

대수적인 관점에서의 수와 연산*

최 창 우 (대구교육대학교)

80년대 후반부터 90년대 중반까지 NCTM을 비롯한 여러 수학교육 관련 기관 단체에서는 많은 기준(standards)들을 내 놓았다. 그 내용은 대체적으로 어떠한 수학을 어린이들이 학습해야할지, 교실 수업은 어떠한 모습으로 이루어져야하며, 어린이들이 수행하는 것과 수학프로그램들의 효율성을 판단하고 평가하기 위해 어떠한 지침이 사용될 수 있는지에 대한 권고 사항들로 이루어져 있다고 볼 수 있다. 본 고에서는 이러한 기준들의 내용 중 수와 연산 영역에서 제시된 기준들을 토대로 우리의 7차 교육과정과 관련지어 알아보고 아울러 대수적인 관점에서 이 영역을 지도하는데 있어서 몇 가지 간과하기 쉬운 유의점(교사의 관점에서)들을 살펴보았다.

I. 서론

7차 초등학교 수학 교과서의 구성은 주지하다시피 6차에서 5개의 영역 즉 수, 연산, 도형, 측도, 관계 영역으로 나뉘어져 있던 것을 수와 연산, 도형, 측정, 문자와 식, 규칙성과 함수, 확률과 통계의 6개 영역으로 합병 또는 세분하였고 특히 6차에서 다룬 내용 중에 수, 연산 영역의 내용은 분량이나 난이도 면에서 상대적으로 약화시켜서 다루고 있거나 학습 요소의 상향(上向)이동이 두드러지고 있다고 할 수 있다. 교과서의 구성도 실생활중심 활동중심으로 기존의 교과서에 비하면 가히 혁신적이라 할만큼 대폭적인 변화를 가져온 것이 사실이다. 그 중에서도 수와 연산 영역은 학교 수학 교육과정에서 아마도 다른 어떤 영역보다도 오랫동안 가르쳐져 왔으며 학교상황을 넘어서도 광범위하게 인식되고 가치를 인정받아 왔다.

새로이 개정된 7차 교육과정에서도 수와 연산 영역의 내용 전개는 수 개념이 초등학교 수학의 실제적인 기초와 출발점이 된다는 생각으로 구체적인 상황이나 조작물의 사용을 통하여 이해를 유도하는 방식으로 그 내용이 구성되어 있다고 할 수 있다. 또한 연산의 측면에서는 수 개념의 이해를 기반으로 관련된 연산의 내용을 전개하되 처음부터 기계적인 계산 알고리즘의 형식화나 반복 숙달의 방법을 통해서가 아니라 각 연산이 필요한 상황에 대한 이해는 물론 각 계산의 알고리즘이 어떤 주어진 절차대로 이루어져야만 되는 필연적 이유를 학습자가 이해할 수 있는 탐구나 설명의 과정이 충분히 포함되도록 구성되어 있다고 할 수 있다.

이 글은 미국 수학교사협회(NCTM)에서 최근에 발간된 '학교수학을 위한 원리와 기준'의 내용 중 수와 연산영역에서 제시된 기준(standards)들을 토대로 우리의 7차 교육과정과 관련지어 각각의

* 이 논문은 2000년도 대구교육대학교 교내 학술 연구비 지원에 의해 연구되었음.

학생들이 수와 연산 영역에서 알아야 할 것과 할 수 있어야만 하는 것이 무엇인지를 학년을 초월하여 전체적인 관점에서 조망해보고 아울러 대수적인 관점에서 이 영역을 지도하는데 있어서 몇 가지 간과하기 쉬운(특히 교사의 관점에서) 유의점들을 살펴보았다.

II. 본 론

1. 수와 연산 영역에서 관심이 증가되는 점

80년대 후반부터 90년대 중반까지 NCTM에서는 많은 기준(standards)들을 내놓았다. 이와 같은 기준들은 수학교육의 발전을 위한 하나의 지침서라고 볼 수 있으며 그 내용은 대체적으로 어떠한 수학을 어린이들이 학습해야할지, 교실 수업은 어떠한 모습으로 이루어져야하며, 어린이들이 수행하는 것과 수학프로그램들의 효율성을 판단하고 평가하기 위해 어떠한 지침이 사용될 수 있는지에 대한 권고사항들로 이루어져 있다고 볼 수 있다. 학교수학을 위한 기준에서 수와 연산에 제시된 기준들의 핵심은 한마디로 수 감각(이를테면, 수를 자연스럽게 분해하는 능력, 수가 갖는 의미를 발달시키는 것, 십진 기수체계의 이해, 어렵하기, 수의 상대적인 크기를 인식하는 것 등)의 계발에 있다고 볼 수 있다. 이와 관련하여 수 체계 및 수의 구조에 관한 이해는 물론이고 세어보기, 수, 그리고 산술적인 계산에 관한 깊이 있고도 근본적인 이해와 숙달에 관해 묘사하고 있다. 그리하여 근본적으로 수와 연산에 대한 이해, 수 감각을 기르기, 산술적인 계산을 능숙하게 하는 것 등이 초등학생들을 위한 수학교육의 핵심이라고 보고 있다. 우선 학년을 초월하여 전체적인 측면(수학 교육 과정 기준)에서 모든 수학 수업 프로그램은 수와 연산 영역에서 학생들이 다음과 같은 세 가지 측면에서 수와 연산 감각의 발달을 촉진시켜야 한다고 강조하고 있다.

① 수의 다양한 표상 방법, 수 및 수 체계 사이의 관계를 이해할 수 있어야 함을 강조하고 있다.

저학년에서의 어린이들은 어떤 대상의 집합에서 '얼마나 많은가' 를 세어보고 알아내는 것을 학습함으로써 수에 대한 이해를 발달시켜 나간다. 여기서의 핵심적인 개념은 수라는 것은 분해될 수 있으며 또한 다양한 방법으로 생각될 수 있다는 것이다. 이를테면 저학년에서 24는 10이 2, 1이 4 아니면 12가 2로 또는 두 자리 수를 지도할 때 73은 '70보다 3이 더 큰 수', '63보다 10이 더 큰 수', '50보다 23 이 더 큰 수' 등으로 말하게 하고, 이를 기호로 $70 + 3$, $63 + 10$, $50 + 23$ 등과 같이 나타내게 해 봄으로써 7차 교육과정에서 주장하는 것처럼 수를 학습하면서 동시에 연산도 함께 학습할 수 있도록 하는 것 등이다. 어린이들은 하나의 10을 단순히 1이 10개 모아진 것으로 보는 데서부터 1이 10개와 10이 1개를 동등한 것으로 볼 수 있게 되는데 이러한 인식은 10진법 수 체계의 구조를 이해하는 중요한 첫 걸음으로 볼 수 있다(Cobb and Wheatley, 1988. Principles and Standards for School Mathematics, NCTM 2000 에서 재인용).

중학년에서는 어린이들이 수가 다양한 방법으로 표현된다는 것을 알 수 있어야 하는데 이를테면, 1/4, 25 %, 그리고 0.25는 똑같은 수에 대한 제각기 서로 다른 이름이라는 것과 분수와 소수를 수직선 위에 표상하기, 분수의 합을 어렵할 수 있는 것 등이 여기에 포함된다고 볼 수 있다. 이를테면 $1/2 + 3/8$ 은 각각이 $1/2$ 보다 작거나 같기 때문에 1보다는 작다 이다.

고학년에서는 어린이들이 동치분수, 소수, 그리고 퍼센트 사이를 자유자재로 넘나들 수 있어야 하며 다양한 전략을 사용하여 유리수를 비교할 수 있어야 함을 강조하고 있다.

② 연산(operations)의 의미와 상호간의 관련성을 이해할 수 있어야함을 강조하고 있다.

실제로 연산의 사전(辭典)적 의미(수학교육론, 강시중 저, p.254에서 재인용)를 조사해 보면

- 실제로 일을 하는 것(doing or performing of a practical work)
- 作用力 또는 power의 일을 하는 것(an exertion of power or influence)
- 행동이나 기능을 위한 일 등으로 나와 있다.

위에서 알 수 있는 바와 같이 연산의 뜻은 ‘操作하는 힘’ 즉 그것은 ‘어떻게 操作(結合)되어 있는가?’ 를 알아보는 것으로 되어있다. 수학적으로는 연산을 어떤 수의 집합에 속하는 두 개의 원소 a, b 의 순서쌍 (a, b)에 대응하는 원소 c를 그 집합의 원소 중에 一意的으로 결정하는 조작으로 정의한다. 초등학교 수학에서는 유리수의 범위까지를 취급함으로 이를테면 자연수의 집합 N에 있어서 임의의 두 원소 사이에 加法·減法·乘法·除法을 생각한다면,

加法: $6 + 2 = 8$, 減法: $5 - 2 = 3$, 乘法: $8 \times 3 = 24$, 除法: $12 \div 3 = 4$

위의 4칙 연산에서 공통성을 생각해 보면 연산의 일반적인 개념을 얻을 수 있다: 이들의 공통성을 생각해 보면 두 數의 짝에 대응하는 원소 하나만 정해진다는 사실을 우리는 알 수 있으므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

加法(6, 2) → 8, 減法(5, 2) → 3, 乘法(8, 3) → 24, 除法(12, 3) → 4

따라서 두 개의 임의의 수 a, b에 하나의 수 c를 대응시키는 것으로 볼 수 있는데 두 개의 수의 쌍 a, b 에는 순서가 있으므로 하나의 순서쌍(a, b)이라 볼 수 있고, 이 순서쌍에 하나의 수 c를 대응시키는 것이므로 곱집합 $N \times N$ 에서 N 으로의 사상(寫像)

$N \times N \rightarrow N, (a, b) \rightarrow c$ (단, $a \in N, b \in N, c \in N$)라 할 수 있다.

실질적인 의미는 이와 같음에도 불구하고 연산을 사상이라 하지 않는 이유는 이를테면 減法演算에서 $(5, 2) \in N \times N$ 은 $3 \in N$ 으로 寫像되나 $(2, 5) \in N \times N$ 은 $-3 \notin N$ 으로 寫像되어 N에는 -3 이라는 원소가 없기 때문에 $N \times N$ 에서 N으로의 寫像이라 할 수 없는 경우도 있으므로 演算이라 부른다(박성택 외, 1994).

초등학교 수학교과서에 나오는 대부분의 사칙 계산이 위에서 설명한 바와 같은 것에 근거하고 있음에도 불구하고 대부분의 어린이들이나 현장교사들은 연산을 단순히 계산 혹은 사칙 계산이라고 생각하고 있었으며 이와 같은 연산의 정확한 의미를 이해하지 못하고서 아이들을 지도하고 있는 것 같았다.

저학년에서의 어린이들은, 범 자연수의 덧셈과 뺄셈에 대한 다양한 의미에 직면할 수 있어야 하는데 이를테면, 칠수는 과자 2개를 얻어서 현재 5개를 가지고 있다면 칠수는 처음에 과자를 몇 개 가지고 있었을 까요? 이와 같은 문제를 해결하기 위하여 어린이들은 덧셈을 사용할 수도 있고 자신의 손가락을 가지고 2부터 세어볼 수도 있을 것이다. 아니면 뺄셈 상황으로 인식하여 $5-2=3$ 이라는 사실을 사용할 수도 있을 것이다. 이와 같은 간단한 계산문제에 어린이들이 접근하는 방법을 통해서 교사는 어린이들이 어떻게 연산을 이해하고 있는지를 조금이나마 알 수가 있을 것이다. 이와 같은 사고 전략을 탐구해보거나 혹은 $3+4$ 가 $3+3+1$ 과 같다는 것을 깨닫게 해보는 것이 어린이들에게 연산의 의미를 알게 하는데 도움을 줄 수가 있을 것이다. 곱셈과 나눗셈은 자신들의 생활 주변에서 일어나는 이를테면, 탁구공이 한 상자에 10개씩 들어 있습니다. 10 상자에는 탁구공이 몇 개 들어 있는지 알아보시오(7차 2-가 수학교과서)와 같은 문제를 해결할 때 의미를 가지기 시작할 수 있다.

중학년에서는, 범 자연수의 곱셈과 나눗셈에 대한 의미를 학생들이 발달시키도록 도와주는 것이 주된 초점이 되어야 하며 어린이들은 특별한 문제에 대하여 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 하여야 할지를 결정할 수 있어야 함을 강조하고 있다.

고학년에서는 대체적으로 유리수에 대한 연산을 강조하고 있음을 알 수 있다.

③ 계산을 능숙하게 할 수 있어야 하고 적절히 어렵(estimation)을 할 수 있어야 함을 강조하고 있다.

우선 어린이들은 정확한 답이 요구되는 상황인지 아니면 어렵이 요구되는지 또는 반복되는 계산을 요구하는가 와 같은 결정에 대한 원리를 제공할 수 있게 되기 위해 문제 상황을 평가할 수 있어야 한다. 능숙함을 발달시키는 데는 개념적 이해와 절차적 계산 사이의 균형과 연결성이 요청되며 개념적 토대 없이(소위 말하는 관계적 이해) 연습된 계산적 전략은 쉽게 잊혀지고 잘못 기억되기 쉽다. 반면, 능숙함이 없는 이해는 문제 해결 과정을 저해할 수 있다.

대부분의 연구자들과 오랜 경험을 가진 교사들은 초등학교에 있어서의 어린이들은 계산문제를 해결하는데 있어서 서로간에 함께 전략을 개발하고, 기록하고, 설명하고, 비판할 수 있도록 격려해줄 때 많은 양의 중요한 학습이 일어날 수 있다고 한결같이 말한다.

유리수 개념의 발달이 분수나 소수형태의 유리수를 계산하는데 중요할 뿐 아니라 고학년쯤 되면 이러한 형태의 유리수를 계산하는데 능숙해야 한다. 그러나 몇몇 학자들의 연구(Carpenter et al. 1981)에 의하면 초등학교 고학년(13살 정도)의 아이들에게 $12/13 + 7/8$ 을 어렵해보라고 했더니 약 24%의 아이들만이 그 답이 2에 가깝다고 답하였으며 나머지는 대다수가 분수의 덧셈에 있어서 통

상적인 계산착오이거나 실행되어지는 연산에 대한 이해 부족을 암시해 주는 1, 19, 혹은 21에 가깝다는 응답을 보였다고 한다. 만약 어린이들이 분수의 덧셈을 이해하고 있고 아울러 수 감각이 발달되어 있다면 이러한 실수는 일어나지 않을 것이다.

또 한편으로는 계산을 능숙하게 한다는 말은 계산을 하는데 있어서 어떤 도구(암산, 지필, 어림, 계산기의 사용)를 사용할 지 언제 사용해야 할지를 현명하게 선택하는 것이라 할 수 있다.

세부적인 지침들은 언급하지 않았지만 결과적으로 이러한 기준들에 근거한 수학수업에서는 어린이들이 수학을 행하게 하고, 서로서로 상호 작용하게 하고, 교과서와 함께 다른 자료들을 사용하게 할뿐만 아니라 수학을 실생활 문제에 적용하고 복잡한 문제를 해결하기 위한 전략을 개발하는 것 등이 라고 생각되어진다.

교사는 문제를 제기하고, 학생들의 사고를 형성하도록 질문을 하고, 서로 상이한 해결방법을 탐구하도록 격려해준다. 또한 학생들이 적절할 때 사용할 수 있도록 다양한 수학적인 아울러 공학적인 도구(계산기, 컴퓨터, 그리고 조작도구)를 갖추어야 하며 어린이들의 사고와 이러한 도구들이 어린이들의 활동 속에 어떻게 반영되는가를 알아보기 위해 수업 중 어린이들 사이를 계간 순시할 수도 있다. 아울러 수학내의 다른 아이디어 및 원리들과 연결을 하도록 학생들을 격려해야하며 학습되어진 수학을 요약해주고 수학에 대한 어린이들의 이해를 명확히 할 필요가 있다.

수와 연산 영역에서 우리의 7차 교육과정에서는 다음과 같은 몇 가지 특징을 찾아볼 수 있다. 첫째, 수 감각을 강조(1단계의 수와 연산 영역에 관련된 수행평가와 문제해결은 수 감각을 기르는 활동이나 문제로 되어있음)하고 있다. 앞서 언급한 바와 같이 수 감각은 수와 관련한 다양한 능력과 이해력, 다양한 방법으로 수를 표현하는 능력, 실생활의 수세기와 측정 상황에서 수를 해석하고, 사용하는 능력을 말한다. 이와 같은 어린이들의 수 감각을 개발시키기 위해 다양한 활동을 통해 수의 의미를 알게 하고, 분류 및 패턴을 강조하고 있다.

둘째, 복잡한 계산을 축소하여 큰 수의 계산을 삭제하였다. 3-나 단계에서 곱하는 수와 나누는 수가 3자리 이상인 곱셈, 나눗셈을 삭제하여 4-가 단계에서 곱하는 수와 나누는 수가 두 자리인 것으로 형식화를 끝내도록 하였으며 소수의 계산은 계산 원리를 다루는 수준에서 간단히 다루는 것으로 약화되었다.

셋째, 암산을 강조하고 있으며 계산기 및 컴퓨터의 활용과 수업 전략의 개발에 힘쓰고 있는 것이 그 특징이라 할 수 있다.

2. 대수적인 관점에서의 수 와 연산

대수(Algebra)는 초보적인 뜻으로는, 숫자에 의해서 하나 하나의 수를 나나내는 대신 문자에 의해서 일반적인 수를 대표시켜, 수의 관계, 수의 성질, 수 계산의 법칙 등을 연구하는 수학을 일컫는 것

으로 본래는 방정식을 해결하기 위한 일반적인 방법을 연구하는데 그 역사적인 근원을 가지고 있다고 할 수 있다. 후자는 간혹 일반화된 계산 또는 계산을 일반화하기 위한 언어라고 말하기도 한다. 하지만 단순히 기호를 조작하기 위한 일련의 규칙 이상으로 일종의 사고하는 방법이라고 할 수 있다. 학교 수학을 위한 원리와 규준에서 초등학교 수학에서 어린이들이 할 수 있어야 하는 것은 패턴 및 관계를 이해할 수 있어야 하고, 수학적인 상황과 구조를 대수적인 기호를 사용하여 나타내고 분석할 수 있어야 함을 요구하고 있다. 이 단락에서는 초등학교 수학의 수와 연산 영역에서 비 형식적으로 전개될 수 있는 몇 가지 주요한 대수적인 개념들을 7차(6차) 초등 수학교과서와 관련지어 알아보고자 한다.

(1) 식(式)과 등식(等式)

초등학교 저학년의 어린이들이 수학교과서에서 종종 수(number)로 이루어진 문장이라고 생각하는 식과 등식을 제일 처음 만나는 것은 1학년의 덧셈 상황의 결과를 기록하는 것을 배울 때 일 것이다. 이를테면, 7차 초등수학교과서 1-가(p.62) 덧셈 식을 알아봅시다 에서 비둘기가 2마리 있습니다. 5마리가 더 날아왔습니다. 모두 몇 마리인지 알아보시오. 의 문장에서 상징적인 표현 $2 + 5$ 는 첨가하는 행위를 나타내기 위해 사용되어 질뿐만 아니라 비둘기의 수를 나타내는 이름이기도 하다. $2 + 5 = 7$ 이라는 등식에서 7은 비둘기의 총 마리 수를 나타내는 또 하나의 이름이며 등호 기호(=)는 $2 + 5$ 와 7이라는 두 개의 이름은 똑같은 수를 나타낸다는 것을 의미할 뿐만 아니라 필요하다면 둘 중에 하나가 나머지 하나를 대신할 수 있다는 의미로 볼 수 있다. 그러나 어린이들은 실제로 어떠한 사고를 가지고 있는가를 조사해 보기 위해 대구광역시 D초등학교 4학년 2개 반 80명을 대상으로 부록과 같은 설문을 조사 한 결과는 다음과 같다.

<표 1> 설문 1에 대한 응답의 결과

(A) 4학년 1반(N= 41)

세부문항	응답자 수(%)
① 단순한 기호이다	1 (2.4)
② 왼쪽 2와 5를 더하라(계산하라)는 기호이다	15(36.6)
③ 비둘기가 날아옴을 나타낸다	0 (0)
④ 2+5 와 7이 같음을 나타낸다	25(61)

(B) 4학년 5반(N= 39)

세부문항	응답자 수(%)
① 단순한 기호이다	1 (2.6)
② 왼쪽 2와 5를 더하라(계산하라)는 기호이다	3 (7.7)
③ 비둘기가 날아옴을 나타낸다	2 (5.1)
④ 2+5 와 7이 같음을 나타낸다	33(84.6)

<표 2> 설문 2에 대한 응답의 결과

(A) 4학년 1반(N= 41)

세부분항	응답자 수(%)
① 단순한 기호이다	2 (4.9)
② 왼쪽 2와 5를 더하라 (계산하라)는 기호이다	18(44)
③ 비둘기가 날아옴을 나타낸다	1 (2.4)
④ 2+5와 7이 같음을 나타낸다	20(48.7)

(B) 4학년 5반(N= 39)

세부분항	응답자 수(%)
① 단순한 기호이다	1 (2.6)
② 왼쪽 2와 5를 더하라 (계산하라)는 기호이다	5 (12.8)
③ 비둘기가 날아옴을 나타낸다	1 (2.6)
④ 2+5 와 7이 같음을 나타낸다	32(82)

앞의 표1, 2를 통하여 알 수 있듯이 반에 따라 상당한 차이를 보이고는 있으나 전체 설문에 응한 80명의 어린이 중 18명(22.5%)의 어린이가 등호기호(=)를 왼쪽 2와 오른쪽 5를 더하라(계산하라)는 어떤 지시로 생각하고 있었으며 이는 마치 등식의 좌변은 질문으로 등식의 우변은 자신들의 경험으로 볼 때 단 하나의 어떤 수로 이루어진 답으로 생각하고 있는 것 같았다. 이와 같은 오 개념은 2 + 5를 세로 셈 형식으로 나타냈을 때도 표2에서 알 수 있는 바와 같이 전체 어린이 80명중 23명(28.75%)이 이와 같은 오 개념을 가지고 있는 것으로 조사되었다. 이와 같이 어린이들이 생각하는 이유는 대체적으로 세로 셈에서도 어린이들은 아래에 있는 숫자 밑에 있는 가로줄이 답을 찾으라는 어떤 표시로 생각하고 있는 듯했다. 이와 같은 생각은 계산기를 사용할 때도 마찬가지였는데 설문 3의 반응을 분석해 보니 계산하려고, 계산을 멋있게 하려고, 답이 나오라고, 답을 알아보려고, 그것을 눌러야 답이 나오기 때문, 2와 5를 더하게 하기 위해서, 그걸 누르지 않으면 계산이 안돼서, 답이 맞는지 확인하려고 와 같은 유형이 주를 이루었다. 계산기에서 계산기가 실제로 행하는 것을 그대로 옮겨 써보면 $2 + 5 = 7 \times 5 = 35$ 와 같이 된다. 계산기는 등호기호(=)를 단지 “연산을 실행하라”는 것으로 인식하기 때문이다. 따라서 어린이들에게 이와 같은 오 개념을 가지지 않도록 하고 등호기호(=)에 대한 올바른 개념을 인식 시켜주기 위해서는 $7 = 2 + 5$ 와 $2 + 5 = 3 + 4$ 와 같은 다른 유형의 수식도 보고, 쓰는 경험이 필요하다. 하나의 수를 다른 여러 가지 표현으로 나타낼 수도 있다는 개념을 강화시키기 위해 다음과 같은 유형의 문제가 많은 도움을 줄 수 있을 것으로 생각된다.

둘레가 28인 여러 가지 모양의 직사각형을 생각해보자. 어린이들은 둘레는 28로 똑같지만 이와 같은 직사각형들의 면적은 제각기 다르다는 사실을 주목할 수 있다. 이와 같은 사고의 중요한 핵심은 등호를 사용하여 28을 여러 가지 서로 다른 문장으로 쓸 수 있다는 것일 것이다. 이를테면, $28 = 4 + 10 + 4 + 10$, $28 = 7 \times 4 = 7 + 7 + 7 + 7 = 14 + 14$, $28 = 5 + 9 + 5 + 9$, $28 = 6 + 8 + 6 + 8$ 등이다. 이러한 관계 뒤에 숨어있는 이유를 알려면 상당히 대수적인 수의 성질에 관한 어떤 개념이 요구되어 진다고 볼 수 있다. 둘레가 일정하게 고정되어 있다는 것이 어린이들에게 등호를 이해하는데 도움을 줄 수 있을 것이다.

(2) 짝수와 홀수의 의미

수를 짝수와 홀수로 나눈 것은 Pythagoras(B.C 582 ? ~ 498 ?)로 알려지고 있다. 그 이전 이집트의 수학 책 린드 파피루스에서도 볼 수 있다. 한편 Platon(B.C 400)은 짝수를 두 개의 같은 정수의 합으로 분할할 수 있는 수라고 했으며 Euclid 原論에서 홀수는 짝수와 1만큼 차이가 있으며 두 동일한 정수의 합으로 나타낼 수 없는 수라고 묘사함으로써 이와 같은 견해는 오늘날에도 그대로 적용될 수가 있다. 다만 현재 초등학교에서 도입되고 있는 짝수와 홀수는 정수의 범위가 아닌 자연수의 범위에 한정시켜 생각한다는데 그 차이가 있을 뿐이다. 그러나 짝수와 홀수에 대한 본질적인 개념은 대수적인 관점에서 정수론의 나눗셈 정리(Division Algorithm)에서 그 본질적인 개념을 파악할 수 있는데 그 내용은 다음과 같다.

$a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ 일 때, $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ 인 $q, r \in \mathbb{Z}$ 이 유일하게 존재한다는 것이다(단, \mathbb{Z} 는 정수 전체의 집합이다).

위의 정리에 의하면 임의의 정수는 반드시 $2q$ 혹은 $2q + 1$ 의 형태로 표현됨을 알 수 있다. 따라서 $2q$ 형태의 정수가 짝수이며 $2q + 1$ 형태의 정수가 홀수인 것이다. 그러나 초등 수학에 있어서는 짝수와 홀수를 생각하는 수의 범위를 자연수의 범위에서만 생각하고 있다는데 그 차이점이 있으며 그 지도 소재로는 정사각형의 타일을 가지고 지도 할 수 있는데 타일을 직사형안에 들씩 짝지어서 채울 때 빈자리가 없이 배열된다면 타일의 수는 짝수 그렇지 않으면 홀수로 지도 될 수 있다. 다만 이와 같은 소재로 지도 시에 아이들로 하여금 홀수와 짝수의 목록을 작성해 보게 하여

- ① 한 수씩 건너서 짝수가 된다.
- ② 짝수의 끝자리는 0, 2, 4, 6, 혹은 8 의 패턴
- ③ (홀수) + (짝수) = (홀수)
- ④ 홀수를 짝수 개만큼 더하면 짝수가 된다

와 같은 패턴을 어린이들 스스로 찾을 수 있도록 해야 한다. 수년전의 6차 교육과정 연수 때의 일이다. 강의를 막 끝내고 강의실을 나서려는 순간 어느 한 교사가 질의를 하였다. 우리가 사용하고 있는 숫자 0은 짝수인가 홀수인가에 관한 질문이었다. 사실상 대수적인 측면에서 위에서 언급한 정수론의 나눗셈 정리에서 그 해답이 명확한 셈이 된다.

(3) 특성과 규약

학생들은 연산을 공부하고 계산하는 것을 학습하면서, 수 체계 내에 본래부터 있던 특성과 상징적인 언어의 측면에서 사회적으로 합의된 규약에 직면하게 된다. 수에 관한 특성을 탐구하는 것은 계산에서 일반화를 하는데 있어서 중요한 경험을 제공해 줄 수가 있다. 이를테면, 미국 Iowa에 있는 초등학교 3학년인 Katie Morrison 이라는 아동은 곱셈구구(9단)를 함에 있어서 다음과 같은 수의 특성을 발견했다(Teaching Children Math, Vol 5, No 2, 1998).

9×7 을 함에 있어서 9×7 의 십의 자리에 오는 숫자는 언제나 $9 + 7$ 의 일의 자리에 오는 숫자와 일치한다는 사실을 발견했다는 것이다. 즉,

$$9 \times 1 = 0 _ ; 9 + 1 = 1 0$$

$$9 \times 2 = 1 _ ; 9 + 2 = 1 1$$

...

$$9 \times 8 = 7 _ ; 9 + 8 = 1 7$$

이와 같은 발견은 비록 이 어린이가 대수를 공부하지는 않았지만 이와 같은 방법을 가능하게 했던 추리력 그 자체는 대수적이라 할 수 있다.

또한 어린이들은 두 수를 더하거나 곱할 때 왜 순서가 그다지 중요하지 않은가 하는 것을 발견하고 이해할 수 있는데 이를테면, 5개 짜리 4묶음이 어떻게 4개 짜리 다섯 묶음으로 변형될 수 있는가를 실제로 보여 주고 아울러 그와 같은 두 가지 표현이 똑같은 수를 나타내는 단순히 서로 다른 방법이라는 것을 말함으로써 $4 \times 5 = 5 \times 4$ 와 같다는 것을 입증할 수 있다.

그런데 저학년의 어린이들은 이와 같은 성질이 뺄셈과 나눗셈에서도 그대로 성립할 것이라는 오개념을 갖기 쉬운데 이를테면, $4 - 6$ 을 “ $6 - 4$ ”로 읽거나 혹은 $4 - 6$ 을 “4 빼기 6”이라고 정확히 읽고는 답은 2라고 말하는 경우가 종종 있다. 실제 수학 수업에서 이러한 상징적 표현이 처음 소개되었을 때 “두 수의 순서가 바뀌었을 때 답에 어떤 변화를 주나요?”와 같은 의문을 어린이들이 가지지 않으면 교사가 어린이들의 탐구심을 불러일으키기 위해 이와 같은 질문을 제기할 필요가 있다. 이를테면, 어린이들이 $6 - 4$ 와 $4 - 6$ 에 대한 이야기 문제를 만들어 보게 하여 이와 같은 두 가지 표현이 같은지 그렇지 않은지를 생각해 보게 할 수 있다. $4 - 6$ 이나 $3 \div 9$ 와 같은 표현을 저학년이라고 해서 “계산할 수 없다”라고 말하는 것은 잘못이다. 왜냐하면 어린이들은 음의 정수나 분수에 관해서 배우지는 않았지만 계산기에서 0에 미치지 못하는 수가 나타나는 경우나 실생활에서 세 개의 피자를 아홉 사람이 나누어 먹는 상황을 얼마든지 볼 수 있기 때문이다. 따라서 교사들은 어린이들에게 “언제나 더 큰 수에서 더 작은 수를 뺄 수 있다”거나 “더 큰 수를 더 작은 수로만 나눌 수 있다”고 말하지 않도록 유의해야 한다.

한편으로 다음과 같은 문제를 생각해 보자. $9 - 6 - 3$ 과 $4 + 2 \times 5$ 에서 학생들은 연산이 실행되어 지는 순서에 따라서 서로 상이한 답을 얻을 수 있다는 것을 발견할 수가 있다. 이와 같은 문제에 부딪혔을 때 학생들은 수학을 사용하는 많은 다른 사람들이 인정하고 사용하는 어떤 규칙 즉 소위 말하는 규약을 학습할 필요가 있는 것이다. 괄호와 연산의 순서에 대한 규약들이 있어야 만이 다른 사람들과 의사소통이 가능하게 된다.

(4) 사칙 연산 사이의 관계

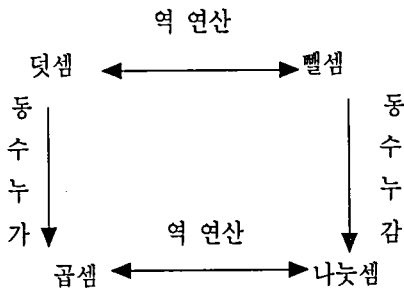
잘 알려진 바와 같이 대수적인 관점에서의 또 하나의 중요한 개념은 덧셈과 뺄셈 그리고 곱셈과 나눗셈 사이의 관계이다. 7차 초등수학교과서 1-가(p.70) 활동 1. 축구공 그림 2개와 배구공 그림 3

개를 놓아 보시오. 공은 모두 몇 개인지 덧셈 식으로 알아보시오. $2 + 3 = 5$

추구공을 나타내는 뺄셈식을 써 보시오. $5 - 3 = 2$ 이들 두 문장에서 3을 빼는 것은 3을 더해준 결과를 원래대로 되돌려 준다는 의미로 생각할 수 있으며 그 역도 마찬가지다. 따라서 덧셈과 뺄셈은 역연산 관계임을 알 수 있다.

똑 같은 관계가 곱셈과 나눗셈에서도 성립하는데 4×5 는 같은 수 4를 다섯 번 더해준다는 의미이며(同數累加) $20 \div 5$ 는 20에는 5가 몇 번 포함되어 있는가(同數累減)를 찾는 것과 같다. 따라서 5로 나눈다는 것은 5를 곱했던 것을 원래대로 되돌리는 것과 마찬가지다. 따라서 곱셈과 나눗셈도 역시 역연산 관계임을 알 수 있다. 여기서 한가지 유의할 점은 곱셈과 나눗셈을 꼭 동수누가 나 혹은 동수누감으로만 생각하면 상급학년에서의 대수를 학습하는데 있어서 약간의 장애가 될 수 있다. 이를테면, 4×5 는 $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ 로 생각할 수 있지만 $4 \times n$ 은 4를 몇 번 더해야 하는가에 관한 언급이 불분명하여 이해되지 않을 수도 있으므로 곱셈과 나눗셈은 그 나름대로의 어떤 연산으로 이해할 필요가 있을 것이다. 그리하여 어린이들에게 단순히 세어보기, 더하기, 빼기와 같은 일상적인 방법을 사용하는 문제보다는 보다 발전적인 상황을 제시해 줌으로서 상급학년에 배우게 될 대수의 개념에 필요한 곱셈과 나눗셈의 개념에 친숙해질 필요가 있다고 생각되어진다.

대수적인 관점에서 볼 때 이와 같은 연산 사이의 관계를 이해하고 있으면 계산을 하는데 있어서 훨씬 더 융통성이 있을 뿐만 아니라 어린이들이 이와 관련된 식이나 등식을 조작하고 해결하게 하는 밑거름이 될 수 있을 것이다. 이를테면, $2 + 3 = 5$ 와 $2 = 5 - 3$ 이 동치라는 사실을 알고 있다면 $\square + 3 = 5$ 어떻게 해서 $\square = 5 - 3$ 으로 바뀔 수 있는가를 이해하는데 도움이 될 것이다. 지금까지 언급한 사칙 연산 사이의 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



<그림 3> 사칙 연산 사이의 관계

(5) 변수

變數(variable)는 vari(변화)와 able(할 수 있다)의 合成語로서 “변할 수 있다”는 의미를 가지고 있다. “변할 수 있다”는 말은 “바꾸어 넣을 수 있다”는 말인데, 어떤 것이든 아무 것이나 바꾸어 넣

을 수 있다는 말은 아니고 “우선 집합이 있고, 그 집합의 각 원소를 대입할 수 있는 자리”가 변수라 볼 수 있다. 초등학교 저학년에서 아이들이 모르는 가수(加數)를 찾고자 할 때, 이를테면 $6 + \square = 9$ 와 같은 경우 \square 에 들어갈 적절한 수를 찾는 것, 또는 임의 수에다 0을 곱해도 그 결과는 0이다 와 같이 수에 관한 성질을 말로 표현할 때, 혹은 바퀴의 수는 자동차 수의 4배이다 와 같이 수의 패턴을 일반화 할 때, 또한 6차 초등학교 6학년 교과서의 정비례는 사실상 일차함수(이를테면, $3 \times \square + 2$)의 특별한 경우로 볼 수 있는데 이와 같은 함수적인 표현 등이 사실상 변수의 개념으로 볼 수 있다.

III. 결론

지금까지 미국수학 교사협회(NCTM)에서 발행된 학교수학을 위한 원리와 기준의 내용 중 수와 연산 영역을 중심으로 우리의 7차 교육과정과 관련지어 학생들이 알아야 할 것과 할 수 있어야만 하는 것이 무엇인지를 대체적으로 학년을 초월하여 전체적인 관점에서 소개하였으며 아울러 대수적인 관점에서 우리가 간과하기 쉬운(특히 교사의 측면에서) 몇 가지 유의점들을 살펴보았다. 여기서 언급한 NCTM의 기준들도 미국을 대표하는 교육과정이 아니라 각 주(states)나 지역 학구(local school districts)에서 나름대로의 수학교육 과정을 구체화하기 위해 사용될 수 있는 수학의 교수, 학습, 그리고 나아가 평가에 대한 하나의 틀을 제공하는 것이라 볼 수 있다. 결과적으로 이러한 기준들이 지향하는 수학수업은 학생들이 수학을 행하게 하고, 서로서로 상호 작용하게 하고, 교과서와 함께 다른 자료들을 사용하게 할뿐만 아니라 수학을 실생활 문제에 적용하고 복잡한 문제를 해결하기 위한 전략을 개발하는 것 등으로 요약해 볼 수 있다.

교사의 역할 측면에서는 문제를 제기하고, 학생들이 사고를 형성하도록 질문을 하고, 서로 상이한 해결방법을 탐구하도록 격려해준다. 또한 학생들이 적절할 때 사용할 수 있도록 다양한 수학적인 아울러 공학적인 도구(계산기, 컴퓨터, 그리고 조작도구)를 갖추어야 하며 어린이들의 사고와 이러한 도구들이 어린이들의 활동 속에 어떻게 반영되는가를 알아보기 위해 수업 중 어린이들 사이를 궤간 순시할 수도 있다. 아울러 수학내의 다른 아이디어 및 원리들과 연결을 하도록 학생들을 격려해야하며 학습되어진 수학을 요약해주고 수학에 대한 학생들의 이해를 명확히 할 필요가 있다고 여겨진다. 더불어 교사 자신이 단순히 교과서에 제시되어 있는 것을 그대로 가르치기보다는 그 속에 내포되어 있는 의미(이를테면 연산, 등호기호, 변수, 짝수와 홀 수 등)를 분명히 알고서 어린이들을 지도하여야 할 것이다.

또한 상급학년에서의 대수를 학습하기 위해서는 단순히 교과서에 제시되어 있는 산술적인 계산이나 기본적인 기능 이상의 수에 관한 지식이 요구되어질 뿐만 아니라 수와 이러한 수들을 결합시켜주는 연산에 대한 일반적인 성질들이 반드시 이해되어야만 할 것으로 생각된다.

전반적으로 보면 기준들이나 우리의 7차 교육과정 모두 수와 연산 영역에서 대체적으로 수 감각

을 포함한 어림 등을 상당히 강조하고 있다고 볼 수 있으며 7차 교육과정에서는 특히 학습지도상의 유의점으로 **실생활의 예, 생활 속의 구체적 상황, 생활과 관련된 문제들을 통하여 이해하여야 함**을 강조하고 있다. 따라서 수학학습은 언제나 교실에서만 일어난다는 고정관념에서 탈피해야하며 또한 거기에서 끝나는 것도 아니며 우리 생활 도처에서 일어날 수 있다 하겠다.

우리 나라는 현재 7차 교육과정에 의한 새로운 교과서로 단계적으로 대체되고 있는 중이며 과거 어느 때보다도 특히 수학 교과서는 혁신적인 변화를 가져온 것이 사실이다. 구성 면에서 활동중심, 실 생활중심으로의 전환이 특히 주목할 만하다. 그러나 아무리 훌륭한 교과서라 할 지라도 그것을 이끌어 가는 주체는 결국 교사이므로 주어진 교육과정의 틀에 얽매이기보다는 자신이 처한 환경에 걸 맞는 만들어 가는 교육과정 혹은 재구성해서 가르치는 교육과정 쪽으로의 방향전환이 요구되어진다고 본다.

지금까지 소개한 수와 연산영역도 그 예외일 수는 없으며 초등학교에 입학하자마자 제일 먼저 접하는 영역이기도 하다. 여기에서 소개한 요목 들도 어디까지나 하나의 참고자료이며 우리의 상황과 현실에 맞도록 재구성 해보는 교사의 부단한 노력이 절실히 요구되어진다고 본다.

참 고 문 헌

- 김은경 (1999). 수와 연산 영역의 학습 지도의 실제, 제 23회 초등수학과 교육 세미나, 한국초등수학교육연구회.
- 교육부 (2000). 수학 2-가 교과서, (주) 대한 교과서 주식회사.
- 박성택 · 신택균 · 양인환 · 손용규 · 이정재 (1994). 수학교육, 서울: 동명사.
- 강시중 (1981). 수학교육론, 교육출판사.
- NCTM (1998). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft*
- NCTM (1999). *Teaching Children Mathematics*, 6(2)
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*

<부록>

실 문 지

대구 초등학교 학년 반 성명

여러분 안녕하세요. 아래의 물음은 누가 공부를 잘 하는가를 알아보는 것이 아니라 여러분이 평소에 가지고 있는 생각을 알아보기 위한 것입니다. 자신의 생각을 솔직하게 나타내 주면 고맙겠어요.

1. 여러분이 1학년에서 배운 다음과 같은 문장을 생각해 봅시다.
비둘기가 2마리 있습니다. 5마리가 더 날아왔습니다. 모두 몇 마리인지 알아보시오. 이것을 식으로 나타내면 $2 + 5 = 7$ 이 됨을 배웠습니다. 여기서 $=$ 는 무엇을 나타낸다고 생각합니까? ()

- ① 단순한 기호이다 ② 왼쪽 2 와 5를 더하라(계산하라)는 기호이다
- ③ 비둘기가 날아옴을 나타낸다 ④ $2 + 5$ 와 7이 같음을 나타낸다

2. 위의 1번의 문제를
$$\begin{array}{r} 2 \\ + 5 \\ \hline 7 \end{array}$$

와 같이 나타냈을 때 밑줄은 무엇을 나타낸다고 생각합니까? ()

- ① 단순한 기호이다 ② 위에 있는 2 와 아래에 있는 5를 더하라(계산하라)는 기호이다
- ③ 비둘기가 날아옴을 나타낸다 ④ $2 + 5$ 와 7이 같음을 나타낸다

3. 만약에 여러분이 계산기에서 $2 + 5$ 를 계산하기 위해 2 를 누르고 그 다음 + 기호를 누르고 5를 누른 다음 = 을 쳤을 때 = 는 무엇을 나타낸다고 생각합니까? 자신의 의견을 간단히 적어보세요.