韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 11집, 2001. 1. 279-290.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 11, Jan. 2001. 279-290.

수학 문제의 구조 규명에 관한 연구

한 인 기 (경상대학교)

교사와 학생사이의 수학적 활동의 대표적인 매개체가 수학 문제이다. 그러나, 수학 교육 분야에서 객관화된 연구 대상으로서 수학 문제에 대한 개념 규정, 수학 문제의 분류, 수학 문제의 구조 등에 관한 심도있는 연구는 드물다. 본 연구에서는 객관적인 대상으로서의 수학 문제 자체에 대한 분석적 고찰을 통해, 수학 문제에 대한 개념 규정, 수학 문제의 특성들, 그리고 수학 문제의 구조에 대한 본질을 규명할 것이다.

1. 서 론

우리 나라 학생들이 고등학교를 졸업할 때까지 수학 문제를 모두 몇 문제나 풀까? 적어도 10,000 문제는 넘을 것으로 생각된다. 게다가, 수학 공부를 할 때, 구체적으로 무엇을 하는가를 물으면, 대부분 학생들의 대답은 수학 문제를 풀었다고 할 것이다. 물론, 수학 교과서나 수학 교육을 위한 참고용 도서를 보더라도 가장 많은 비중을 차지하고 있는 부분이 수학 문제의 제시와 그 풀이에 대한 설명이다.

수학 교수-학습 과정에서 교사와 학생사이의 수학적 활동의 대표적인 매개체가 수학 문제라고 해도 과언이 아닐 것이다. 그러나, 수학 교사들에게 수학 문제란 무엇인가? 라는 질문을 던지면, 난처해 하는 경우가 많다. 특히, 수학 문제로부터 어떤 정보를 얻을 수 있는가를 구체적으로 기술하도록 부탁한다면, 대부분의 교사들은 답변이 궁해진다. 이러한 현상은 비단 수학 교사들에게만 해당하는 것은 아니다. 수학 교육 분야에서도 객관화된 연구 대상으로서 수학 문제에 대한 다양한 시각에서의 연구들이 매우 빈약하다.

그 결과, 수학 문제에 대한 논의들은 직관적인 수준을 벗어나지 못하고 있다. 예를 들어, 어떤 문제가 어렵다, 혹은 복잡하다는 표현 자체가 무엇을 의미하며, 그리고 이러한 수학 문제와 관련된 변인들에 대해 많은 사람들이 공감할 수 있는 규준이 마련되어 있지 않으며, 단지 문제해결 분야에서 많은 경험과 식견을 가진 몇몇 사람들의 직관에 의존하는 경우가 많다.

수학 문제 자체에 관련된 연구들을 살펴보면, 수학 문제의 분류에 관해서는 한인기(1999), 신현성・김경희(1999), 김진락(1990), 그리고 Polya G.(1970) 등이 연구를 수행했으며, 최근에는 방승진(1995), 샤리긴 I.F.(2000) 등을 포함한 몇몇 수학자들이 수학 문제의 제작 방법에 관한 연구 결과를 발표하였다. 그러나, 이러한 연구들을 좀더 면밀하게 분석해 보면, 기존의 수학 문제들을 몇 가지 특성들에 의해 분류하거나, 혹은 기존의 수학 문제들을 이용하여 새로운 문제들을 구성할 수 있는 일

반화된 방법들이 진술되어 있을 뿐, 수학 문제의 실체나 수학 문제의 특성화를 위한 관련 변인들, 수학 문제의 구조 등에 관련된 근본적인 물음에 대한 답변은 찾아볼 수 없다.

따라서, 본 연구에서는 객관적인 대상으로서의 수학 문제 자체에 대한 분석적 고찰과 다양한 문헌 연구를 통해, 수학 문제에 대한 개념 규정, 수학 문제들의 특성을 규명하는데 관련된 변인들을 추출하고, 그리고 수학 문제의 구조에 대한 본질을 규명할 것이다.

2. 객관화된 대상으로써의 수학 문제

수학 문제란 무엇인가? 신현성·김경희(1999)는 문제란 하나의 상황(situation)으로서 개인 또는 단체가 문제풀이의 필요성을 느껴서 문제를 풀려 하나, 즉시는 그 해의 길(path)을 얻지 못하는 상황이라고 정의했으며, Krulik S. & Rudnick J.(1989)도 문제의 개념 규정에 대해 이와 같은 견해를 취하고 있다. 이러한 견해들에서는 문제를 어떤 상황으로 규정하고 있기 때문에, '문제'를 규정하고 있다기 보다는 '문제 상황'을 규정하고 있다.

문제와 문제 상황은 그 의미상 큰 차이가 있다. 국어 사전(한미르, 2000)에 보면, 상황이란 ① 일이 되어 가는 형편이나 모양, ② 평상시의 형편, ③ 상업상의 형편 등과 같이 정의하고 있는데, 이러한 세 가지 정의에서 공통적으로 알 수 있는 것은 상황은 주체(일이나 사람)와 관련되어 사용된다는 것이다. 즉, 어떤 일에 대한 형편, 또는 어떤 사람의 형편의 의미를 내포하고 있다.

게다가, 우리의 일상적인 언어 사용을 생각하면 상황이라는 표현이 항상 주체와 관련되어 사용된다는 것을 알 수 있다. 예를 들어, '나에겐 왜 그런 상황이 닥쳤을까', '민방위 본부에서 알립니다. 이것은 가상의 상황입니다', '예를 들어, 네가 그런 상황에 있었으면 어떻게 했겠니' 등등. 결국, 신현성·김경희, Krulik S. & Rudnick J. 등이 규정한 것은 문제가 아니라 문제 상황인 것이다.

이제, 문제에 대해 살펴보자. 국어 사전(한미르, 2000)에 보면, 문제란 ① 해답이나 해명을 요구하는 질문, ② 연구, 토의하여 해결해야 할 사항, ③ 사회적으로 화제가 된 일, ④ 성가신 일, ⑤ 무엇에 관계되는 일로 규정되어 있다. 이러한 문제에 대한 정의에서는 주체와의 관련성이 문제 상황보다는 희박하다. 예를 들어, '해답이나 해명을 요구하는 질문'은 어떤 학생(주체)이 해결을 위해 애쓰든 아니든 관계없이 '문제'가 독립된 대상으로 존재할 수 있다는 것을 의미한다.

우리의 언어 생활을 돌이켜 보자. 수학책에 문제가 몇 개나 있을까? 라는 표현에 사용된 '문제'는 그것을 학생들이 받아들여, 어려움을 느끼는가 아닌가와는 무관하게 마치 운동장 한 구석에 작은 돌이 있는 것처럼 독립적으로 존재하는 대상으로서의 인정을 포함한다. 게다가, '문제집'이라는 표현을 생각하면, 여기서 '문제'란 단지 해답이나 해명을 요구하는 질문을 의미할 뿐 그 이상도 그 이하도 아니다.

결국, 우리는 수학 문제를 해결의 주체(학생이나 교사)와는 독립된 객관화된 하나의 대상으로 인식할 수 있고, 만약 문제와 문제해결의 주체 동시에 고려하여, 어떤 주체(사람)가 문제를 풀려고 노

력하는데 어려움이 발생하는 상황을 생각한다면 이때는 '문제 상황'이라는 표현이 훨씬 더 적합함을 알 수 있다. 그러므로, 본 연구에서는 문제란 주체에 의존하지 않고 객관화된 독립적인 대상으로서, 해답이나 해명을 요구하는 질문으로 규정할 것이다. 예를 들어, '방정식 $2x+3 = 5$를 풀어라'는 것은 모든 사람들에게 있어 문제이지만, 이 연립 방정식을 어려움 없이 풀 수 있는 중학교 2, 3학년 학생들에게는 문제 상황이 되지 못한다는 것이다.

한편, 모든 독립된 개체들은 외형적인 특징과 내면적인 특징을 가지고 있다. 예를 들어, 일반적으로 사람의 외형적인 특색은 피부색, 얼굴의 형태, 키나 몸무게, 그리고 이러한 특성들 사이의 관계 등으로 규정될 것이고, 내면적인 특성은 성격, 대인 관계, 지적 능력 등을 포함하는 다양한 변인들에 의해 규정될 것이다.

물론, 수학 문제도 객관화된 대상으로써 외형적인 특성과 내적인 특성들을 가지고 있다. 예를 들어, 폴야(1970)는 수학 문제를 작도 문제, 증명 문제, 계산 문제 등으로 분류했는데, 이것은 수학 문제 자체의 외적인 특성에 근거한 분류라고 할 수 있다.

임의의 대상들은 무수히 많은 내적인, 그리고 외적인 특성들을 가지고 있으며, 연구 목적에 따라 필요한 특성들을 추상하여 문제를 분류하기도 하고, 문제의 특질을 기술하기도 한다. 특히, 어떤 대상의 내적인, 그리고 외적인 특성들은 개별적으로 존재하는 것이 아니라 서로 긴밀한 관련성을 가지고 있기 때문에, 내적인 특성이나 외적인 특성들은 각각 개별적인 구조를 이룬다고 할 수 있다. 이로부터, 우리는 수학 문제의 내적 구조와 외적 구조라는 개념을 추출할 수 있다.

3. 수학 문제의 외적 구조

수학 문제의 외적인 구조를 규명하기 위해선, 우선 수학 문제가 가지고 있는 대표적인 외형적인 특성들을 몇 가지 추출하기로 하자. 바꾸어 말하면, 수학 문제가 외형적으로 어떤 정보들을 포함하고 있는가? 우선, 대부분의 문제들은 주어진 것(가정), 구하는 것(결론)을 포함하고 있기 때문에, 이 두 가지 요소는 수학 문제의 중요한 외형적 특성들 중의 일부가 된다.

수학 문제는 풀이를 가지는 경우도 있고, 아직 가지지 못하는 경우도 있다. 예를 들어, '삼각형의 세 중선은 한 점에서 만난다' 라는 명제는 이미 증명 방법이 알려져 있기 때문에, 객관적으로 그 풀이를 가지고 있는 명제이다. 한편 '2보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다'는 골드바흐의 가설은 아직 풀리지 않은 명제이다.

문제의 풀이에는 어떤 정보들이 포함되어 있는가를 좀더 구체적으로 논의해 보자. 이를 위해, 다음과 같은 예제를 보자(석용징 · 신현성 · 이준열, 1998).

예제 1. $34 + 88 = 122$임을 증명하여라.

증명. $34 + 88$

$= (30 + 4) + (80 + 8)$ (이유:)
$= (30 + 4 + 80) + 8$ (이유:)
$= (30 + 80) + (4 + 8)$ (이유:)
$= 110 + 12$ (이유:)
$= 120 + 2$ (이유:)
$= 122$ (이유:)

이 문제는 문제해결의 근거가 되는 정리나 원리들을 묻고 있다. 이로부터, 문제 풀이에는 문제해결의 근거가 되는 지식이 중요한 요인으로 포함되어 있음을 알 수 있다.

한편, 문제 풀이 자체에서 문제 해결의 근거가 되는 지식과 함께 중요한 것이 문제해결을 위한 절차, 알고리즘이다. 관련된 수학적 개념이나 정리들을 정확히 안다고 하여, 문제의 풀이를 구성할 수 있는 것은 아니다. 예를 들어, 앞에서 살펴본 무게 중심에 관한 정리의 증명에서 학생들은 이미 관련된 선행 지식들을 가지고 있지만, 그것들을 종합하여, 즉 기존의 지식들을 적절한 절차로 배열하여, 종합적으로 증명 과정을 완성하지 못하는 경우가 많다.

살펴본 바와 같이, 수학 문제의 외형적인 특성을 나타낼 수 있는 변인으로 본 연구에서는 주어진 것들(가정), 구하는 것(결론), 문제 풀이의 근거가 되는 지식들(정리들, 개념들, 공리들), 그리고 문제 풀이의 절차(알고리즘)를 추출하였다.

본 연구에서 수학 문제의 외형적인 특성을 기술하기 위해 추출한 변인들은 깔야긴 Yu.M.(1977)이 수학 문제를 분류하기 위해 추출했던 변인들과 상당 부분 일치되는데, 그 원인들 중의 하나는 깔야긴은 수학 문제를 특성화하는 과정에서 수학 문제의 내적인 특성의 존재를 인식하지 못한 채, 외형적인 특성들의 존재만을 인정하고, 이를 중심으로 수학 문제들을 분류했기 때문이다. 물론, 깔야긴의 수학 문제 분류 방법은 다른 분류 방법에 비해 질적으로 큰 의의를 가진다. 물론, 본 연구에서는 깔야긴의 연구 결과를 수학 문제의 외적인 특성 및 구조를 규명하는데 활용할 것이다.

우리는 수학 문제의 외형적인 특성을 대표적으로 나타내는 네 가지 변인들을 중심으로 문제의 외적 구조를 규명할 것이다. 각 변인들을 다음과 같이 기호화하자:

A: 수학 문제에서 주어진 것들, 가정들

B: 풀이에 대해 근거가 되는 개념들, 명제들, 공리들

C: 풀이에 포함된 결론을 유도하는 절차들, 알고리즘들

D: 결론들, 구하는 답들.

어떤 문제에서 알려지지 않은 변인들은 x, y, z등과 같은 문자들로 나타내도록 하자. 그러면, 앞에서 살펴본 무게 중심에 관한 정리의 외적 구조는 $ABCD$와 같은 형태로 나타낼 수 있다. 왜냐하면, 정리의 주어진 것들, 결론들, 증명의 근거가 되는 정리들, 절차들이 모두 알려져 있기 때문이다. 한편, 골드바흐의 추측은 가정(A)와 결론(D)는 있지만, 풀이 과정의 근거나 풀이의 알고리즘들이

알려지지 않았기 때문에, 그 외적인 구조는 $AxyD$를 가진다.

그런데, 이와 같은 방식으로 수학 문제의 외적인 구조를 규정할 때, 중등학교의 수학 교수-학습 과정에서 사용되는 문제들을 연구의 대상으로 할 때 어려움이 발생한다. 즉, 중등학교에서 사용되는 수학 문제들은 대부분 A, B, C, D에 해당하는 모든 변인들이 이미 알려져 있는 문제들이므로, 대부분 그 외적인 구조가 $ABCD$의 형태를 띄게 된다. 그러면, 본 연구에서 밝히려하는 수학 문제의 외적 구조가 중등 학교의 학교 수학 문제에 대한 어떤 시사점도 주지 못하게 된다.

이러한 문제점에 대한 대안으로 본 연구에서는 객체인 수학 문제를 다루는 주체를 제한할 것이다. 즉, 중학교 2학년 과정에 나오는 문제의 외적인 구조를 규명할 때, 객체에 대한 주체로서 중학교 2학년 학생들을 한정할 것이다[1]. 예를 들면, 무게 중심에 대한 정리에 대한 주체로서 모든 사람들을 고려한다면, 이 정리는 $ABCD$의 외형적인 구조를 가지지만, 무게 중심에 대한 정리를 배우기 바로 직전에 있는 중학교 2학년 학생들을 주체로서 제한한다면, $ABxD$의 구조를 가지게 된다. 한편, 예제 1은 $AxCD$의 외적인 구조를 가지는 문제가 된다.

이제 문제의 외적 구조에 대한 몇 가지 예들을 살펴보기로 하자. 수학 시간에 교사가 두 등식 x^3+3x^2-1과 $-3x^3+x+2$의 합을 구하는 방법을 설명한 후에, 다음과 같은 문제를 제시했다고 하자.

예제 2. 다음 두 항등식 A, B에 대해 A+B를 구하여라.

$$A = -2x^3+3x^2-4x+7,\ B = x^3+x^2-3$$

풀이.
$$\begin{aligned} A+B &= (-2x^3+3x^2-4x+7) + (x^3+x^2-3) \\ &= (-2+1)x^3+(3+1)x^2-4x+(7-3) \\ &= -x^3+4x^2-4x+4 \end{aligned}$$

예제 2라는 객체에 대한 행위를 수행할 주체들은 지금 예제 2를 받아들었다. 이들은 이미, 동류항끼리 모으고, 동류항을 계산하고, 덧셈에 대한 결합 법칙, 교환 법칙이 성립한다는 것을 알고 있고, 게다가 교사의 예시를 통하여, 예제 2를 풀기 위해 이들이 어떤 절차로 조직되어야 하는가를 알고 있다. 이들이 모르는 것은 단지 합 A+B 뿐이다. 그러므로, 예제 2의 외적인 구조는 $ABCx$이다.

교과서 및 교수-학습 과정의 전형적인 구성 방식을 분석해 보면, '교과 내용 설명 - 예제의 제시 및 교사에 의한 전형적인 접근 방법의 소개 - 학습자 개개인의 문제해결'과 같이 이루어짐을 알 수 있다. 이러한 경우에 예제 2와 같이, 주어진 조건들(문제 자체에서 주어짐), 문제해결을 위한 관련된 지식들(교과 내용 설명 과정에서 주어짐), 그리고 문제해결을 위한 알고리즘(교사에 의한 예제의 해

1) 문제의 외적 구조를 규명하는 과정에서 '문제'를 문제 상황으로 해석해도 같은 결과를 얻을 수 있지만, 이와 같이 접근하면 또다시 문제와 문제 상황 사이의 혼돈이 발생하기 때문에, 본 연구에서는 객체로서의 주어진 문제에 대한 주체를 제한하는 접근을 취했다.

결 과정에서 제시됨)이 주어진 후, 학습자 스스로 예제와 유사한 문제해결의 경험을 가지게 되므로, 학습자들이 해결하게 되는 많은 문제들의 외적 구조에 대해 생각해 보면, 이들이 *ABCx*의 외적 구조를 가지게 됨을 알 수 있다.

교과서에 제시되는 전형적인 예를 하나 더 살펴보자. 대부분의 교과서들에서 보면, 예제에서 '삼차 부등식 $x^3-2x^2-x+2>0$을 풀어라'와 같은 문제가 제시되며, 교사는 이 문제를 학생들에게 전형적인 풀이 방법, 절차를 이용하여 예시한다. 그리고 나서, 학생들이 스스로 풀어보는 문제로서 다음과 같은 예제와 유사한 문제들이 제시된다:

예제 3. 삼차 부등식 $x^3-6x^2+11x-6\geq 0$을 풀어라.

예제 3의 풀이 과정에 필요한 수학적 지식이나 문제해결 절차 등은 이미 학생들에게 알려져 있으며, 학생들은 부등식을 만족시키는 x 값을 구하기만 하면 된다. 그러므로, 예제 3은 *ABCx*의 외적 구조를 가진다.

물론, 외적 구조가 *ABCD* 형태인 문제들도 생각할 수 있다. 이러한 유형의 문제들은 블룸의 교육 목표 분류에서 지식 영역과 관련된 문제들이다. 예를 들어, 외심에 대한 작도 방법을 이미 배운 학생에게 '외심을 어떻게 작도하는가'를 묻는다면, 이 문제의 외적인 특성에 관련된 모든 변인들을 학생에게 알려져 있으므로, *ABCD*에 속한다.

한편, 중·고등학교 교과서에 나오는 전형적인 증명 문제들은 대부분 *ABxD*의 외적 구조를 가진다. 이러한 전형적인 예를 하나 살펴보자.

예제 4. 두 점 C, D가 직선 AB에 대하여 같은 쪽에 있고, ∠ACB = ∠ADB이면, 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다는 것을 증명하여라.

예제 4의 증명 과정을 구체적으로 기술하지는 않을 것이지만, 예제 4를 증명하기 위해 바로 예제 4의 문턱 앞에 서 있는 학생들은 이미 증명 과정에서 필요로 하는 정리나 공리들을 이미 학습한 상태에 있고, 또한 결론(네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다)도 알고 있다. 단지, 이들에게 알려져 있지 않은 것은 알고 있는 수학적 지식들을 종합하여, 가정으로부터 결론을 어떻게 유도할 수 있는가의 절차이다. 그러므로, 이 문제는 *ABxD*의 외적 구조를 가진다.

이제, 높은 수준의 난이도를 가지는 다른 예를 하나 살펴보기로 하자.

예제 5. 한 변의 길이가 1인 정삼각형에 다섯 개의 점을 찍었을 때, 두 점 사이의 거리가 적어도 ½보다 크지 않은 두 점이 존재한다는 것을 증명하여라.

예제 5는 예제 4와 같은 증명 문제이긴 하지만, 그 외적인 구조는 다르다. 왜냐하면, 예제 4에서는 풀이의 근거가 되는 정리가 이미 학생들에게 모두 알려져 있지만, 예제 5를 증명하기 위해선, 일반적으로 학생들에게 알려져 있지 않은 다른 도형의 성질 '삼각형의 내부(변을 포함하여)에 있는 임의의

두 점 사이의 거리는 그 삼각형의 가장 큰 변보다 크지 않다'를 알아내야 한다. 즉, 예제 5는 $AxyD$ 인 외적 구조를 가지는 문제이다.

수학 교수-학습의 효율성을 높이기 위해서는 학생들의 다양한 탐구 활동을 위해 다양한 요소들에 대한 탐구를 포함하는 수학 문제들을 제시할 필요가 있으며, 어떠한 외적 구조를 가진 문제들에 대해 학생들이 어려워하는가 등을 포함하는 체계적인 연구가 필요하다.

4. 수학 문제의 내적 구조

수학 문제의 내적 구조란 무엇을 의미하는가? 수학 문제 이면에는 어떤 정보가 포함되어 있으며, 이러한 정보들이 어떤 의미를 띨 수 있는가를 고찰해 보자. 수학 문제의 내부라면 가장 먼저 떠오르는 것이 문제의 풀이일 것이다. 우리는 수학 문제의 외적 구조를 규명할 때에 수학 문제 풀이 근거와 그 알고리즘을 변인으로써 추출하였다. 그렇다면, 이것 이외에 수학 문제 풀이 자체에서 어떤 구조를 더 탐구할 수 있다는 것인가? 만약, 그러한 내적 구조가 있다면, 그러한 구조를 이루는 요소들은 무엇이고, 이러한 요소들 사이의 관계는 어떻게 기술해야 하는가?

최근에 한인기(2000)는 수학 문제 풀이의 구조(내적 구조) 규명과 관련하여 흥미로운 연구 결과를 제시하였다. 이 연구에서는 기하 문제 해결 과정에 대한 체계적인 기술을 통해, 문제 해결 과정을 구성하는 요소들로 체계적으로 분해하고, 추출된 요소들 사이의 관계를 수형도를 이용하여 제시하였다. 이 연구에서는 주어진 것, 구하는 것, 해결 과정에서 얻어진 성질들 각각을 문제해결 과정의 요소로 규정을 하고, 이 요소들 사이의 관계를 수형도를 통해 기술하였는데, 이때, 얻어진 요소들과 이들 사이의 관계가 바로 우리가 규명하려는 수학 문제의 내적 구조에 해당한다. 이제, 구체적인 예들을 살펴보자.

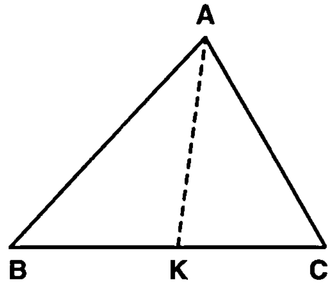
예제 6. 삼각형 ABC에 각의 이등분선 AK를 그었다. $\angle C = 33^\circ$, $\angle AKC = 110^\circ$ 일 때, 각 B를 구하여라.

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. } \triangle ABC \\ \text{2. AK: 삼각형 ABC의 이등분선} \\ \text{3. } K \in BC \\ \text{4. } \angle C = 33^\circ \\ \text{5. } \angle AKC = 110^\circ \end{array}\right\} \text{(주어진 것)}$$

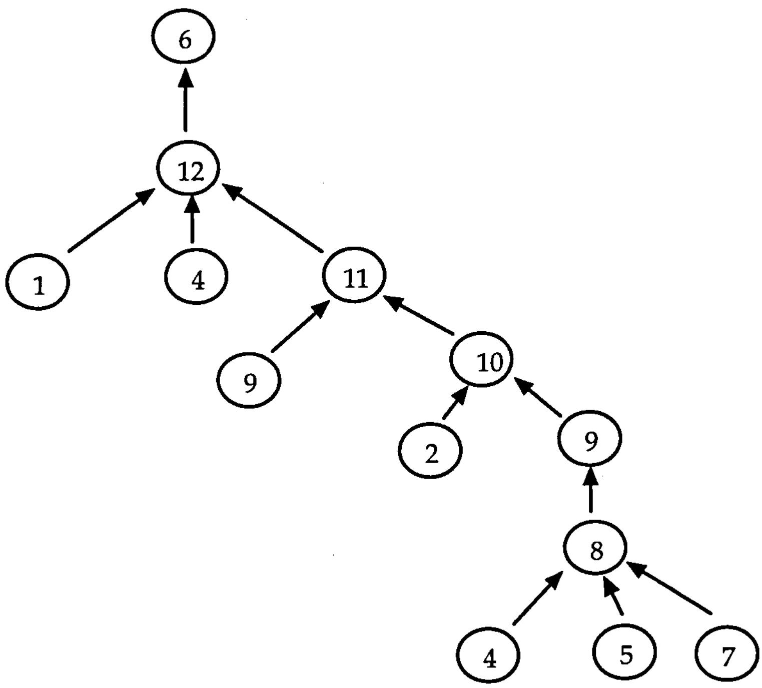
6. $\angle BC$ (구하는 것)

7. $\triangle AKC$를 보자.
8. $\angle CAK + 110^\circ + 33^\circ = 180^\circ$ (4, 5, 7, 삼각형의 내각의 합)
9. $\angle CAK = 37^\circ$ (8)

10. ∠BAK = 37° (2, 9)
11. ∠A = 74° (9, 10)
12. ∠B + 74° + 33° = 180° (1, 4, 11, 삼각형의 내각의 합)
6. ∠B = 73° (12)



주어진 예제의 해결 과정에서 주어진 것(1-5)과 구하는 것(6), 그리고 해결 과정에서 얻어진 성질들(7-12)이 수학 문제 풀이 과정에 대한 내적 구조의 요소들로서, 수형도에서는 이들 요소들 각각을 원으로 표시하였으며, 이들 사이의 관계를 문제해결 과정에서 논리적인 함의 관계를 고려하여 화살표를 이용하여 나타내었다. 예제 6에 대한 각 요소들과 그 함의 관계는 다음과 같은 수형도를 통해 나타낼 수 있으며, 이것이 예제 6에 대한 내적인 구조가 된다.



문제의 내적 구조는 문제의 풀이 방법에 의존하기 때문에, 그 내적 구조는 어떤 방식으로, 어떤 전략으로 문제를 푸는가에 의해 다른 내적 구조의 형태를 취할 수 있다(한 문제가 다양한 내적인 구조를 가지고 있기 때문에, 서로 다른 교수-학습 상황에서 활용되었을 때, 다양한 의미를 띠게 된다). 이것은 마치 사람이 상황에 따라, 혹은 접하게 되는 사람에 따라 다양하게 내면적 모습이 드러나는 것과도 유사하다고 할 수 있다.

주어진 문제의 내적 구조는 단선형 구조라 할 수 있으며, 이러한 내적 구조를 통해 문제해결 탐색 수행의 방향과 그 아이디어를 규명할 수 있기 때문에, 문제 해결 후에 자신의 활동에 대한 반성적 활동으로도 유용하게 활동될 수 있을 것이다. 특히, 한인기(2000)는 문제의 내적 구조와 다양한 체계들을 이용하여, 주어진 문제의 복잡도를 계산하려고 시도하였다.

이제, 다른 예를 하나 더 살펴보자.

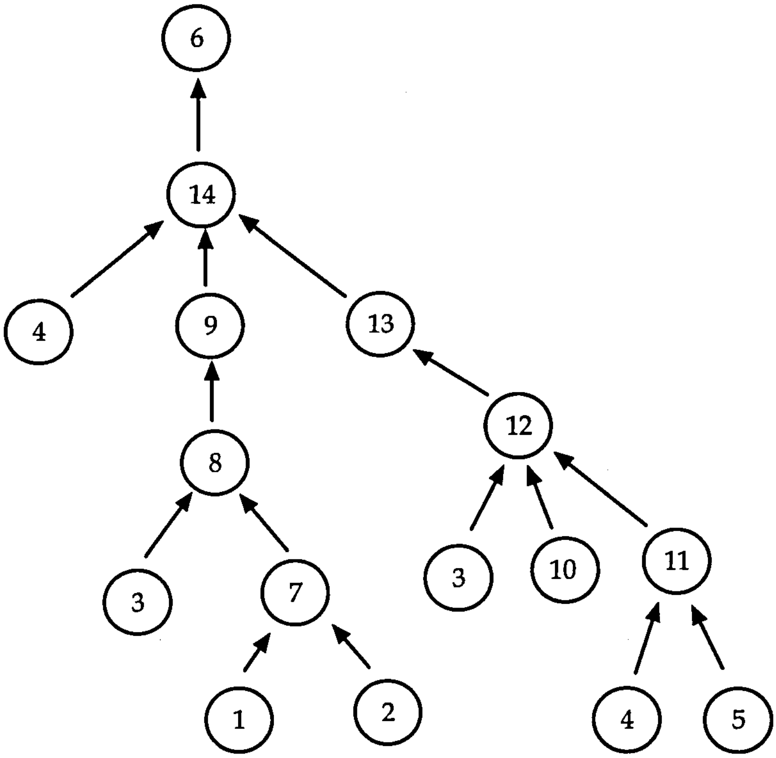
예제 7. 밑변이 BC인 이등변 삼각형 ABC에서 $\angle A = 54^\circ$, $\overline{BH}$는 삼각형의 높이일 때, 각 HBC를 구하여라.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \triangle ABC\text{: 이등변 삼각형} \\ 2.\ BC\text{: 삼각형 ABC의 밑변} \\ 3.\ \angle A = 54^\circ \\ 4.\ BH\text{: }\triangle ABC\text{의 높이} \\ 5.\ H \in AC \end{array}\right\}\text{(주어진 것)}$$

6. $\angle HBC$ (구하는 것)

7. $\angle B = \angle C$ (1, 2, 이등변 삼각형의 성질)
8. $54^\circ + 2\angle B = 180^\circ$ (3, 7, 삼각형의 내각의 합)
9. $\angle B = 63^\circ$ (8)
10. $\triangle ABH$를 보자.
11. $\angle BHA = 90^\circ$ (4, 5)
12. $\angle ABH + 90^\circ + 54^\circ = 180^\circ$ (3, 10, 11, 삼각형의 내각의 합)
13. $\angle ABH = 36^\circ$ (12)
14. $\angle HBC + 36^\circ = 63^\circ$ (4, 9, 13)
6. $\angle HBC = 26^\circ$ (14)

주어진 문제에서 추출된 요소들과 이들 사이의 함의 관계를 바탕으로 한 내적 구조는 뒷쪽에 수형도를 통해 제시되었다. 얻어진 수형도의 구조는 예제 6의 수형도와 차이가 있다. 즉, 예제 6의 수형도가 변형된 단선형 구조인 반면, 예제 7의 수형도는 2선형 구조를 기본으로 가지는 수형도이다.



예제 7의 내적 구조를 나타내는 수형도

그리고, 수형도를 통해 우리는 문제해결의 탐구가 성질 (9)와 성질 (13)을 구하는 기본적인 두 가지 방향에서 이루어지고 있으며, 이러한 탐구가 예제 7의 문제해결 과정의 기본 전략이 됨을 알 수 있다.

본 연구에서는 기하 문제를 중심으로 수학 문제의 내적 구조를 규명하는 연구를 수행했지만, 대수 분야의 교과 문제들, 해석 분야의 교과 문제들 등에 대한 폭넓은 후속 연구가 필요하다. 특히, 수학 문제의 해결 과정에서의 논리적인 관계가 다양하기 때문에, 이들을 어떻게 구체적으로 기술하고, 내적 구조의 동형성을 어떻게 규명할 것인가 등을 포함하는 많은 연구 문제들이 남겨져 있다.

5. 결 론

수학 교수-학습 과정에서 수학적 활동의 대표적인 매개체가 수학 문제이지만, 수학 문제 자체에 대한 논의들은 직관적인 수준을 크게 벗어나지 못하고 있다. 그리고, 수학 문제 자체에 관련된 연구들을 살펴보면, 수학 문제의 분류에 관한 것과 수학 문제의 제작 방법에 관한 연구들로 크게 나눌

수 있다. 이러한 연구들은 기존의 수학 문제들을 몇 가지 특성들에 의해 분류하거나, 혹은 기존의 수학 문제들을 이용하여 새로운 문제들을 구성할 수 있는 일반화된 방법들이 진술되어 있을 뿐, 수학 문제의 실체나 수학 문제의 특성화를 위한 관련 변인들, 수학 문제의 구조 등에 관련된 근본적인 물음에 대한 답변은 찾아볼 수 없다.

본 연구에서는 객관적인 대상으로써의 수학 문제 자체에 대한 분석적 고찰을 통해 수학 문제에 대한 개념 규정, 수학 문제들의 특성을 규명하는데 관련된 변인들을 추출하고, 그리고 수학 문제의 구조에 대한 본질을 규명하였다.

본 연구의 과정에서 문제와 문제 상황에 대한 엄밀한 규정을 하였으며, 수학 문제를 주체에 의존하지 않고 객관화된 독립적인 대상으로서, 해답이나 해명을 요구하는 질문으로 규정하였다. 예를 들어, '방정식 $2x+3 = 5$를 풀어라'는 것은 모든 사람들에게 있어 문제이지만, 이 연립 방정식을 어려움 없이 풀 수 있는 중학교 2, 3학년 학생들에게는 문제 상황이 되지 못한다는 것이다.

한편, 수학 문제는 객관적인 대상으로써 외적 구조와 내적인 구조를 가진다. 수학 문제의 외형적인 특성을 나타낼 수 있는 변인으로 본 연구에서는 주어진 것들(가정), 구하는 것(결론), 문제 풀이의 근거가 되는 지식들(정리들, 개념들, 공리들), 그리고 문제 풀이의 절차(알고리즘)를 추출하였으며, 깔야긴의 수학 문제 분류 아이디어를 보완하여, 수학 문제의 외적인 특성 및 구조를 규명하고, 이를 기호화하여 나타내었다.

특히, 교과서 및 교수-학습 과정의 전형적인 구성 방식을 분석해 보면, '교과 내용 설명 - 예제의 제시 및 교사에 의한 전형적인 접근 방법의 소개 - 학습자 개개인의 문제해결'과 같이 이루어지기 때문에, 이러한 경우 주어진 조건들(문제 자체에서 주어짐), 문제해결을 위한 관련된 지식들(교과 내용 설명 과정에서 주어짐), 그리고 문제해결을 위한 알고리즘(교사에 의한 예제의 해결 과정에서 제시됨)이 주어진 후, 학습자 스스로 예제와 유사한 문제해결의 경험을 가지게 되므로, 학습자들이 해결하게 되는 교과서의 많은 문제들은 $ABCx$의 외적 구조를 가지게 됨을 알 수 있다.

한편, 본 연구 과정에서 비슷한 형태의 증명 문제들이 다른 외적 구조를 가질 수 있다는 것이 확인되었다. 즉, 예제 4와 5는 같은 증명 문제이지만, 예제 4는 $ABxD$의 외적 구조를, 예제 5는 $AxyD$의 외적 구조를 가지고 있었다. 예제 4에서는 미지의 요소가 한 개, 예제 5에서는 미지의 요소가 두 개이며, 예제 5와 같은 유형의 문제를 경시대회에서 자주 접할 수 있다는 것을 감안하면, 문제의 외적 구조가 문제해결 과정의 난이도에 영향을 줄 수 있다는 추측을 할 수 있다.

한편, 수학 문제의 내적 구조를 규명하기 위해, 문제 해결 과정을 체계적으로 기술하고, 이를 통해, 문제 해결 과정을 구성하는 요소들로 분석하여, 추출된 요소들 사이의 관계를 이용하여 문제의 내적 구조를 수형도의 형태로 나타냈다. 이러한 문제의 내적 구조는 문제의 풀이 방법에 의존하기 때문에, 그 구조는 어떤 방식으로, 어떤 전략으로 문제를 푸는가에 의해 다른 내적 구조의 형태를 취할 수 있다. 그리고, 문제의 내적 구조를 통해 문제해결 탐색 수행의 방향과 그 아이디어를 규명할 수 있기 때문에, 문제 해결 후에 자신의 활동에 대한 반성적 활동으로도 유용하게 활동될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

국어사전 (2000). 한미르 웹사이트: dic.hanmir.com/dict/dic_main.html.

김진락 (1990). 수학 문제 분류와 그 실제, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **29(1)**, 서울: 한국수학교육학회.

방승진 (1995). 수학 문제 제작 사례 연구 1, 2. 대한수학교육학회 논문집 **5(2)**, 서울: 대한수학교육학회.

석용징 · 신현성 · 이준열 (1998). 수학과 교재론, 서울: 경문사.

신현성 · 김경희 (1999). 수학적 문제해결, 서울: 경문사

한인기 (2000). 수학 문제 체계화에 관한 연구, 대한수학교육학회 2000년도 춘계 수학교육학 연구 발표대회 논문집, 서울: 대한수학교육학회.

한인기 (1999). 수학 교수-학습 과정의 차별적 접근의 기초, Math Festival 프로시딩 **1**, 서울: 수학사랑.

Krulik S. & Rudnick J. (1989). *Problem solving*. Massachusetts: Allyn and Bacon.

Sharygin I. F. (2000). *Two articles and two hundred problems*. Moscow.

<러시아어 참고 문헌>

Polya G. (1970). *수학적 발견*, 모스크바: 과학 출판사.

깔야긴 Yu.M. (1977). *중등 학교 학생의 개발과 교육의 도구로써 수학 문제*. 박사학위논문.