韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 11집, 2001. 1. 235-250.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 11, Jan. 2001. 235-250.

수학교육에서 종합-분석적 활동의 본질 및 체계화에 관한 연구

한 인 기 (경상대학교)

수학적 지식이나 새로운 아이디어 탐구에 있어 종합적, 그리고 분석적 활동에 대한 관심은 그 역사가 매우 깊고, 최근에도 교수-학습 과정에서의 종합-분석적 활동을 효과적으로 활용하려는 연구가 활발하게 진행되고 있다. 본 연구에서는 최근의 연구까지의 연구 결과를 종합하여, 종합-분석적 활동의 본질을 개념화하고, 그 유형을 체계화함으로써 좀더 효율적인 수학 교수-학습을 위한 이론적 토대를 제공할 것이다.

I. 서 론

수학교육 분야에서 종합적 활동, 분석적 활동에 대한 논의는 고대 그리스 시대에서부터 현대에 이르기까지 다양한 형태로 이루어졌으며, 특히 분석적인 방법은 강력한 수학적인 발견술로 인식되어 왔다. 유클리드의 원론에서 종합적인 증명 기술 방법을 볼 수 있으며, Pappus는 분석법에 대해 고찰했으며, 그 후에 데카르트를 거쳐, 최근에는 다닐로바 E.F.(1961), 뿌쉬낀 V.N.(1967), 그리고 구세프 V.A.(1995) 등의 연구에서 종합-분석적 활동의 중요성, 그 구체적인 방법들이 탐구되고 있다.

종합-분석적 활동에 관련된 우리 나라에서의 연구들을 살펴보면, 강문봉(1992)은 다양한 문헌들에 대한 연구를 통해 분석법에 대한 다양한 접근들을 고찰하였으며, 우정호(2000)도 수학교육에서 분석법의 중요성을 강조하였다. 한편, 한인기(1998)는 기하 문제해결 과정에서 분석적 탐색 수행 방법에 대한 구체적인 논의를 제시하였고, 특히 '분석적 활동의 활성화를 위한 작도 문제의 활용'(한인기, 2000)에서는 작도 문제를 분석적 활동의 개발·육성을 위한 도구로써 활용하여, 실제로 수학 교수-학습 과정에 활용할 수 있는 구체적인 수준의 학습 자료와 상응하는 인지적 활동에 대한 구체적인 논의를 제시하였다.

많은 연구들을 통해, 종합이란 문제 해결에서 그 출발을 주어진 것에서 시작하고, 분석은 논의의 출발점이 문제(혹은 정리)의 구하는 것(결론)이라는 것을 알고 있다. 그러나, 이것은 종합적 활동과 분석적 활동에 대한 가장 개괄적인 서술일 뿐, 종합적인 활동의 장·단점, 분석적 활동의 구체적인 유형들, 분석적 활동의 수행 전략 등등을 포함하는 구체적인 논의는 아직 체계화되어 있지 못하다. 그렇기 때문에, 수학 교육의 연구에서 종합-분석적 활동에 대한 체계적인 연구가 활성화되지 못하고 있다.

본 연구에서는 종합적 활동의 본질과 장·단점, 분석적 활동의 구체적인 유형들, 분석적 활동의 효율적 수행을 위한 전략들, 그리고 다양한 분석적 활동들을 체계화하고 이를 개념화하여, 수학 교육 분야에서 종합-분석적 활동에 대한 활발한 연구와 논의가 이루어질 수 있는 바탕을 제공할 것이다.

Ⅱ. 종합적 활동의 본질 및 특성들

심리학 분야에서 의미하는 분석이나 종합과 우리가 수학교육 분야에서 논의하는 분석이나 종합은 차이가 있다. 심리학 분야에서 분석은 어떤 대상이나 대상의 성질을 그것을 구성하는 부분으로, 혹은 구성 요소들로 나누는 것, 그리고 어떤 대상에 대해 그 대상의 성질들, 다양한 측면들, 그리고 그 안에 존재하는 관계 등을 추출하는 인지적 조작을 의미하며, 종합은 분석에 의해 추출된 부분들을 결합하여 어떤 새로운 것을 만들기 위해 결합하는 인지적 조작을 의미한다(구세프·한인기, 1996).

그러나, 수학교육 분야에서 전통적으로 논의되는 종합적 활동은 문제해결이나 논리적 추론, 논증에서 주어진 것들(조건들)로부터 구하는 것(결론)으로 향하는 인지적 활동을 의미한다. 종합적 활동에서 우리는 주어진 것들로부터 새로운 정보(추가 정보라 부르기로 약속하자)들을 얻고, 얻어진 추가 정보들로부터 새로운 추가 정보를 얻는 활동을 계속하여, 결국엔 구하는 결론에 도달하게 된다. 물론, 추가 정보를 얻는 과정에서 학습자들이 가지고 있는 기존 지식들이 큰 역할을 한다. 이러한 종합적 활동을 도식화하면, 다음과 같다:

종합적 활동

주어진 것 ⇒ 추가 정보 ⇒ … ⇒ 결론 (구하는 답)

수학 교수-학습 과정에서 종합적 활동은 첫째, 어렵지 않은 문제들에 대한 탐색 수행 과정에서 활용되고, 둘째, 문제를 다 풀고 나서 그 풀이를 체계적으로 기술하는 과정에서 활용된다. 이제, 몇 가지 예들을 통해, 종합적 방법의 특성들을 구체적으로 고찰하자.

예제 1. 삼각형 ABC와 DEF가 합동이고, $\angle B = 54^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ 이다. 이때, 삼각형 DEF에서 각 B와 C에 대응하는 각들의 크기를 구하여라.

1. $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$ ⎫
2. $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ⎬ (주어진 것)
3. $\angle B = 54^\circ$ ⎪
4. $\angle C = 60^\circ$ ⎭
5. 각 B와 C에 대응하는 각들, 즉 $\angle E$와 $\angle F$ (구하는 것)

6. $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ (2)
7. $\angle E = 54°$ (3, 6)
8. $\angle F = 60°$ (4, 6)

예제 1에서 종합적 활동은 주어진 것(1-4)에서 구하는 것(5)을 찾아내는 활동과 관련된다. 이러한 문제 해결은 학습자들에게 있어 자연스러운 해결의 전개 방식이라고 할 수도 있지만, 이것은 그리 간단한 문제가 아니다. 만약, 우리가 순수한 종합적 활동만을 수행했다면, 당연히 (2)로부터 변들과 각들에 관련해서 최소한 6개 이상의 등식을 얻었을 것이다. 그렇지만, 우리는 (6)에서 보는 바와 같이 우리는 문제해결에 필요한 정보만을 선별했고, 이것이 가장 자연스럽게 받아들여진다. 물론, 이러한 필요한 정보의 선별은 우리가 구하려는 결론에 의해 종속된다. 즉, 분석적 활동에 관련됨을 알 수 있다.

이로부터, 우리는 '분석적 활동'이 완전히 배제된 순수한 종합은 '맹목적인 종합'이며, 수학 교수-학습 과정에서의 종합적 활동은 아주 약한 수준이지만 분석적 활동과 결합되어 수행되고 있음을 알 수 있다. 이 예제에서 '분석적 활동'은 우리가 원하는 목표를 확인하는 것이다.

이제, 다른 예제를 살펴보자.

예제 2. 삼각형 ABC에서 a, b, c는 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$의 길이이고, S는 삼각형의 넓이, 그리고 R은 외접원의 반지름일 때, $S = \frac{abc}{4R}$ 임을 증명하여라.

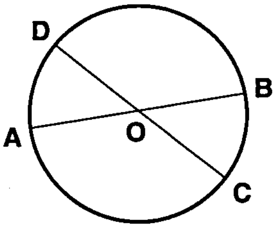
증명. △ABC에서 삼각형의 넓이 $S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin\angle B$이고, 사인공식에 의해, $\frac{b}{\sin\angle B} = 2R$이다. 그러므로, $S = \frac{abc}{4R}$ 이다.

이 예제의 증명 진술은 전형적인 종합적인 방법을 따르고 있으며, 이미 이 문제를 학생이 풀고 난 후에, 그 기술 과정에서 학생들은 종합적인 활동의 경험을 가지게 된다. 그러나, 학생들은 종합적인 활동을 통해서는 이 예제의 증명에서 왜 사인 공식을 사용해야 했는지에 대한 타당한 근거를 가지지 못한다. 또 다른 예제를 살펴보자.

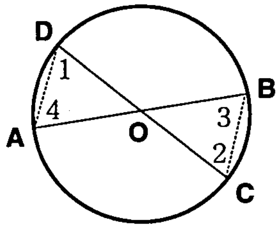
예제 3. 원의 두 현 AB와 CD가 점 O에서 만나고, 서로를 이등분한다. 이때 점 O가 원의 중심임을 증명하여라.

증명. 점 A와 D, C와 B를 이어보자(그림 b 참조). SAS 합동 조건에 의해, $\triangle AOD \equiv \triangle BOC$ (1) 삼각형 AOD와 BOC의 합동으로부터, $\angle 1 = \angle 2$ (2) $\angle 1$과 $\angle 3$은 같은 호에 대한 원주각이므로, $\angle 1 = \angle 3$ (3) (2)와 (3)으로부터, $\angle 2 = \angle 3$ (4) (4)로부터 $\triangle OBC$가 이등변 삼각형이라는 것을 알

수 있고, 즉 $\overline{OB} = \overline{OC}$ (5) 문제의 조건에 의해, $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO}$ (6). 이로부터, 점 A, B, C, D는 점 O에서 같은 거리만큼 떨어져 있고, 즉 이 점들은 중심이 O인 원 위에 있다는 것이 증명되었다.



<그림 a>



<그림 b>

문제의 풀이를 읽으면서, 학생들에게는 다음과 같은 물음들이 생겨난다: 예제에서 주어진 작도는 그림 a인데, 왜 점 A와 D, C와 B를 연결하여 그림 b를 얻는가? 왜 삼각형 AOD와 BOC를 보는가? 등등. 이러한 것들은 종합적인 활동의 단점을 분명하게 드러내고 있다. 즉, 종합적인 활동은 문제 해결 과정에 대한 근거를 제시해 주지 못한다.

종합적인 활동을 논리적인 측면에서 본다면, 이 활동 방법은 주어진 조건들, 이미 알려진 수학적 사실들로부터 출발하여 중간 결과들을 거쳐 결국엔 우리가 증명하려는 것에 도달하기 때문에 연역적인 논리 전개 방법에서 중요한 구성 요소라고 볼 수 있다.

게다가, 종합적인 활동 결과 얻어진 문제해결의 서술은 간단, 명료하기 때문에 수학적 이론의 진술이나 교과서, 혹은 참고 도서 등의 기술에 많이 사용된다. 그러나, 이와 같은 방식으로 그대로 학습 내용을 전달하는 것은 효과적이지 못하며, 이로 인해 간혹 수학이 인위적이고, 이해하기 어려운 것이 되고 만다.

이 종합적인 활동의 단점을 요약하면, 1) 문제해결 탐색의 근거를 제시해 주지 못하며, 2) 다른 방식으로 하지 않고, 왜 꼭 그렇게 했는가? 에 대한 대답을 주지 못하고, 3) 우리가 구하는 목표(답)를 향해 갈 때, 주어진 것과 구하는 것 사이에서 나타나는 많은 추가 정보들 중에서 필요한 것을 고르는데 어려움이 발생한다.

Ⅲ. 분석적 활동의 본질 및 체계화

문제해결이나 논증에서 학생들의 구체적인 탐구 활동의 출발점이 구하는 것(결론)이면, 이러한 활동을 분석적 활동이라 부른다. 탐구 활동을 논리적으로 분석해 보면, 구하는 결론에 대한 필요 조건을 구하는 활동, 또는 구하는 결론에 대한 충분 조건을 구하는 활동으로 크게 구분할 수 있으며 (Pappus나 다닐로바도 이러한 두 가지 유형의 분석에 대해서 언급하였지만, 이것을 구체적으로 규정하고 특성화하지는 않았음), 이에 따라 분석적 활동을 크게 상승 분석과 하강 분석으로 나눌 수 있다.

(1) 상승 분석

상승 분석은 분석적 활동의 하나이므로, 물론 탐구 활동의 출발점이 구하는 것(결론)이며, 이때 구하는 결론에 대한 충분 조건을 찾고, 충분조건으로 얻어진 명제에 대한 또 다른 충분 조건을 찾는 과정이 반복된다. 예를 들어, 어떤 명제 A가 성립한다는 것을 보이기 위해, 명제 A에 대한 충분조건 B를 찾고, 명제 B가 성립한다는 것을 보이기 위해 충분조건 C를 구하는 등등의 과정을 거듭하여, 주어진 조건이나, 기존의 수학적 지식으로부터 쉽게 유도할 수 있는 명제가 얻어질 때까지 이러한 분석의 과정을 반복한다. 상승 분석의 과정을 도식화하면,

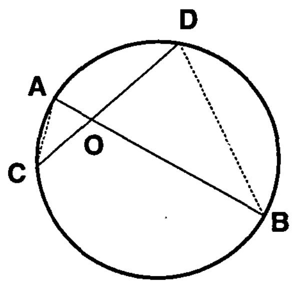
상승 분석

구하는 것 (결론) $\Leftarrow$ 충분 조건 $\Leftarrow \cdots \Leftarrow$ 충분 조건

결국, 이러한 유형의 분석에서는 문제해결 활동이나 탐구 활동의 논리적인 전개 방향이 결론을 향하고 있기 때문에, 본 연구에서 이러한 분석을 상승 분석이라고 명명했다. 상승 분석은 다양한 수학적 탐구 과정에서 유용한 인지적 활동으로 분석의 결과로 얻어진 최종적인 명제를 증명한다면, 주어진 문제의 해결이 보장된다. 몇 가지 수학적 탐구 활동의 예를 살펴보자.

예제 4. 원의 지름 AB와 현 CD가 점 O에서 만나면, $\overline{AO} \cdot \overline{OB} = \overline{CO} \cdot \overline{OD}$임을 증명하여라.

증명. 주어진 예제에 대한 교과서적인 전형적인 풀이를 기술하여 보자.



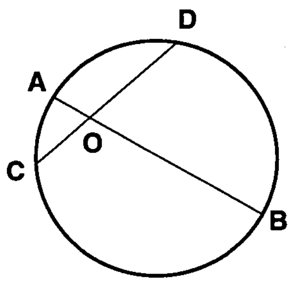
<그림 a>

점 A와 C, B와 D를 연결하면, 삼각형 ACO와 DBO를 얻게 된다. 각 AOC와 DOB는 맞꼭지각으로 같고, 각 CAO와 BDO는 같은 원주에 대한 원주각이기 때문에 같다. 그러므로, 두 삼각형 ACO와 DBO는 닮음이다. 이로부터, $\overline{AO} \cdot \overline{OB} = \overline{CO} \cdot \overline{OD}$을 얻을 수 있다.

종합적 활동에서도 보았듯이, 주어진 문제해결 과정의 기술에서 학생들에게 발생하는 문제점들 중의 하나가 왜 점 A와 C, 그리고 점 B와 D를 연결하는가? 라는 것이다. 이것에 대한 하나의 접근을 상승 분석을 통해 밝혀보자. 우선, 주어진 문제에서 주어진 것과 구하는 것을 체계적으로 기술하면 다음과 같다.

1. 원
2. $\overline{AB}$: 원의 지름 (주어진 것)
3. $\overline{CD}$: 주어진 현
4. O: 주어진 지름과 현의 교점
5. $\overline{AO} \cdot \overline{OB} = \overline{CO} \cdot \overline{OD}$ (구하는 것)

문제에서 주어진 조건과 결론에 상응하는 작도는 다음과 같다:



<그림 b>

이제, 상승 분석 활동을 수행하자. 상승 분석 활동을 통해 주어진 결론에 대한 충분 조건을 구하기 위한 가장 기본적인 질문은 다음과 같다:

- (5)를 구하기(증명하기) 위해서 무엇을 알아야 하는가?
- (5)를 증명하기 위해서 무엇을 증명해야 하는가?

이러한 물음에 대한 대답을 탐구하는 과정이 상승 분석 활동에서는 매우 중요한 역할을 하는데, 주어진 예제에서 가능한 대답들 중의 하나는 (5)를 증명하기 위해, $\frac{\overline{AO}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{BO}}$를 증명하면 충분하다는 것이다. 그러면, 다시 $\frac{\overline{AO}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{BO}}$을 증명하기 위해선 무엇을 보여야 하는가? $\overline{AO} : \overline{OC} = \overline{OD} : \overline{OB}$를 보이면 된다.

이제, 두 선분의 비가 같다는 것을 보여야 하는데, 이를 위해 무엇을 해야 하는가? 두 선분의 길이의 비가 같다는 것을 증명하는 것은 이미 닮음을 배운 학생들에게는 특별한 어려움을 주지 못한다. 즉, 비례 관계에 포함된 선분들을 변으로 포함하는 두 삼각형을 생각하여, 그 삼각형이 닮음이라는 것을 증명하면 될 것이다. 그러나, 그림 b에는 원하는 선분들을 각각 변으로 포함하는 삼각형이 없다. 그러므로, 원하는 두 삼각형을 얻기 위해 보조선의 작도가 필요하고, 학생들은 비로소 보조선 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$를 작도해야 한다는 생각을 할 수 있게 된다.

이제 남은 일은 △ACO와 △DBO가 닮음이라는 것을 보이면 된다. 그러면, 두 삼각형이 닮음이라는 것을 보이기 위해서 무엇을 알아야 하는가? ∠CAD와 ∠EAB가 맞꼭지각이므로, 두 삼각형의 다른 한 각이 같으면 된다. 각 CAO와 각 BDO는 같은 원주에 대한 원주각이기 때문에 같다. 이것으로 우리의 상승 분석적 탐구 활동은 완성된다. 이 분석 과정을 도식화하여 나타내면 다음과 같다.

$$\boxed{\overline{AO}\cdot\overline{BO} = \overline{CO}\cdot\overline{DO}}$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\frac{\overline{AO}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{BO}}}$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\overline{AO} : \overline{OC} = \overline{DO} : \overline{OB}}$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\triangle ACO \backsim \triangle DBO}$$

예제 5. a, b, c가 각각 삼각형의 변의 길이일 때, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$도 각각 삼각형의 변의 길이가 됨을 증명하여라.

1. $\triangle ABC$
2. a, b, c: 삼각형의 변의 길이 (주어진 것)
3. $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$: 세 선분
4. $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$: 삼각형의 변의 길이가 됨 (구하는 것)

이제, 상승 분석적 활동을 수행하자. (4)를 증명하기 위해서 무엇을 증명해야 할까? 물론, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ 중에서 가장 큰 값이 나머지 두 값의 합보다 작다는 것을 보이면 된다. 그러나, 우리는 a, b, c사이의 관계를 모르기 때문에, 우선 $a \le b \le c$라고 가정하자. 그러면, $a+b \le c+a \le b+c$이므로, 우리는 $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$을 증명해야 한다.

한편, $a+c \le b+c$이므로, $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{c+a}$이다. 즉, $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$을 증명하기 위해서, $\frac{1}{a+b} < \frac{2}{b+c}$를 보이면 되고, 다시금 이것을 보이기 위해 $\frac{2}{b+c} - \frac{1}{a+b} > 0$을 증명하면 된다. 풀이 과정을 체계적으로 기술하면, 다음과 같다.

5. $a \le b \le c$ 라고 가정하자.

6. $a+b \leq c+a \leq b+c$ (5)

7. $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$ (4, 6 증명할 것)

8. $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{c+a}$ (6)

9. $\frac{1}{a+b} < \frac{2}{b+c}$ (7, 8 증명할 것)

10. $\frac{2}{b+c} - \frac{1}{a+b} > 0$ (9 증명할 것)

11. $\frac{2}{b+c} - \frac{1}{a+b} = \frac{2(a+b)-(b+c)}{(b+c)(a+b)} = \frac{a+(a+b-c)}{(b+c)(a+b)}$

12. $a+b > c$ (2)

13. $a+(a+b-c) > 0$ (11, 12)

14. $\frac{a+(a+b-c)}{(b+c)(a+b)} > 0$ (2, 13)

10. $\frac{2}{b+c} - \frac{1}{a+b} > 0$ (14)

이 문제 풀이 과정에서는 (4) ⇐ (7) ⇐ (9) ⇐ (10) 등과 같은 상승 분석적 탐구 활동을 볼 수 있다. 여기서 주목할 것은 상승분석을 통해 학습자들의 탐구 활동을 체계적으로 구체화하고, 필요한 경우에 상응하는 도움을 줄 수 있다. 뿐만 아니라, 상승 분석적 활동은 학생들의 탐구 활동이 목적 지향적이도록, 즉 무엇을 할 것인가를 항상 염두에 둔 인지적 활동이 되도록 한다는 것이다.

(2) 하강 분석적 활동

하강 분석은 상승 분석과 마찬가지로 탐구 활동의 출발점이 구해야 하는 결론이기는 하지만, 하강 분석적 활동에서는 결론에 대한 필요 조건, 즉 문제 상황에서 원하는 결론으로부터 논리적인 지적 조작을 통해 새로운 결론을 구하고, 얻어진 결론으로부터 다시 결론을 얻는 과정을 반복한다. 그리하여, 그 결과 얻어진 최종적인 결론으로부터 우리의 최초 탐구 활동에 대한 아이디어나 결론을 얻게 된다. 이러한 논리적 전개의 방향은 상승 분석과는 반대의 방향으로 구하는 결론에서부터 아래로 향하는 논리적 전개가 이루어지며, 본 연구에서는 이러한 인지적 활동을 하강 분석이라고 명명하고자 한다.

하강 분석은 크게 귀류법, 불완전 분석 등으로 나눌 수 있다. 이들 각각에 대해 좀더 구체적으로 고찰해 보자.

1) 귀류법

가장 잘 알려진 하강 분석은 귀류법이다. 귀류법은 전통적으로 다양한 기하 문제 증명을 위해 많이 사용된 탐구 방법들 중의 하나이다. 귀류법에서는 최초 문제 상황에서 원하는 결론이 거짓이라고

가정한 후에, 얻어진 가정으로부터 이미 알고 있는 수학적 지식과 논증을 이용하여 새로운 결론(필요 조건)을 구하고, 얻어진 새로운 결론에서 다시금 논리적으로 참인 새로운 결론을 얻는 과정을 계속하여, 우리가 이미 알고 있는 수학적 사실이나 규칙에 최종적으로 얻어진 결론이 모순임을 유도하는 것이다. 귀류법을 도식화하면 다음과 같다.

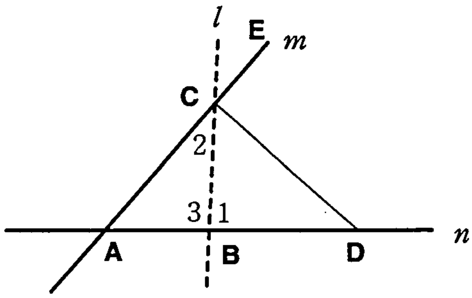
귀류법

구하는 것(결론)이 거짓이라고 가정 ⇒ 필요 조건 ⇒ ⋯ ⇒ 필요 조건

귀류법에서의 논리적 전개의 방향이 결론으로부터 아래로 향하고 있기 때문에 귀류법을 본 연구에서 하강 분석의 한 종류라 할 수 있다. 귀류법의 한 가지 예를 살펴보기로 하자.

예제 6. 두 직선과 한 횡단선이 만나 생기는 엇각이 같으면, 주어진 두 직선은 평행하다는 것을 증명하여라.

증명. 귀류법으로, 두 직선 m, n과 횡단선 l이 만나 생긴 엇각 1과 2가 같지만, 주어진 두 직선은 평행하지 않다고 가정하자. 즉, 두 직선 m과 n이 만난다는 결론을 얻을 수 있으므로, 아래와 같은 작도를 얻을 수 있다.



이때, 직선 n에 $\overline{AC} = \overline{BD}$인 점 D를 잡자. 그러면, 삼각형 ACB와 DBC가 SAS합동 조건에 의해 합동이고, 이로부터, $\angle 3 = \angle$BCD임을 알 수 있다. 한편, $\angle 3$은 $\angle$BCE과 엇각 관계에 있으므로 같다. 이로부터, 모순이 유도되고, 두 직선 m, n이 평행하다는 것이 증명된다.

증명 과정에서 활용된 하강 분석적 활동으로서의 귀류법을 도식화하면 다음과 같다.

두 직선 m, n과 횡단선 l이 만나 생긴 엇각 1과 2가 같지만, 주어진 두 직선은 평행하지 않다고 가정

↓

두 직선 m과 n이 만난다

↓

직선 n에 $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$인 점 D를 잡으면, △ACB와 △DBC가 합동임

↓

∠3 = ∠BCD

∠3과 ∠BCE는 엇각이므로 같다.

↓

모순이 유도되고, 두 직선 m, n이 평행하다는 것이 증명됨

2) 불완전 분석

귀류법에 대해서 고찰하면서 다음과 같은 물음이 생겨난다: 구하는 결론이 참이라고 가정하고, 이 가정으로부터 필요 조건을 찾아가는 논리적 전개를 반복한다면 어떤 결과가 생길까? 물론, 이러한 인지적 활동도 하강 분석의 한 종류가 된다. 본 연구에서는 이러한 하강 분석적 활동을 불완전 분석이라고 부를 것이다. 왜냐 하면, 결론이 참이라고 가정한 후에 얻어진 새로운 결론이 참이라고 하여, 역으로 최초의 결론이 참임을 주장할 수 없기 때문이다. 불완전 분석에 대해 좀더 구체적으로 고찰하자.

불완전 분석 활동에서는 우리가 증명하려는(구하려는) 결론이 옳다고 가정한다. 가령, A라는 명제에 대해 탐구한다고 하자. 이때, 이 명제 A가 옳다고 가정하고, 이 명제로부터 새로운 결론 B를, 그리고 또 다시 C, D, …, X 등등을 유도하는데, 이때 몇 가지 가능성이 발생한다:

첫째, 결론 X가 거짓인 경우(즉, 기존의 수학적 지식이나 정리들에 모순이 되는 경우). 이때는 우리의 가정(결론 A가 참이라는 것)이 잘못되었다는 것을 의미한다. 즉, 명제 A가 거짓임이 증명된다. 이처럼 불완전 분석은 어떤 명제가 성립하지 않음을 증명하는 한 가지 도구가 될 수 있다.

둘째, 결론 X가 참인 경우. 이 경우에는 반대 방향으로의 논리 전개가 가능한가를 더 살펴보아야 한다. 즉, 최초의 명제 A에서 최종적인 명제 X까지의 모든 논리적 전개가 가역적이면, A가 참임이 증명된다. 한편, 비가역적이면, 주어진 명제의 탐구는 불완전 분석에 의해서는 성공적으로 수행되지

못함을 의미하기 때문에, 다른 방법을 찾아야 한다.

이제, 구체적인 예들을 통해, 불완전 분석의 방법들을 고찰해 보자.

예제 7. 방정식 $x^3-117x^2+104x-520=0$이 기약분수 $\frac{a}{b}$(단, a, b는 정수이고, $b\neq 0$)인 해가 존재하는가?

이 예제의 탐구는 불완전 분석 활동의 첫 번째 유형을 통해 효과적으로 수행될 수 있다. 이때의 분석 과정을 기술하면 다음과 같다.

방정식 $x^3-117x^2+104x-520=0$의 해 $\frac{a}{b}$가 존재한다고 가정

↓

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 117\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 104\left(\frac{a}{b}\right) - 520 = 0$$

↓

$$a^3-117a^2b+104ab^2-520b^2 = 0$$

↓

$$a^3 = 117a^2b-104ab^2+520b^2$$

↓

등식의 우변은 a로 나누어 떨어지고, 좌변은 b로 나누어 떨어지지 않으므로, 모순

↓

가정(기약분수 $\frac{a}{b}$가 방정식의 해라는)이 잘못됨. 즉, 기약분수인 해는 존재하지 않는다.

이 예제에서는 해의 존재성에 관해 불완전 분석의 방법으로 그 해가 존재하지 않음을 증명하였는데, 이것은 수학적 탐구 활동에서 매우 강력한 도구가 될 수 있다. 다른 예제를 살펴보자.

앞의 예제2에 예제에 대한 증명에서 왜 사인 법칙을 사용할까? 사인 법칙을 사용해야 한다는 것을 어떻게 알아낼 수 있을까? 라는 물음이 생긴다. 물론, 이 물음에 대해서 여러 가지 측면에서 접근할 수 있을 것이다. 본 고에서는 이 물음에 대한 한 접근으로 불완전 분석 활동을 사용하여 보자.

앞의 예제와는 달리 구하는 결론 $S = \frac{abc}{4R}$이 참임을 가정해도, 문제해결 탐구를 위한 유의미한 시사점을 얻을 수 없다. 이러한 경우에, 우리가 취할 수 있는 한 가지 전략이 예제에서 구하는 S를 이미 참임이 알려진 다른 방법으로 구하고, S에 대해 얻어진 두 가지 방법을 비교하여 분석 활동을 진행하는 것이다. 주어진 예제에서 S는 $\frac{1}{2}ah$나 $\frac{1}{2}ac \cdot \sin\angle B$, 또는 헤론의 공식을 생각할 수 있지만, 불완전 분석 활동을 통해 $S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin\angle B$가 문제해결 과정에 필요한 공식임을 알 수 있다.

이 예제에 대한 분석 과정을 도식화하면 다음과 같다.

$S = \frac{abc}{4R}$이 옳다고 가정

S를 구하는 이미 참임이 알려진 방법의 활용.
즉, $S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin\angle B$

$$\downarrow$$

• $\frac{1}{2}ac \cdot \sin\angle B = \frac{abc}{4R}$

$$\downarrow$$

$$\frac{b}{\sin\angle B} = 2R$$

그리고, 불완전 분석 과정에서 얻어진 명제들은 가역적으로 기술할 수 있기 때문에, 우리는 주어진 예제에 대한 증명 과정을 체계적으로 기술할 수 있다.

불완전 분석 활동과 관련하여 살펴본 두 가지 예로부터 우리는 불완전 분석 활동을 위한 두 가지 구체적인 활동 전략을 인식할 수 있다. 첫째, 구하려는 결론이 참임을 가정하고, 이를 변형시켜 다른 새로운 결론을 얻고, 이와 같은 과정을 반복하여 문제의 주어진 조건이나 기존의 지식으로부터 쉽게 알 수 있는 결론을 유도하는 방법. 둘째, 구하려는 것을 이미 참임을 알고 있는 다른 방법으로 구하여, 두 가지 방법에서 얻어진 식들을 비교하여 이미 새로운 결론을 유도하는 방법.

불완전 분석과 관련된 다음 예제를 살펴보자.

예제 8. 다음 분수 방정식을 풀어라.

$$\frac{x}{x-3}-\frac{7}{x+2}-\frac{15}{x^2-x-6}=0$$

엄밀한 수준에서 논의한다면 방정식을 푸는 행위는 분석적 활동의 한 유형이라고 할 수 있다. 주어진 분수 방정식을 보면, 임의의 x에 대해 좌변과 우변의 등식이 성립하는 것은 아니다. 즉, 등식이 성립하는 경우는 x대신에 주어진 방정식의 근 x_0를 대입했을 때에만 성립하는 것이다. 즉, 엄밀한 수준에서 주어진 분수 방정식은 다음과 같이 풀어야 할 것이다.

풀이. 주어진 분수 방정식의 근이 존재하여, 그것을 x_0라고 가정하자. 그러면, 다음 등식이 성립한다:

$$\frac{x_0}{x_0-3}-\frac{7}{x_0+2}-\frac{15}{x_0^2-x_0-6}=0$$

얻어진 등식의 양변에 $x_0^2-x_0-6$을 곱하면, $x_0(x_0+2)-7(x_0-3)-15=0$을 얻고, 이를 정리하여 인수분해 하면, $x_0=2$ 또는 3을 얻을 수 있다. 이때, 3은 무연근이므로, 구하는 해는 2이다.

주어진 분수 방정식의 탐구를 시작할 때, 사실 우리는 주어진 방정식이 해를 가지는지 아닌지 모르는 상태에서 해 x_0가 존재한다고 가정했기 때문에, 주어진 문제의 풀이는 불완전 분석 활동의 결과로 볼 수 있다. 게다가, 해결 과정에서 무연근을 제거하는 것은 최초의 가정, 즉 주어진 방정식의 근 x_0가 존재한다는 가정으로부터 필요 조건을 찾는 논리적 전개 과정을 거쳤기 때문에, 이에 대한 가역적인 반성의 과정에서 자연스럽게 나타나는 것이다.

이러한 불완전 분석 활동은 수학 교수-학습 현장에서 문제해결 탐구를 위한 강력한 도구의 발견을 돕는 인지 활동으로 활용될 수 있다. 특히, 한인기(2000)는 작도 문제의 해결 과정에 대한 연구를 통해, 작도 문제의 해결 과정에 불완전 분석적 활동이 중요한 역할을 한다는 것을 밝혔고, 이러한 분석적 활동을 활성화시킬 수 있는 다양한 작도 문제들을 제시하였다.

한편, 대수적인 방법은 문장제 문제나 기하 문제를 풀 때에 빈번히 사용되는 강력한 문제해결의 도구로써, 해석 기하학의 창시자인 데카르트는 이러한 대수적인 방법의 중요성을 매우 강조하였다.

흔히 대수적 방법으로 문제를 풀 때, 첫째 문제의 조건에 따라 구하는 미지의 값을 문자로 치환하고, 둘째 다른 변인들과 주어지 것들을 선택된 문자들로 나타내고, 셋째 문자들을 포함하는 방정식이나 연립 방정식을 세워서 문제를 푼다. 그런데, 이 대수적 방법을 면밀하게 살펴보면 불완전 분석 활동의 결과임을 알 수 있다. 대수적 방법을 이용해서 해결하는 다음과 같은 전형적인 예들을 통해, 불완전 분석적 활동과의 관계를 규명하자.

예제 9. 동생이 집을 나서고 8분이 지난 후에 형이 동생을 따라 나섰다. 동생은 매분 60 m의 속력으로 걷고, 형은 매분 220 m의 속력으로 따라갔다. 형은 몇 분 후에 동생을 만나게 되는가?

이 예제를 풀기 위해선, 우선 형이 x_0분 후에 동생과 만난다고 가정을 한 후에, x_0를 포함한 식인 $220x_0 = 60(8+x_0)$을 만든다. 즉, 주어진 문제가 해결되어 답인 x_0를 안다고 가정했을 때, 우리는 등식을 얻을 수 있고, 이로부터 $x_0 = 3$을 구할 수 있는 것이다.

이처럼 대수적 방법은 우선, 문제 상황에서 구하는 해가 존재한다고 가정을 한 후에, 문제 상황에 상응하는 방정식을 세워 이로부터 해를 얻게 된다. 이 경우에는 보통 무연근의 존재를 확인하지 않는데, 그 이유는 이 예제에서와 같은 일차 방정식은 그 논리적인 전개 과정이 가역적이라는 것을 암묵적으로 가정하기 때문이다.

Ⅳ. 결 론

수학교육 분야에서 종합적 활동과 분석적 활동의 중요성은 많은 학자들에 의해 강조되었지만, 아직 각 인지 활동의 범위나 그 개념 규정이 명확하게 체계화되어 있지 않았다. 본 연구에서는 종합적 활동의 본질과 장·단점, 분석적 활동의 구체적인 유형들, 분석적 활동의 효율적 수행을 위한 전략들, 그리고 다양한 분석적 활동들을 체계화하고 이를 개념화하였다.

종합적 활동은 문제해결이나 논리적 추론, 논증에서 주어진 것들(조건들)로부터 구하는 것(결론)으로 향하는 인지적 활동을 의미한다. 종합적 활동에서 우리는 주어진 것들로부터 추가 정보들을 얻고, 얻어진 추가 정보들로부터 새로운 추가 정보를 얻는 활동을 계속하여, 결국엔 구하는 결론에 도달하게 된다. 수학 교수-학습 과정에서 종합적 활동은 첫째, 어렵지 않은 문제들에 대한 탐색 수행 과정에서 활용되고, 둘째 문제를 다 풀고 나서 그 풀이를 체계적으로 기술하는 과정에서 활용된다.

종합적인 활동을 논리적인 측면에서 본다면, 이 활동 방법은 주어진 조건들, 이미 알려진 수학적 사실들로부터 출발하여 중간 결과들을 거쳐 결국엔 우리가 증명하려는 것에 도달하기 때문에 연역적인 논리 전개 방법에서 중요한 구성 요소라고 볼 수 있다.

그러나, 종합적 활동의 단점은 첫째, 문제해결 탐색 수행의 근거를 제시해 주지 못하며, 둘째 다른 방식으로 하지 않고, 왜 꼭 그렇게 했는가? 에 대한 대답을 주지 못하고, 셋째 구하는 목표(답)를 향해 갈 때, 주어진 것과 구하는 것 사이에서 나타나는 많은 추가 정보들 중에서 필요한 것을 선택하는 과정에서 어려움이 발생한다.

문제해결이나 논증에서 학생들의 구체적인 탐구 활동의 출발점이 구하는 것(결론)이면, 이러한 활동을 분석적 활동이라 부른다. 분석적 탐구 활동을 논리적 측면에서 고찰하면, 구하는 결론에 대한 충분 조건을 구하는 활동과 구하는 결론에 대한 필요 조건을 구하는 활동으로 크게 구분할 수 있으며, 이에 상응하여 본 연구에서는 각각의 분석적 활동을 상승 분석과 하강 분석으로 규정하였다.

상승 분석적 활동에서는 어떤 명제 A가 성립한다는 것을 보이기 위해, 명제 A에 대한 충분조건 B를 찾고, 명제 B가 성립한다는 것을 보이기 위해 충분조건 C를 구하는 등등의 과정을 거듭하여, 주

어진 조건이나, 기존의 수학적 지식으로부터 쉽게 유도할 수 있는 명제가 얻어질 때까지 이러한 분석의 과정을 반복한다. 상승 분석의 구체적인 활동들은 다음과 같은 질문에 대한 탐구를 통해 수행되는 경우가 많다:

- 결론을 증명하기(구하기) 위해서 무엇을 알아야 하는가?
- 결론을 를 증명하기 위해서 무엇을 증명해야 하는가?

여기서 주목할 것은 상승 분석적 활동이 학생들의 탐구 활동이 목적 지향적이도록, 즉 무엇을 할 것인가를 항상 염두에 둔 인지적 활동이 되도록 한다는 것이다.

한편, 하강 분석은 구하려는 결론에 대한 필요 조건, 즉 문제 상황에서 원하는 결론으로부터 논리적인 지적 조작을 통해 새로운 결론을 구하고, 얻어진 결론으로부터 다시 결론을 얻는 과정을 반복한다. 그리하여, 그 결과 얻어진 최종적인 결론으로부터 우리의 최초 탐구 활동에 대한 아이디어나 결론을 얻게 된다. 이러한 논리적 전개의 방향은 상승 분석과는 반대의 방향으로 구하는 결론에서부터 아래로 향하는 논리적 전개가 이루어지며, 본 연구에서는 이러한 인지적 활동을 하강 분석이라고 규정하였다.

하강 분석은 크게 귀류법, 불완전 분석 등으로 나눌 수 있다. 귀류법에서는 최초 문제 상황에서 원하는 결론이 거짓이라고 가정한 후에, 얻어진 가정으로부터 이미 알고 있는 수학적 지식과 논증을 이용하여 새로운 결론(필요 조건)을 구하고, 얻어진 새로운 결론에서 다시금 논리적으로 참인 새로운 결론을 얻는 과정을 계속하여, 우리가 이미 알고 있는 수학적 사실이나 규칙에 최종적으로 얻어진 결론이 모순임을 유도하기 때문에 하강 분석의 한 유형이 된다.

한편, 불완전 분석 활동에서는 우리가 증명하려는(구하려는) 결론이 옳다고 가정한다. 가령, A라는 명제에 대해 탐구한다고 하자. 이때, 이 명제 A가 옳다고 가정하고, 이 명제로부터 새로운 결론 B를, 그리고 또 다시 C, D, …, X 등등을 유도하는데, 이때 몇 가지 가능성이 발생한다: 첫째, 결론 X가 거짓인 경우(즉, 기존의 수학적 지식이나 정리들에 모순이 되는 경우)에는 가정(결론 A가 참이라는 것)이 잘못되었다는 것을 의미한다. 즉, 불완전 분석 활동을 통해 어떤 명제가 성립하지 않음을 증명할 수 있다. 둘째, 결론 X가 참인 경우에는 반대 방향으로의 논리 전개가 가능한가를 더 살펴보아야 한다. 즉, 최초의 명제 A에서 최종적인 명제 X까지의 모든 논리적 전개가 가역적이면, A가 참임이 증명된다. 한편, 비가역적이면, 주어진 명제의 탐구는 불완전 분석에 의해서는 성공적으로 수행되지 못함을 의미하기 때문에, 다른 방법을 찾아야 한다.

그리고, 본 연구를 통해 불완전 분석 활동을 체계적으로 수행하기 위한 구체적인 활동 전략들을 추출하였으며, 작도 문제 해결 과정, 방정식에 대한 문제해결 활동, 그리고 방정식의 활용이나 기하 단원에서 많이 활용하는 문제해결의 대수적 방법이 불완전 분석 활동의 한 유형들임을 규명하였다.

참 고 문 헌

강문봉 (1992). 분석법에 관한 고찰, 대한수학교육학회 논문집. **2(2)**, 서울: 대한수학교육학회.

구세프 V. A.·한인기 (1996). 학습자의 수학적 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **35(1)**, 서울: 한국수학교육학회.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대 출판부.

한인기 (1998). 분석-종합적 탐색 수행. 1998년도 대한수학교육학회 추계 수학교육학연구발표대회논문집. 서울: 대한수학교육학회.

한인기 (2000). 분석적 활동의 활성화를 위한 작도 문제의 활용. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **10**, 서울: 한국수학교육학회.

<러시아어 참고 문헌>

구세프 V. A. (1995). *학생들이 수학을 좋아하도록 어떻게 도울 것인가?* 모스크바: 아방가르드.

다닐로바 E. F. (1961). *기하 문제의 해결을 위해 학생들을 어떻게 도울 것인가?* 모스크바: 학습-교육 출판사.

뿌쉬낀 V. N. (1967). *발견술-창조적인 사고의 과학.* 모스크바: 종합 출판사.