

7차 교육과정의 수학에서의 공학적 도구의 이용에 관하여

이 상 구 · 양 정 모 (성균관대학교)

Wellman, R. (인디애나대학교)

본 연구는 7차 교육과정의 수학에서의 공학적 도구의 이용 중 계산기와 그래프 그리는 도구를 중심으로 대안을 제시하고자 한다. 방법은 JAVA 언어로 개발된 계산기와 Graphing tool을 Web에 올려놓음으로써 우리 학생과 교사 모두가 언제 어디서나 접속하여 신뢰하고 이용하는 것이 가능하도록 하여 7차 교육과정이 추구하는 목표에 맞는 교육환경을 제공하는 것을 주된 목적으로 한 것이다.

1. 공학적 도구 개발에 대한 동기

최근의 세계 수학계에서의 변화 중에서 크게 눈에 띄는 내용은 선진국일수록 현재의 자신의 국제적 수월성을 오래도록 유지하기 위하여 차세대의 교육에 큰 비중을 두고 특히 개발된 첨단 기술을 교육에 이용하는데 더욱 적극적이라는 것이다. 그 중에 인터넷의 이용은 이 부분의 하이라이트라고 할 수 있다.

이미 우리도 현재 진행중인 6차 교육 과정과 지금 막 시작한 7차 교육과정은 물론 앞으로의 8차 교육과정 [6] 에서 공학적 도구의 이용에 대한 강조는 점점 더해지고 있다. 결과적으로 수학 이외의 사회나 물리 등 다른 과목에서는 활발한 이용이 가시화 되고 있다. 그러나 수학에 있어 주어진 교육 환경을 돌아보면 지난 10년간 개발된 가용한 공학적 도구는 그래픽 계산기와 MATLAB, MATHEMATICA, Maple, Cabri, GSP, CAS 등에 한정되었다. 더구나 이런 모든 것들이 외국에서 개발된 도구로서 이의 이용을 교과 과정에 반영하였을 경우 수만 명의 교사와 수백만 명이나 되는 우리의 학생들에게 외국의 공학적 도구를 고가로 수입하여 매년 upgrade하며 이용을 해야만 한다는 것을 의미함으로, 이를 강요하는 것에 대한 문제점은 고려해 볼 문제였다. 이러한 근본적인 문제점 때문에, 결국 수학교육에서의 공학적 도구의 도입을 강조하면서도 현재의 여건에서의 교육적인 효과 분석에 비중을 두고 실질적인 수용과 개발에는 소극적인 상태였다. 이에 본인은 외국의 동향과 국내 현실의 문제를 고려하여 우리의 여건에 맞는 새로운 대안을 제시하고자 한다.

2. 수학교육에서 공학적 도구 이용에 대한 시대적 요구

기술공학의 발전은 계산과 그래프 그리는 것을 쉽게 만들어 주었으므로 이를 이용하여 수학교육

에서의 단순 계산을 줄이고, 함수의 개형을 그리기 위해 필요했던 노력을 절감하였을 뿐만 아니라 시각적 이해를 통하여 더욱 깊은 수준의 교육효과를 기대하게 되었다. 이에 보태어 활동을 통한 능동적인 학습 활동이 동시에 가능하여 졌다. 이와 같은 교육환경의 변화에 따라 효과적인 수학교육을 위한 방법으로 미국수학교사협회(NCTM)는 1989년 “학교 수학 교육과정 (Curriculum and Evaluation standards for school mathematics)”에서 “수학수업에서 계산기와 컴퓨터의 사용이 대폭 허용되어야 한다 [9]”는 점을 강조하였고, 우리도 이러한 변화를 7차 교육과정에서 적극적으로 반영하였다. 또 이와 관련된 공학적 도구의 발전은 현재 한국 대학의 대부분의 수학과에 MATHEMATICA나 전산수학과목을 개설하게 할 정도로 대학에 큰 영향을 주었다. 더 나아가 최근에는 인터넷과 멀티미디어 기능의 발달로 새로운 기술공학적 도구의 이용이 가능하여졌으며 이를 반영하여 미국수학교사협회(NCTM)가 최근에 제시한 “학교 수학 교육과정, 2000 [11]”에서 눈에 띄는 변화는 위와 같은 목표를 달성하기 위해 JAVA 언어로 만들어진 “A collection of electronic examples”[11] 이다.

국내의 환경도 1999년 초부터 인터넷 국민 PC의 보급이 대규모로 이루어졌으며, 1999년 말부터 ISDN(Integrated Service Digital Network, 종합 정보 통신망)과 ADSL(Asymmetric Digital Subscriber Line, 비대칭 디지털 전송선)등을 이용한 가정에서의 고속 인터넷의 시대에 들어서며 이미 우리의 강의실 특히 고교 1학년의 강의실은 PC와 LAN 그리고 대형 TV가 설치되어 있다. 이에 따라 대도시는 물론 섬에서도 대부분의 교사와 학생은 학교와 집 또는 PC방에서라도 Internet에의 접속이 가능하다. 이런 환경은 알다시피 어느 선진국과 비교해도 떨어지지 않는 정보화 여건이다. 실제로 인터넷은 전 세계의 방대한 각종 디지털 정보를 접하게 해주는 환경을 제공하였다. 이는 능력별 교육과 탐구 학습 및 쌍방향의 교육까지 가능하므로 미국 등 선진국에서는 이 점을 중시하여 NSF등을 통하여 수백만 불을 투자하여 그런 교육적 환경을 준비해왔다. 그의 예로 NCTM의 2000년 Curriculum and Evaluation standards for school mathematics를 들 수 있는데 이 새로운 기준의 특징은 JAVA 프로그래밍 언어로 구현한 다양한 수학적 개념을 학습하는 도구이다. 이 예들은 수학적 원리들을 스스로 활동을 통하여 이해하도록 해준다. 미국수학교사협회는 <http://illuminations.nctm.org/>의 주소에서 e-example 이라는 형태로 JAVA로 만든 Interactive manipulate를 제공하기 시작하였다. 현재 한국에서도 이러한 변화를 이해하고 한국학술진흥재단에서는 2000년도 “멀티미디어를 이용한 대학교육 디지털콘텐츠 개발사업”을 공모하여 11월초에 최종 선정하였다. 두 개의 프로젝트를 선정한 수학에서의 내용을 보면 미적분학과 선형대수학 과목이 선정되었는데 특징은 모두 JAVA 기술을 이용한 쌍방향 학습에 비중을 두었다는 것이다.

위의 예에서 볼 수 있듯이 수학에서 이러한 교육 환경의 변화에 기폭제가 된 것은 인터넷과 JAVA 언어를 이용한 도구이다. JAVA는 인터넷에 적합한 쌍방향(interactive) 프로그램으로써 WBI(Web Based Instruction)의 효과를 배가시켰고 최근 자바를 이용한 많은 교육적 도구가 새롭게 개발되고 있다.

특히 현재 우리의 중등수학 교육 현장에서 가장 우선적으로 필요한 공학적 도구는 공학적 계산기와 그래프를 그리는 도구이다. 공학적 계산기는 로그표의 대치나 삼각함수의 교육에 필요하며, 그래프 그리는 도구는 함수와 관련된 모든 분야의 수학에서 시각적 이해와 활동을 통한 교육에 이용되며 선진국은 Casio, HP, Sharp 등의 Graphing Calculator를 이미 수년동안 이 분야의 수학 교육에 이용해 왔다[4, 5]. 우리도 이러한 환경에 맞는 보다 진보한 간편하고 쉽게 접할 수 있는 교구가 필요했지만 국내에 경쟁력 있는 적당한 제품이 없었으며 입시위주의 교육이 이용을 더디게 하였다. 그러나 7차 교육과정은 입시위주의 암기 교육을 대폭 수정하여 초등 수학교육부터 활동을 중심으로 한 학습자 중심의 교육 환경을 요구하고 있다. 이에 따라 이와 관련된 교구의 개발 노력이 필요하게 되었으며 그렇다면 지금까지 대학에서 해온 방법으로 소프트웨어를 구입하여 사용법을 익히고 또 수시로 upgrade하며 이용하는 것보다는 개발한 자료와 프로그램을 Web상에 올려놓고 누구나 24시간 무료로(또는 유료로) 이용하는 것이 훨씬 바람직하다는 점을 고려하여 새로운 교구를 개발하게 되었다. 개발된 새로운 공학적 도구는 internet에서 이용이 가능하여 교사가 수업 시간에 교실에서 개념을 설명하며 동시에 그 과정을 보여준다. 학생은 학교 전산실이나 집 또는 PC방에서라도 반복 및 활동 학습을 통하여 탐구 활동이 가능할 뿐 아니라, 학교를 졸업한 후에도 계속 update된 공학적 도구의 이용으로 배운 지식을 이용할 수 있으며 시간이 흐르며 발전된 내용도 따라가며 저절로 습득하는 평생 교육까지도 가능하다.

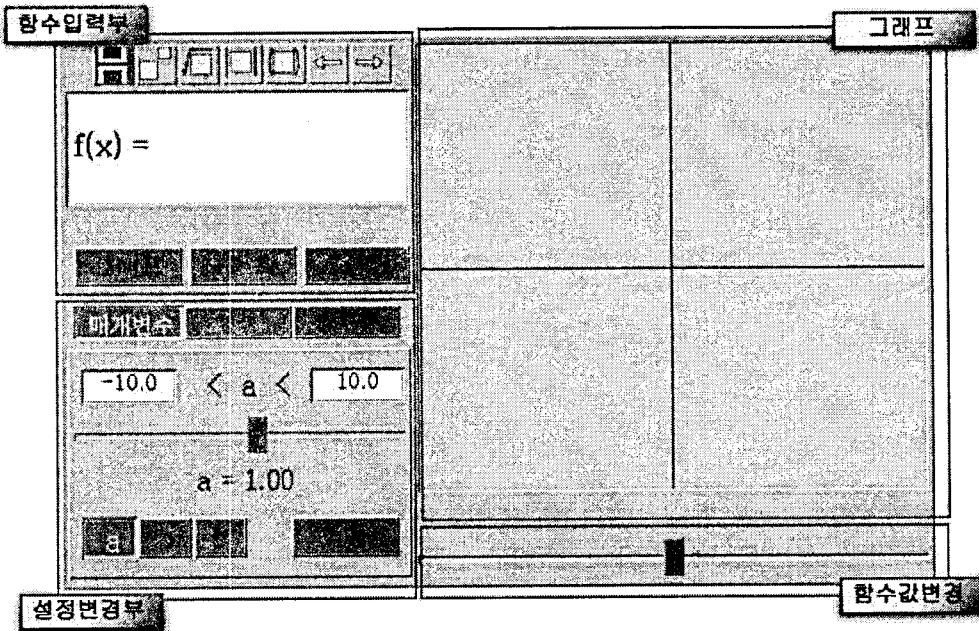
3. 오프라인에서 온라인으로 (그래픽 계산기를 중심으로)

수학적 개념의 이해에 있어서 수학적 시각화를 통한 직관적인 이해는 매우 중요하다. 또 대부분의 중등학교 수학교육에서 문제에 관련된 함수의 그래프를 통한 직관적 이해는 효과적인 해법은 찾는 것은 물론 구한 답의 타당성 분석에 큰 도움이 된다. 실제로 미적분학의 많은 부분은 주어진 함수의 개형을 그리는 과정에 할애한다. 이러한 과정을 돕는 도구로 지금까지는 외국에서 개발된 그래픽 계산기를 사용할 것을 권장했고, 그 적용방법에 대해서 다양하게 연구되어 왔다[1, 2, 3, 4, 7, 8]. 그러나 기존의 그래픽 계산기는 오프라인 상태에서 한정된 정보만을 가지고 학습하였다. 물론 그래픽 계산기의 그간의 발전은 대수적 계산과 그래프 그리는 기능 등의 단순한 작업 외에 기하학적 기능, 통계기능, 프로그래밍 기능 등 강력한 기능들이 첨가되어 연구되어 온 것은 사실이나 자주 바뀌는 모델과 성능, 비싼 가격, 매년 새로운 사용법의 습득 등의 문제점을 갖고 있었다. 따라서 이러한 문제점을 개선한 공학적 도구로 인터넷상에서 계수만 입력하면 몇 번의 클릭으로 그래프를 완벽하게 그려 시각적인 학습을 할 수 있다면 위의 모든 경제적인, 기술적인 부분은 해결 될 것이다. 이 점은 온라인이 오프라인을 지배하는 여러 가지 측면 중 한 본보기가 될 것이다. 특히 수학 교수-학습에서 강조하는 문제해결, 의사소통으로서의 수학기능을 바탕으로 강력한 쌍방향 교육을 제공하는 가장 확실하게 수행하는 도구로서 인터넷 자바 그래픽 계산기를 소개한다. 교사는 수업에서 이근과 함께

흑판에 그림을 그리는 대신 인터넷 PC를 이용하여 모니터에 $y = ax + b$ 와 $y = a(x + b)^2 + c$ 에서 a, b, c 의 변화에 따른 함수 모양의 변화를 보여줌으로서 수학적 개념을 이해시킬 수 있을 뿐만 아니라, 학생들로 하여금 직접 인터넷상에서 쉽게 다양한 그래프를 그려봄으로써 흥미와 동기를 유발시킬 수 있고 교과서에서 보았던 설명을 수동적으로 받아들이는 것에서 더 나아가 능동적으로 활동을 통하여 수학적 개념을 깊게 이해할 수 있을 뿐 아니라 지속적으로 이용할 수 있다. 즉, 학습목표에서만이 아니라 자연스럽게 학생들이 스스로 귀납적으로 해를 구하고 그 과정에서 합리적으로 창의적인 사고를 할 수 있도록 이끌 수 있을 것이다. 이제 중등교육에서 우리가 개발한 그래픽 계산기를 적용할 수 있는 구체적인 예를 중심으로 유용한 기능을 살펴보자. 우선 간단한 예를 바탕으로 이용법을 익혀보자.

4. 인터넷 그래프 자바계산기 이용법

<http://matrix.skku.ac.kr/tool/>에서 계산기인 공학적 도구(1), (2)를 지나 공학적 도구 (3)를 클릭하면 다음과 같은 그림이 나타난다.



이 도구는 보시다시피 네 개의 구역으로 나누어져 있으며, 네 개의 구역을 사용하여, 그래프를 손

쉽게 작성할 수 있다. 각 영역별 도움말은 도움말 버튼을 누른 후 각 영역을 클릭하면 상세히 알 수 있다. 대략적인 설명은 아래와 같다.

① **함수 입력부** : 다양한 함수 식을 입력하는 곳입니다. 분수, 지수, 제곱근, 절대값, 괄호, 이동 등은 이 부분 상단 아이콘을 이용하면 입력할 수 있다.(분수는 /, 제곱은 ^, 제곱근은 sqrt 등과 같이 입력할 수도 있다.) “그래프” 버튼은 입력한 함수의 그래프를 그리는 명령이고, “초기화”는 입력하기 전 초기 상태로 돌아가는 버튼이다. “도움말”을 누르면 이 프로그램에 대한 설명을 간단한 예를 중심으로 볼 수 있다.

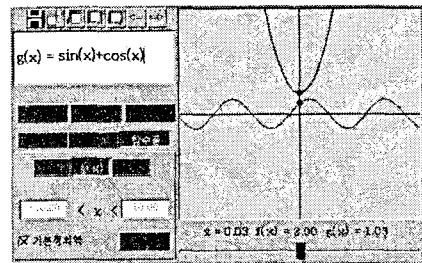
② **그래프** : 이 부분에 입력한 함수의 그래프가 그려진다. 그래프의 원하는 영역을 마우스로 드래그하면 부분확대(zoom in)할 수 있고 변수 x의 변역을 재조정하면 축소(zoom out)할 수 있다.

③ **설정 변경부** : 입력한 함수의 변수의 변역을 조정할 수 있고, 또한 최대 3개까지 동시에 함수들을 그릴 수 있는 버튼(“함수들”)도 있다. “매개변수”는 함수 입력시 포함된 매개변수(a, b, c 3개까지 가능)의 값을 조정할 수 있다. “설정”에서 정의역(x)과 공역(y)을 지정한다. “함수들” 버튼을 누르면 f(x), g(x), h(x) 3개까지 입력할 수 있다. 입력된 함수들은 그래프 영역에 동시에 그려진다. 각 영역의 설정 후에는 “적용” 버튼을 누른다.

④ **함수값 변경부** : 이 부분의 버튼을 마우스로 누른 상태로 좌우로 움직이면 x값과 y값이 동시에 표시되며 그래프의 점으로써 확인할 수 있다.

[예제 1] $f(x) = x^2 + 2$ 와 $g(x) = \sin(x) + \cos(x)$ 의 두 그래프 그리기.

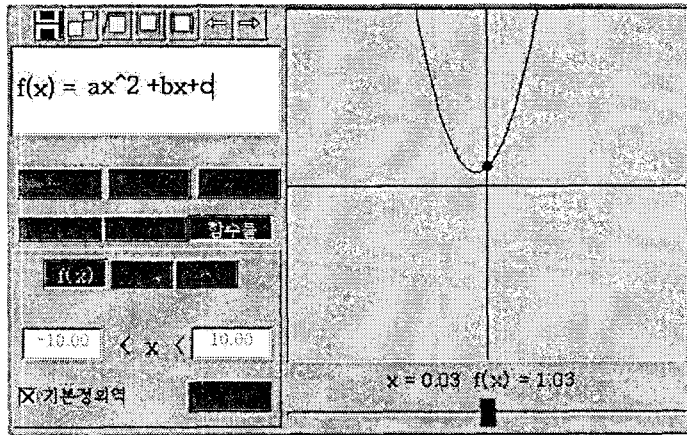
1. f(x)에 $x^2 + 2$ 를 입력하고 “그래프” 버튼을 누른다.
2. g(x) 함수를 입력하기 위해서, “함수들” 버튼을 누르고, “g(x)” 함수를 선택한다.
3. g(x) 함수에 $\sin(x) + \cos(x)$ 를 입력한다. 끝난 다음에는 꼭 “그래프” 버튼을 누른다. 그러면 다음과 같은 화면이 나온다.



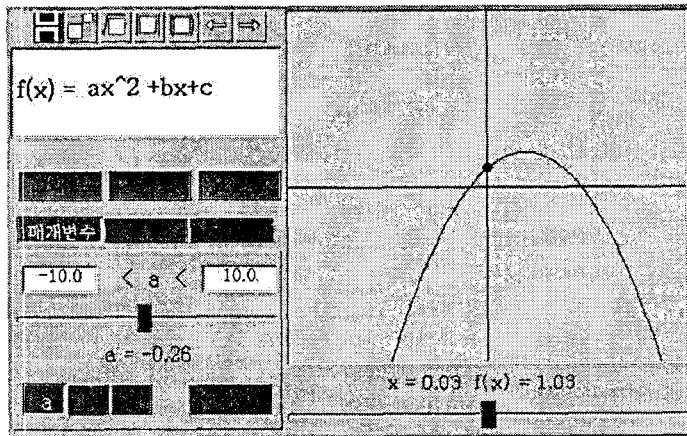
Tip : 마우스로 그래프의 원하는 부분을 사각형으로 드래그하면 확대(zoom in)하여 볼 수 있다. 다시 x의 정의역을 조정하면 축소(zoom out)할 수 있다.

[예제 2] 매개변수 바꿔 보기

1. $f(x)$ 에 함수 $ax^2 + bx + c$ 를 의미하는 ax^2+bx+c 를 입력합니다.
(초보자는 위의 box를 이용하여 입력해도 됩니다.)



2. "매개변수" 버튼을 누르고, "a", "b", "c"의 값을 조작해 봅시다. a, b, c의 변화에 따라 그래프도 변하는 것을 볼 수 있다.



5. 중·고등학교에서 인터넷 자바 그래픽 계산기를 사용하여 문제풀기

다음 문제들은 7차 교육과정에서 제시된 내용체계를 바탕으로 한 그래프를 그려봄으로써 함수의 개념과 관련된 함수의 지식을 익힐 수 있는 예이다. 이 외에도 다양한 콘텐츠 개발 및 활동학습이 가능하다.

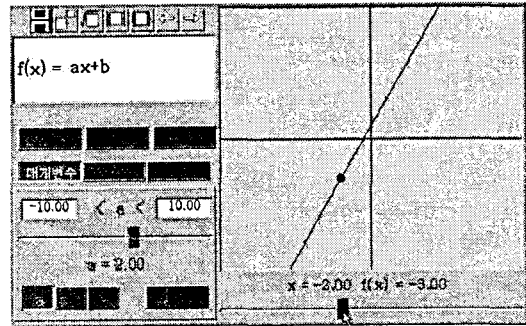
[문제 1] 다음 다항 함수를 그려보고 매개변수를 변화시키며 그래프가 어떻게 변하는지 살펴보자.

- 활동목표 : ① 다항 함수의 각 항의 계수가 의미하는 바를 그래프의 변화를 통해 알 수 있다.
 ② 다항 함수의 차수가 증가함에 따라 그래프의 개형이 어떻게 변하는지 살펴본다.

(1) $f(x) = ax + b$ (7차 수학교육과정 수학, 내용체계단계 8-가 의 내용의 교육)

- 매개변수 a 의 값의 변화에 따른 그래프의 변화를 살펴보자.
- 마찬가지로 b 도 변화시켜보자. 그래프에 어떤 변화가 있는가?

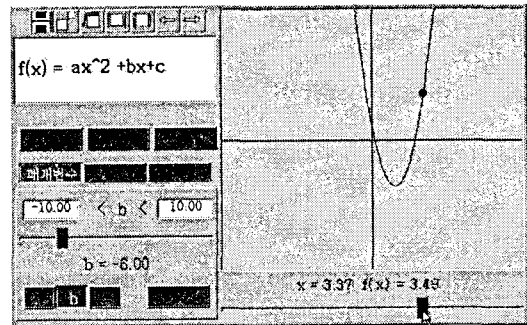
<보충> 이 예제는 일차함수에서의 기울기와 y 절편에 대한 이해를 높일 수 있다.



(2) $f(x) = ax^2 + bx + c$ (7차 수학교육과정 수학, 내용체계단계 9-가 의 내용의 교육)

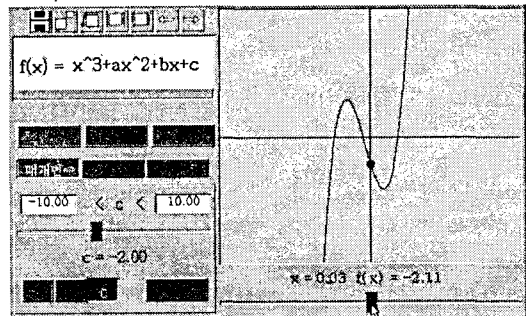
- 이차 함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 모양이 a, b, c 가 각각 변함에 따라 어떻게 변하는지 활동 학습하도록 한다.

<보충> a 는 이차함수의 볼록인 방향을 b 는 a 와 함께 꼭지점의 x 좌표를 c 는 a, b 와 함께 꼭지점의 y 좌표를 결정함을 지도할 수 있다.



(3) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (7차 수학교육과정 수학, 내용체계단계 8-가 의 내용)

- 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 의 모양이 a, b, c 가 각각 변함에 따라 어떻게 변하는지 활동 학습 하도록 한다.



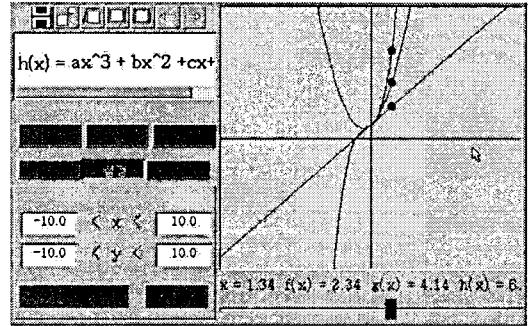
(4) 1차, 2차, 3차 함수의 그래프를 동시에 그려본다.

· 위에서 그려본 세 개의 그래프

일차함수 $f(x) = ax + b$,

이차함수 $g(x) = ax^2 + bx + c$,

삼차함수 $h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 를 동시에 그려봄으로써 차수가 증가함에 따라 또 매개변수가 변화함에 따라 그래프가 어떻게 변하는지를 한눈에 알 수 있게 한다.



Tip : 여러 그래프를 그릴 때 각각의 그래프의 색이 다르게 그려지므로 함수 모양의 변화를 구분하여 확인할 수 있다.

[문제 2] 다음 초월함수들을 그려보고, 매개변수(a, b, c)의 변화에 따른 그래프의 변화를 말하여라.

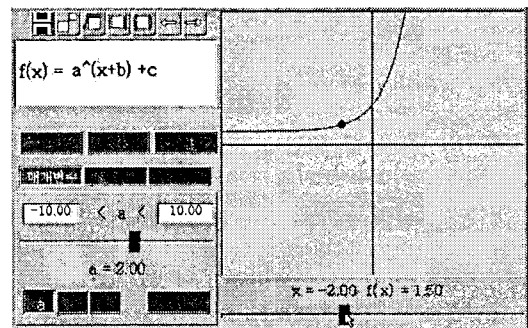
활동목표 : ① 지수, 로그, 삼각함수 등의 초월함수의 그래프의 개형을 그려볼 수 있다.

② 초월함수에 포함된 매개변수의 변화에 따른 그래프의 의미(평행이동, 최대, 최소, 주기 등)를 알 수 있다.

(1) $y = a^{x+b} + c$ (7차 수학교육과정 수학 I 나. 해석 (2)지수함수)

· 지수함수의 그래프를 매개변수를 포함하여 그려본다.

<보충> 밑 a 가 $0 < a < 1$, $1 < a$ 의 경우에 그래프의 개형을 알 수 있다. 참고로 $a < 0$ 인 경우는 그래프가 그려지지 않고, $a = 1$ 인 경우에는 x 축에 평행한 직선의 그래프가 그려지는 것으로부터 지수함수의 밑의 조건에 대한 학습지도도 할 수 있다. 매개변수 b 와 c 는 평행이동을 나타낼 수 있다.

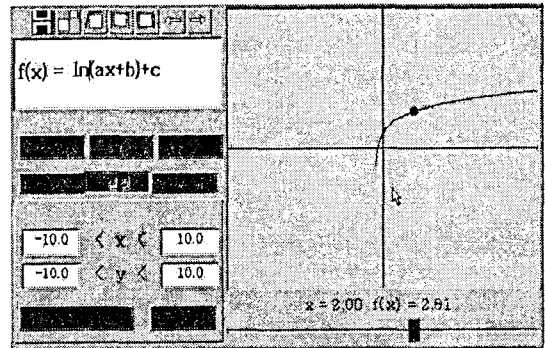


(2) $y = \ln a(x + b) + c$ (7차 수학교육과정 수학 I 나. 해석 (3)로그함수)

· 로그함수의 그래프를 매개변수를 포함하여 그려볼 수 있다.

<보충> 로그함수에서 매개변수의 역할에 대해서 지도할 수 있다. 여기서 b, c 는 그래프의 평행이동을 의미한다.

Tip : 이 그래프계산기에서는 아직 로그의 밑을 조절할 수는 없다. 상용로그 \log_{10} 은 \log 로 자연로그 \log_e 는 \ln 으로 입력할 수 있다. 참고로 $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ 로 하면 a 를 밑으로 하는 매개변수를 포함한 로그를 그릴 수 있다.

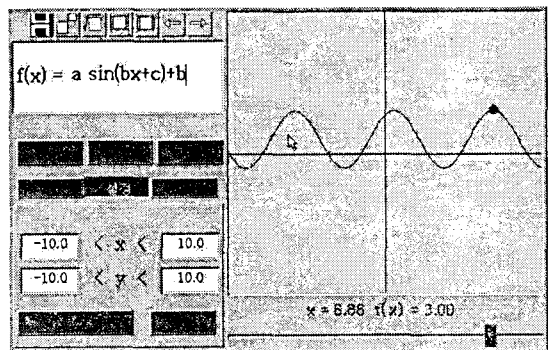


(3) $y = a \sin(bx + c) + b$ (7차 수학교육과정 수학, 내용체계단계 10-나의 내용의 교육)

· 삼각함수의 그래프에서 각각의 매개변수의 역할을 알 수 있다.

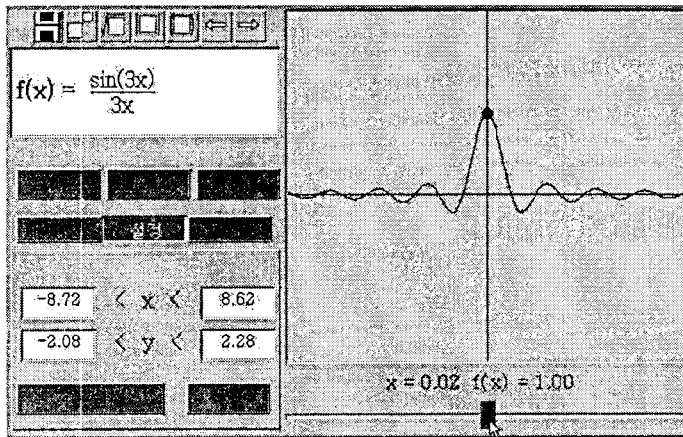
<보충> a 는 그래프의 최대, 최소를 결정한다. b 는 그래프의 주기를 결정한다. c 는 b 와 함께 x 축 방향으로의 평행이동을 의미한다. 마지막 상수항은 y 축 방향으로의 평행이동을 의미한다.

Tip : 여기에서는 매개변수를 세 개까지만 입력할 수 있으므로 학습한 매개변수를 상수로 입력한 후 다시 지도할 수 있다.



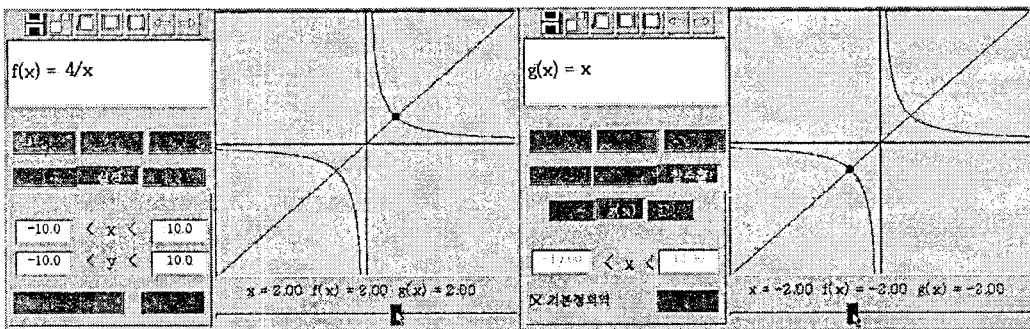
[문제 3] $y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$ 을 $f(x) = \frac{\sin 3x}{3x}$ 를 그린 후 x 값을 0에 가깝게 마우스로 점을 끌어보며 확인한다. (7차 수학교육과정 수학 II 나. 해석 (1) 함수의 극한과 연속성)

활동목표 : x 에 관한 함수의 극한을 x 값을 이동하여 구할 수 있다.



[문제 4] $y=x$ 와 $y = \frac{4}{x}$ 의 교점이 (2,2), (-2,-2)임을 두 그래프를 그려서 확인해보시오. (7차 수학교육과정 수II 가. 대수 (1) 방정식)

활동목표 : 두 함수의 교점을 구하는 데 함수의 그래프를 이용하여 확인한다.



6. 결론

본 연구에서는 7차 교육과정에서 강조한 수학교육에서의 공학적 도구의 이용에 대한 현재까지의 문제점을 분석하고 그 대안으로 JAVA 언어로 계산기와 Graphing tool을 개발하여 Web에 올려놓음으로서 학생과 교사 모두가 언제 어디서나 접속하여 이용하는 것이 가능하도록 하였다. 이러한 도구의 이용은 지금까지 사용이 고려되었던 외국에서 개발된 그래픽 계산기를 대치할 것으로 예상된다. 동시에 이를 통한 중등 수학 교과에서의 함수 교육에서의 그래프를 통한 직관적 개념 이해를 요구하는 부분에 대한 이용 모델을 제시하였다. 이 도구는 <http://matrix.skku.ac.kr/tool/>에서 무료로 사용될 수 있으며 사용법이 간단하여 현재의 교육과정에서 바로 적용하여 수업현장에서의 이용과 수행평가에 사용하여 수업의 능력을 높일 수 있을 것으로 기대한다. 현재 성균관대학교 수학교육과, 고려대학교 수학교육과에서 시험 사용중이며 교육 효과에 대한 분석은 “아주대 영재교육센터”와 함께 공동 연구 진행중이다.

참 고 문 헌

- 고상숙 · 한세호 (1999). 중등수학 교수-학습에서 T1-92 Graphing calculator의 활용 : 함수편, 대한수학교육학회 추계학술발표대회, 서울: 대한수학교육학회.
- 곽정원 (1996). 그래픽계산기를 이용한 함수 수업이 수학 학습에 미치는 효과, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 청구논문, 서울: 이화여자대학교.
- 구광조 · 오병승 · 류희찬 역 (1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 서울: 경문사.
- 권오남 · 김기연 · 박지연 · 김래영 (1997). 수학적 시각화를 위한 그래픽 계산기의 활용 방안, 대한수학교육학회 수학교육학 연구 발표대회 논문집 pp.293-318, 서울: 대한수학교육학회.
- 권오남 · 박지현 · 정호선 (1998). 수학교육에서의 휴대용 테크놀로지의 활용. 수학교육 연구 발표 대회 프로시딩 '열린 수학교육의 이론과 실제', 대한수학교육학회 논문집 pp.596-620, 서울: 대한수학교육학회.
- 한국교육과정 평가원 (2000). 초-중등 수학교육의 목표 및 내용 체계화, 한국교육과정평가원 연구자료 ORM 2000-14, 서울: 한국교육과정 평가원.
- 황우형 (1997). 그래픽 계산기의 중등 수학교육 활용방안. 대한수학교육학회 논문집 7, pp.215-254 서울: 대한수학교육학회.
- Pomerantz, H. (1997). The role of calculators in math education, USI/CPMSA, Superintendents Forum, Dallas, Texas, Dec 4.
- NCTM (1989). Curriculum and Evaluation standards for school mathematics.
- NCTM (2000). <http://www.standards.nctm.org>
- NCTM (2000). <http://illuminations.nctm.org/>