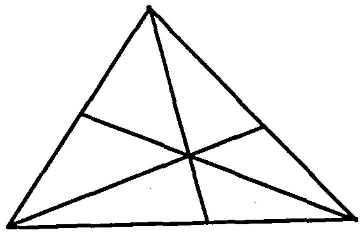
풀이. 이러한 유형의 문제해결 과정에서 가장 두드러진 인지 활동이 분석이다. 즉, 어떤 결론을 얻기 위해 원인을 찾는 인지 활동으로서의 분석. 이러한 유형의 분석은 고대의 Pappus로부터 데카르트를 거쳐 현재까지도 활발하게 연구되고 있다. 우선, 이 문제의 풀이를 살펴보고 약간의 논의를 더 하여 보자.



<그림 11>

이러한 유형의 문제는 종합적 활동의 성격이 강한 다음과 같은 활동 13와 대응된다(물론, 이러한 유형의 문제를 풀기 위해서는 알고리즘적인 측면에서의 사고도 필요함). 활동 12에서는 원하는 개수의 삼각형을 얻기 위해 적당한 위치에 직선을 작도해야 하는 문제이지만, 활동 13에서는 이미 주어진 조건으로부터 체계적인 세기를 통해 결론을 얻어내는 활동이 중심을 이룬다.

활동 13. 주어진 그림에서 삼각형은 모두 몇 개인가?

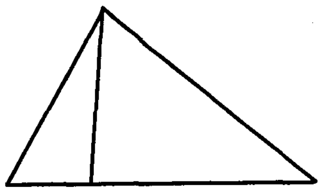


<그림 12>

이제, 다른 예들을 살펴보자.

활동 14. 삼각형에 직선을 하나 그어 세 개의 삼각형을 얻도록 하여라.

풀이.



<그림 13>

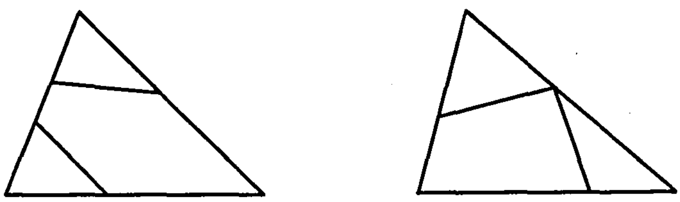
특히, 활동 14에 대한 문제해결 이후에 활동 12의 풀이와 비교하는 활동은 매우 의미로울 것이다. 왜냐하면, 직선이 꼭지점을 지나는가 변을 지나는가에 따라 얻어지는 삼각형의 개수가 틀려지기 때문이다.

(2) 직선을 두 개 긋는 경우

우리는 방금 전에 삼각형에 직선을 하나 긋는 경우를 통하여, 직선이 꼭지점을 지나는 경우와 변을 지나는 경우에 대해 약간의 정보를 얻을 수 있었다. 이를 바탕으로 다음과 같은 문제들에 대해 조작적으로 접근할 수 있다.

활동 15. 삼각형에 직선을 두 개 그어, 세 개의 삼각형을 얻도록 하여라.

풀이.



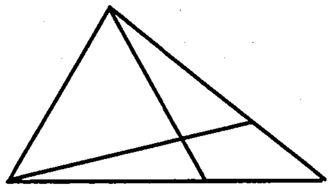
<그림 14>

이밖에도 삼각형에 두 개의 직선을 그어 네 개의 삼각형, 다섯 개의 삼각형, 여섯 개의 삼각형 등

을 얻도록 할 수 있다. 한 가지 예를 더 살펴보기로 하자.

활동 16. 삼각형에 직선을 두 개 그어, 여덟 개의 삼각형을 얻도록 하여라.

풀이.



<그림 15>

물론, 활동 16은 여덟 개의 삼각형을 얻도록 두 개의 직선을 긋는 방법을 찾아내는 문제로써 뿐만 아니라, 활동 13과 같이 주어진 작도에서 원하는 도형을 찾아 그 수를 체계적으로 헤아리는 방법을 묻는 문제로도 사용될 수 있다.

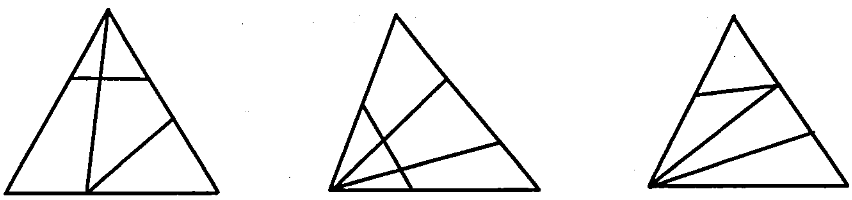
(3) 세 개의 직선을 긋는 경우

주어진 삼각형에 긋는 직선의 개수를 늘려가면서 우리는 주어진 활동에 대한 난이도를 적절하게 조정할 수 있다. 물론, 이때 얻어지는 삼각형의 개수도 앞의 두 가지 경우보다 훨씬 더 다양하고 많은 해들을 포함하고 있다.

주어진 삼각형에 세 개의 직선을 그어 세 개, 네 개, 다섯 개, 여섯 개, 일곱 개, 그리고 그 이상의 개수를 가지는 작도를 할 수 있으며, 그 해 또한 다양하여 학생들이 다각적인 측면에서 삼각형과 작도되는 도형들 사이의 관계를 분석하고, 학생들 사이의 활발한 토론을 유도할 수 있다. 이제, 한 가지 예를 살펴보자.

활동 17. 삼각형에 직선을 세 개 그어, 여덟 개의 삼각형을 얻도록 하여라.

풀이. 아홉 가지 경우의 풀이를 찾을 수 있지만, 본 고에서는 세 가지 경우를 제시할 것이다.



<그림 16>

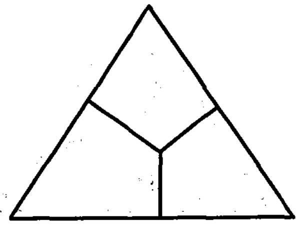
이러한 학습 자료들은 학생들에게 다양한 시각에서 주어진 대상으로 관찰하도록 하는 분석적 사고력을 길러줄 뿐만 아니라 많은 해가 존재하고 이를 찾을 수 있도록 하는 조장하는 사고의 유연성을 길러줄 수 있다.

4. 도형의 분할에 관련된 몇 가지 활동과 논증

이제, 삼각형을 선분들을 이용하여 다른 도형들로 분할하는 활동을 살펴보자. 특히, 본 주제에서는 구체적인 분할에 대한 탐구 활동으로부터 엄밀한 논증으로의 확장을 제시하고 있다. 이를 통해, 논증이 교과서에 제시된 인위적인 상황에 대한 타당성을 마련해 주는 도구로서 뿐만 아니라, 실제 활동 과정에서 발생하는 문제에 대한 탐구의 한 수단이 될 수 있음을 인식하도록 도와줄 것이다.

활동 18. 삼각형을 볼록 사각형들로 분할할 수 있는가?

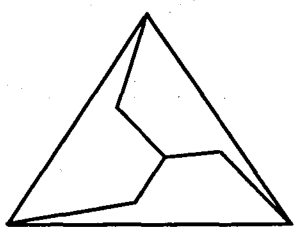
풀이. 삼각형을 볼록 사각형으로 분할한 예를 제시하면 다음과 같다.



<그림 17>

활동 19. 삼각형을 오목 오각형들로 분할할 수 있는가?

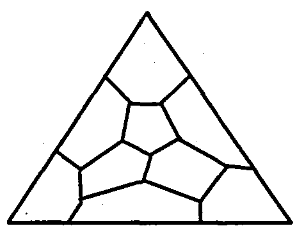
풀이. 삼각형을 오목 오각형으로 분할한 예를 제시하면 다음과 같다.



<그림 18>

활동 20. 삼각형을 볼목 오각형들로 분할할 수 있는가?

풀이. 삼각형을 볼목 오각형으로 분할한 예를 제시하면 다음과 같다.



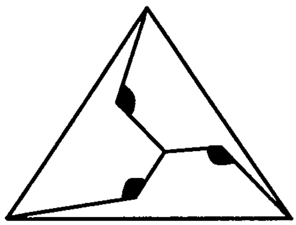
<그림 19>

이제, 한 가지 사실에 대해서 조사해 보자. 활동 19와 20에서는 삼각형을 오목 오각형들과 볼록 오각형들로 분할하는 경우에 대해서 탐구했지만, 활동 18에서는 삼각형을 볼록 사각형들로 분할하는 경우만을 생각했다. 그러면, 과연 삼각형을 오목 사각형들로 분할하는 것이 가능한가? 대답은 '아니오'이다. 이것에 대한 논증 과정을 탐구하여 보자.

우선, 활동 19로부터 다음과 같은 명제를 얻을 수 있다:

명제 1. 삼각형을 오목 오각형들로 분할하여 얻어진 오각형들에서 평각보다 작은 내각들의 합은 평각보다 큰 내각에 대한 인접각들의 합보다 크다.

예를 들어, 삼각형을 세 개의 오목 오각형들로 분할하였다고 하자.



<그림 20>

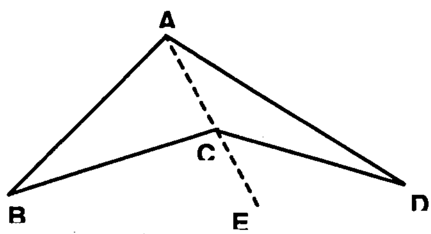
그림 20에서 검게 표시된 부분은 분할하여 얻어진 오목 오각형들에서 평각보다 큰 각에 대한 인접각들을 나타내고 있으며, 이들의 합이 오목 오각형의 평각보다 작은 각들의 합보다 작다는 것은 자명하다. 왜냐 하면, 검게 표시된 각들은 다시 인접한 오목 오각형에서는 평각보다 작은 내각이 되기 때문이다.

명제 2. 오목 사각형에서 평각보다 작은 내각의 합은 평각보다 큰 내각에 대한 인접각의 합과 같다는 것을 증명하여라.

증명. 임의의 오목 사각형 ABCD가 주어졌다고 하자. 이때, 다음 등식을 증명하면 된다.

$$\angle A + \angle B + \angle D = \angle BCD.$$

이를 위해, 선분 AC를 긋자. 그러면, 두 삼각형 ABC와 ACD를 얻게 된다. 이때, 각 BCE는 삼각형 ABC의 외각이므로, $\angle BCE = \angle ABC + \angle BAC$이고, 마찬가지로 각 DCE는 삼각형 ACD의 외각이므로, $\angle DCE = \angle CAD + \angle CDA$이므로, $\angle A + \angle B + \angle D = \angle BCD$가 증명된다.



<그림 21>

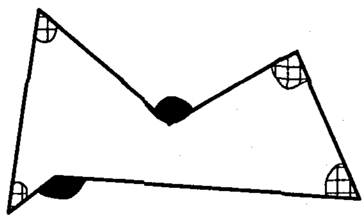
이제, 명제 1을 좀더 일반화하여 볼록 n각형을 k개의 다각형들로 분할하는 경우에 대해 다음 명제를 살펴보자.

명제 3. 볼록 n각형을 k개의 다각형들 $M_i(1 \le i \le k)$로 분할하였다고 하자. 다각형 M_i의 각들 중에서 평각보다 작은 내각의 합을 A_i, 평각보다 큰 내각에 대한 인접각들의 합을 B_i라 할 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_k > B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_k.$$

증명. 다각형 M_i는 오목 다각형일 수도 볼록 다각형일 수도 있는데, 모두 볼록인 경우에는 자명하므로, 오목 다각형을 포함하는 경우를 생각하자.

그림의 M_i각형에서 A_i는 흰색으로 표시된 각들의 합을, B_i는 검은 색으로 표시된 각들의 합을 나타내고 있다.



<그림 22>

명제 1의 증명 과정에서 보았듯이, 검은 색으로 표시된 각들은 인접한 다른 다각형에서는 흰색으로 표시된다. 그러므로, 임의의 n각형에 대해 각들의 합

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_k, \quad B = B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_k$$

에 대해, 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$A \ge B + (n-2) \cdot 180^\circ > B.$$

명제 2와 3으로부터 다음과 같은 흥미로운 결과를 얻을 수 있다.

명제 4. 임의의 볼록 다각형은 오목 사각형들만 분할할 수는 없다.

증명. 명제 2에서 오목 사각형의 검은 색으로 표시된 각이 흰색으로 표시된 각들의 합과 같으므로, 명제 3의 A > B라는 결론에 모순된다.

이제, 도형의 분할에 관련된 몇몇 흥미로운 정리들을 증명 없이 살펴보자(물론, 이들은 중학교 수준의 수학적 지식만을 사용하여 증명 가능하며, 학생들의 심화 학습을 위한 자료로써 적합할 것이다).

명제 5. A, B가 넓이가 같은 두 평행사변형이라고 할 때, A를 분할하여 얻어진 조각들을 결합하여 B를 얻을 수 있다는 것을 증명하여라.

명제 6. A, B가 넓이가 같은 두 삼각형이라고 할 때, A를 분할하여 얻어진 조각들을 결합하여 B를 얻을 수 있다는 것을 증명하여라.

명제 5와 6으로부터 수학사에서 유명한 정리인 볼야이-게르빈의 정리를 증명할 수 있다. 즉, 평면도형에서 넓이가 같은 두 다각형 A, B에 대해 A를 분할하여 얻어진 조각들을 결합하여 도형 B를 얻을 수 있다(명제 5, 6과 볼야이-게르빈 정리에 대한 상세한 증명은 한인기(1999)의 연구에 구체적으로 기술되어 있으며, 참고로, 공간에서는 이러한 성질이 성립하지 않는다는 것이 힐베르트의 3번째 문제인데, 이것에 대한 증명도 한인기(1999)에 상세히 기술되어 있다).

5. 결 론

최근 들어, 수학교육 분야에서 창의성 신장과 관련된 많은 시도들이 있었는데, 이러한 연구들에서 개발된 학습 자료들을 살펴보면, 활용된 다양한 소재들(예를 들어, 소마큐브, 퍼즐, 게임들, 펜토미노, LOGO 프로그램의 활용, Excel 프로그램의 활용)을 활용하여 수학교육의 연구 영역의 폭을 넓혔다는 측면에서는 큰 의미를 둘 수 있지만, 개발된 자료들의 체계성, 그리고 구체적인 활동과 형식적인 논증의 연결성 부분에서는 미흡함을 발견할 수 있다. 특히, 이러한 연구들이 영재 교육을 위한 목적으로 개발되었기 때문에, 일반 교수-학습을 위한 보조 자료로 사용되기에는 어려운 것들도 있었다.

본 연구는 창의성 신장을 위한 수학 교수-학습 자료 개발 연구의 확장으로써, 일반 아동들에게 창의성을 신장시킬 수 있는 수학 교수-학습 보조 자료를 개발하는 것을 목적으로 한다. 특히, 본 연구에서는 자료 개발에 사용되는 대상을 삼각형으로 제한하여, 다양한 종류의 수학 교수-학습 자료 개발보다는 한 가지 대상에 대한 다각적인 측면과 수준의 탐구 방법을 제시하여, 수학적 대상으로써의 삼각형에 대한 깊이 있는 통찰을 제공하도록 하였다.

본 연구에서는 도형에 대한 학습이나 도형의 인식은 주어진 도형을 단순히 시각적으로 수용하는 것보다는 도형들을 결합하거나 분할하는 것과 같은 구체적이고 조작적인 직접적, 혹인 인지적 활동을 통해 활성화될 수 있다는 기본적인 착상에 기초하여, 삼각형들을 분할하거나 결합하여 다양한 도형들을 만들고, 이를 형식적인 논증으로까지 확장할 수 있는 구체적인 활동 자료를 개발하였다.

삼각형들의 결합을 이용한 자료 개발에서는 두 삼각형을 겹치지 않게 붙여 놓는 경우, 두 삼각형을 겹치게 붙여 놓는 경우, 세 개의 삼각형을 겹치지 않게 붙여 놓는 경우에 대한 심도 있는 고찰을 통해 다양한 활동 자료를 개발하였다. 특히, 이때 개발된 활동 자료들은 높은 수준의 난이도보다는 학생들의 다각적인 측면에서의 인지 활동을 촉진시킬 것으로 기대된다.

한편, 주어진 삼각형을 직선을 이용하여 다양한 삼각형들로 절단하는 활동에서는 직선을 하나 긋는 경우, 직선을 두 개 긋는 경우, 세 개의 직선을 긋는 경우 등에 관련된 구체적인 활동을 제시하고, 관련된 인지적 활동에 대해 고찰하였다.

그리고, 도형의 분할에 관련된 몇 가지 활동과 논증에서는 삼각형을 볼록한 도형과 오목한 도형들

로 분할하는 구체적인 활동을 통해 분할 가능한 경우와 분할이 불가능한 경우에 대한 고찰 과정에서 자연스럽게 형식적인 논증의 과정으로 옮겨갈 수 있도록 하였다. 그리고, 이러한 활동에 대한 심화로써 삼각형의 분할에 관련된 몇몇 성질들을 소개하였다.

참 고 문 헌

구세프 V. A. · 한인기 (1996). 학습자의 수학적 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 제 **35(1)**, 서울: 한국수학교육학회.

김원경 · 김미월 · 김용대 (1999). 창의성 신장을 위한 교수-학습 자료 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **9**, 서울: 한국수학교육학회.

신인선 · 안대영 · 이봉주 (1999). 수학 영재의 창의력 신장을 위한 문제 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **9**, 서울: 한국수학교육학회.

신현용 · 김원경 · 신인선 · 한인기 (2000). 창의성 신장을 위한 수학 영재교육 개선 방안에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **10**, 서울: 한국수학교육학회.

신현용 · 이종욱 · 한인기 (1999). 창의력 신장을 위한 초등학교 수학 학습 자료 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 학술지> **4**, 서울: 한국수학교육학회.

신현용 · 한인기 (1999). 수학 영재의 창의력 신장을 위한 방향 모색, 청람 수학교육 **8**, 충북: 협신사.

한인기 (1999). 힐베르트의 세 번째 문제, 한국수학사학회지 **12(2)**, 서울: 한국수학사학회.