韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 11집, 2001. 1. 47-69.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 11, Jan. 2001. 47-69.

교수학적 상황론에 입각한 효과적인 극한지도

고 상 숙 (단국대학교)
양 필 숙 (단국대학교 대학원)

본 논문은 고등학교 교육과정상에서 학습자들이 오류를 범하기 쉽고, 어려워 하는 극한에 대해 보다 효과적인 지도방법을 제시한다. 현실적으로 교수활동은 교실이라는 공간에서 일정한 수업시간동안에 교사와 학습자와의 관계속에서 이루어진다. 그 속에서 학습자들은 주변의 세계를 관찰함으로써, 혹은 추측과 반박을 통해 시행착오적으로 사고함으로써 혹은 모순, 어려움, 불균형을 일으키는 주위환경에 동화·조절을 함으로써 자신을 적응시켜 가면서 학습하게 된다. 따라서 교수학적 의도가 미비한 환경은 학습자에게 획득하기를 기대하는 학습을 할 수 없게 한다. Brousseas의 교수학적 상황론에 근거하여 교육의 현장인 교실에서의 교사와 학생간의 상호작용에 따른 교수-학습의 중요성에 초점을 둔 본 논문은 Freudenthal의 역사발생적 원리에 의한 극한의 정의와 학습자의 오류수정을 위한 교수학습 전략으로 Lakatos의 발견술을 제안하였다. 또한 극한 개념에 대해 실생활에서 학습자에게 쉽게 동화·조절이 일어날 수 있는 학습 방법을 제안하였다.

I. 서 론

시간은 흐르고, 필연적으로 시대도 변한다. 우리는 요즘 아이들이 많이 변했다 고한다. 그렇다면 교실, 교사, 학부모님은 지금 현재 어떤 모습인가? 만약 변하지 않았다면 이것은 교수학적으로 너무나 아이러니한 일이 아닌가? 교수-학습의 대상인 학습자가 변했다는 것을 인식한 우리 내 기성세대가 계속해서 과거의 교실과 교수-학습방법으로 학습자를 잡아두려 한다면 당연히 거리감 아니 괴리감이 생길 수밖에 없다. 교수활동의 주인공인 교사와 학습자의 괴리감은 학습의 장인 교실을 무너뜨릴 수밖에 없는 것이다.

전통적인 수학교육은 이론 정립에 중점을 두었으므로 교수학적 의도가 미비하였다. 관련지식을 이용하여 알고리즘의 논리적 유도와 해설 및 예시에 역점을 두고 그것을 학습자들에게 적용하였다. 이것은 교수학적 의도가 미비한 것이였고, 따라서 극단적인 교수현상으로 수학적 개념에 대한 진정한 이해보다는 방법적 형식이나 알고리즘에 중점을 둔 형식적 고착현상[1]을 일으켰다. 이는 우리나라의 입시위주의 교육에서 발생하기 쉬운 당연한 결과일 것이다. 시험준비를 효과적으로 시키기 위해 짧은 시간에 많은 지식을 전달하려는 교사의 의무감은 탈개인화·탈문맥화된 형식적인 지식을 체계적

1) 지식의 전달에서 개인화와 문맥화의 중요성을 과소평가 하여 논리적, 형식적으로 표현된 수학적지식이 곧 바로 제시되는 것

으로 해설하게 하며 이를 반복적으로 연습하게 하였고, 학습자로 하여금 배운 지식을 피상적으로 수용하게 함으로써 의미 있게 이해하고 적용하지 못하게 하며, 새로운 지식을 스스로 개발하지 못하게 하는 치명적인 결함을 갖게 되었다(우정호, 2000). 특히, 함수 개념과 더불어 현대 수학을 대표하는 핵심 개념의 하나인 극한 개념[2]은 이러한 전통적인 교수-학습 방법에 의해서 학습자들에게 진정한 수학적 가치와 매력를 느끼게 하지 못하고, 많은 공식과 알고리즘을 외워야 하는 고통을 수반하는 대상이 되어 왔다.

이에 정책적으로 시대적 상황과 요구에 부흥하는 제 7차 교육과정이 시행단계에 있다. 제 7차 수학과교육과정의 기본방향은 학습자 중심의 단계형 수준별 교육과정으로써 '수학적 힘[3]의 신장'을 목표로 한다. 이는 문제해결력 신장에 중점을 두었던 6차 교육과정과 비교해 볼 때 인지적 영역 뿐만 아니라, 정의적 영역의 교수학적 가치도 비중있게 다루고자 한 의도로써 학습자의 수학적 성향의 신장을 위한 방안을 제시하고 있다. 그러나 현재는 새로운 정책이 현실과 조화를 이루기 위한 과도기적 단계이다. 따라서 포괄적인 교수목적에 합당한 교수학적 모델·교재·교구의 제안 및 개발로써 보다 합리적이고 주체적으로 현실에 적응할 수 있는 우리가 될 수 있을 것이라 확신한다.

이에 본 연구는 고등학교과정에서 다루고 있는 극한의 개념 지도을 위한 교수학적 모델을 제시한다. 극한을 지도할 때 학습자들이 많은 오류를 범하는 이유는 교수학습 상황이 극한의 정의을 올바르게 이해한 후 적용하는 것보다는 극한을 도구로한 다양하고 많은 수학적 문제풀이에 초점이 맞추어져 있기 때문이다. 따라서 학습자들은 결과적 지식체계로서 극한의 정의와 보다 쉬운 알고리즘을 요구하고, 알고리즘을 이용한 극한 계산문제의 해결을 훈련하는데 익숙해져 있다. 수학교육의 지향점이 수학적인 사고의 형성을 목적으로 한다면, 학교 수학은 당연히 발생과정에 있는 '수학하는 경험'을 갖게 해야 할 것이다. 수학자들조차도 무오류적으로 그리고 연역적으로 수학의 개념과 정리를 발견한 것이 아닌 데도 미성숙한 학생들에게[4] 연역적인 수학이론 체제를 따라 사고하도록 요구하는 것은 교수학적으로 바람직하지 못한 일이다. 수학자들이 수학을 발견했던 과정을 정직하게 재현해 보는 것이야말로 학습자에게 수학의 의미와 가치를 인식시켜 주는 효과적인 방법이 되리라 생각한

---

2) 극한개념은 무한 개념을 분석할 수 있는 기회를 제공해 주며, 무한 개념을 기초로 하는 다른 많은 개념을 이해하는 데에 토대가 되어 준다. 또한 극한 개념은 인류가 이룩한 위대한 지적 성취의 하나이며 수학의 유용성을 보여주는 미적분학의 기초가 되는 개념으로, 미적분 개념의 이해는 극한개념의 이해에서 시작된다고 말할 수 있다. (우정호·박선화 1998)

3) 비정형적인 문제를 풀기 위해 다양한 수학적 방법을 효과적으로 사용할 줄 알고, 탐구하고, 추측하고, 논리적으로 추론할 줄 아는 능력을 의미한다.

4) Piaget에 인지발달영역중 형식적 조작기에 해당하는 시기. 연역적 사고 즉, 하나의 문제에 직면했을 때 모든 가능한 해결책을 논리적으로 궁리해 봄으로써 결국 문제 해결에 이르게 되는 사고와 사물의 인과관계 터득과 가설적 사고가 발달한다. 심리학적으도 불안정한 상태로 Erikson의 사회심리발달영역에서 자아정체감대 자아혼돈감에 갈등하는 소위 심리적 이유기이다. 따라서 여러 가지 방향에서 궁리해볼 수 있는 발견술과 다양한 경험과 상호존중의 태도 형성을 통해 올바른 정체감의 형성에 교수학적 초점을 맞추어 우리의 학습자가 의식 있고 건전한 민주시민으로써 책임 있는 행동을 할 수 있도록 수학교사로서의 책임 있는 수학교수학적 접근이 있어야 한다.

다. 그런 입장에서 Brousseau(1997)의 교수학습 상황론에 입각한 Freudenthal의 역사발생적 원리에 의한 극한의 정의와 학습자의 오류수정을 위한 교수학습 전략으로 Lakatos의 발견술을 제안하고, 학습자에게 극한의 정의에 대한 보다 쉬운 동화·조절을 위한 실생활에서의 극한의 접근 방법을 제안한다.

Ⅱ. 이론적 배경

복잡한 상황에서 행위를 지시해 주거나 자신의 노력과 타인의 노력을 결합시키는 데는 좋은 이론보다 더 위력있는 것은 없다. 이론은 상식보다 더 추상적이고 더 일반적인 정신모델이다. 이것은 눈으로 볼 수 있는 것 이면에 있어, 볼 수 없는 원리를 이해하는 힘을 길러 준다(Skemp, 1996). 따라서 본 연구의 이론적 배경에 대해서 알아보자.

A. Brousseau의 교수학적 상황론

훌륭한 수학 학습 지도 상황은 학생들이 학교수학의 본질을 체득하면서 궁극적으로 자기학습이 가능한 단계에 이르게 할 수 있는 상황이다. 이 바람직한 수학 학습-지도 상황의 구성문제를 논의한 '수학 교수학적 상황론(Brousseau, 1997)' 은 프랑스의 수학교육학자인 Guy Brousseau가 1970년부터 1990년까지 20여 년에 걸쳐 연구한 이론으로 'Theory of Didactical Situations in Mathematics' 에 그 전모가 소개되어 있다.

Brousseau가 말하는 '수학 교수학적 상황' 이란 학습자가 어떤 수학적 지식을 학습하도록 하는 것을 목표로 하는 교사, 학습자, 환경 사이의 관계 상황이며, 교사가 교수학적 의도가 담긴 문제상황 속에서 학습자와 상호작용하는 상황이다. 그는 교수학적 상황을 문제해결에 지식을 암묵적으로 사용하는 '행동상황' , 지식을 의식하고 표현하는 '형식화 상황' , 형식적으로 표현된 지식의 타당성을 입증하는 '타당화 상황' 과 교사가 개입하여 학생들의 구성 결과를 공인하고 정리하여 이전 지식과 관련지워 주는 '제도화 상황' 으로 단계적으로 전개할 것을 제안한다. 이러한 전개과정에서는 특히 의사교환과 사회적 상호작용을 통한 지식의 구성이 강조된다. 이는 Skemp와 Byers·Herscovics가 제시한 도구적 이해수준, 직관적 이해수준, 관계적 이해수준, 형식적 이해수준과 대략적으로 비교될 수 있을 것이다.

따라서 수업을 하기 전에 교사는 자신의 교수학적 의도를 반영한 상황을 구성해야 할 것이다. 우선 수업내용에 대한 목표를 선정하고, 목표에 부합하는 교수학습 모델을 구체화하고, 수업내용과 일관된 평가를 해야 할 것이다. Brousseau(1997)는 교수의도란 측면에서 교수상황을 두 가지로 구분하여 설명하고 있는데, 그 하나는 교수학적 상황이고, 다른 하나는 비교수학적 상황이다. 먼저 교수학적 상황에서는 교사는 학생들에게 제시할 문제를 사려 깊게 선택하여 학생들에게 인지적 불균형을 야기시키고 기대했던 적응을 이끌어 내려고 시도한다. 그러한 문제는 점차 학생들 스스로 동기화되

어 행동하고 생각하고 발전시켜 가도록 선택되어야 한다. 교사는 학생들이 마치 자신의 것 인양 문제를 받아들이는 시점과 대답을 하는 시점 사이에 학생들이 구성하기를 바라는 지식이 끼어 들게 하거나 드러나게 암시하는 것을 삼가야 한다. 교사가 정보를 제공하고 발견술적인 질문을 하여 조심스럽게 도와주던 상황에서 학생 스스로 탐구하는 상황으로 이행해 가야 한다. 학생들은 그렇게 할 수 있을 뿐만 아니라, 그가 다른 교수 맥락에서 만나게 될 상황이나 어떤 교수의도도 없는 가운데에서도 자기 스스로 탐구하게 될 때 비로소 지식을 진정으로 획득하게 될 것이기 때문에 그렇게 해야 한다. 이를 위해 교수학적 의도가 감추어진 상황을 Brousseau는 의도적인 비교수학적 상황이라고 부른다. 비교수학적 상황은 교사의 중재 없이도 수학적 지식이 문제해결의 도구로 구성되고 기능 할 수 있는 상황이다. 여기서 학생들은 문제가 새로운 지식을 획득시키기 위한 목적으로 선택된 것이라는 사실을 알고, 그 지식이 상황의 내적인 논리에 의해서 전체적으로 정당화되며, 그것을 구성해 낼 수 있다는 것을 느껴야 한다. 학습의 최종 목적은 비교수학적 상황에로의 이행과 적응이다. 의도적인 비교수학적 상황은 교수학적 상황의 일부분이며 동시에 가장 핵심적인 것이라고 할 수 있다(우정호. 2000).

B. Freudenthal의 역사발생적 원리

Freudenthal의 수학관에 따르면, 수학적 사고활동의 본질은 수학화인바, 수학 학습-지도는 기성 수학을 부과하는 것이어서는 안되며 인류의 수학의 학습과정인 수학의 발생과정, 수학화 과정을 학습자의 현재의 상황에서 재발명하도록 안내하는 재발명 과정이어야 한다. 수학의 학습지도는 수학의 발생과정을 고려하여 학습자의 상식에서 출발하는 것이 바람직하며, 상식적인 활동을 거쳐 수학을 재발명하도록 지도해야 한다는 것이다. 이러한 재발명 방법은 가르치고자 하는 내용에 대하여 역사 발생적인 수학화 과정의 분석을 통해 현상의 정리수단, 조직 수단으로서 그것이 어떻게 작용하며 어떤 중요성을 갖는지를 알아보고, 그러한 현상에 직면하게 하여 이를 재현하는 방법을 택하게 된다. 따라서 수학자 개인의 발명과정의 재현형식을 취하게 되거나, 수학사 곧 인류의 대역적인 학습과정을 단축된 형태로 반복하게 함으로써 수학적 사고경험을 시키려는 역사발생적 방법이 된다. Freudenthal은 수학의 역사적 발생과정은 수학화 과정의 패러다임이지만 이를 학습자의 현재의 정신구조에 연결시켜 수정해야 한다고 다음과 같이 말한다.

"어린 학습자는 인류의 학습과정을, 수정된 방식으로지만, 재현한다. 그는 역사가 실재로 일어난 대로가 아니라, 과거의 사람들이 오늘날 우리가 알고 있는 것과 같은 것을 알았다면 일어났을 것과 같이 역사을 반복한다. 어린 학습자가 재현하는 것은 역사적 학습과정의 수정되고 개선된 판이다.(Freudenthal, 1983)." 어떤 내용을 역사-발생적으로 지도한다는 것은 훌륭한 교사의 지도 아래에 수학이 어떻게 발생되었는가를 역사에서 미루어 찾고, 그러한 방법에 따라서 지도하고자 하는 것이다. 발명가의 발자국을 따라가는 것이 아니라, 실제의 발명과정보다 개선되고 잘 인도된 과정을 따라

재발명해야 한다는 것이다(우정호, 2000).

C. Lakatos의 발견술

Platon철학과 Euclid원론, 형식주의·논리주의와 '새 수학' 및 그에 대한 직관주의자의 반격, 조작적 구성주의와 활동주의 수학교육 등이 보여주듯이, 수학에 대한 철학적 입장은 수학교육 활동에 깊은 영향을 미친다. 전통적인 수학교육은 수학을 완성된 산물인 형식적인 체계로 보고 이를 가르치고 습득하도록 하였다. 즉, 기성 수학의 논리적인 표현, 공리 연역적인 특성과 증명에 교육의 초점이 모아졌으며, 수학적인 탐구과정이나 수학이 형성되어 가는 역동적인 과정을 거의 고려해 오지 않았다. 그러나 1980년 이후 수학교육에서는 수학적 사고 교육, 문제해결 지도를 강조하는 시대적 사조에 따라 Popper의 비판적 오류주의와 Polya의 수학적 발견술에 대한 교육적 연구의 영향을 받은 Lakatos의 수리철학이 등장하였다(우정호, 2000). Lakatos(1967)는 수학의 역사는 철학의 인도을 받지 않아 맹목적이 되었으며, 반면에 수리철학은 수학사에서 가장 흥미를 자아내는 현상에 등을 돌림으로써 공허하게 되었다. Lakatos(1967)"라고 하며 수학의 역사발생적 인식론을 전개였다. Lakatos는 Popper의 비판적 오류주의에 입각하여 "가장 풍부한 수학이론은 과학이론처럼 준경험적"이라고 주장한다. 이러한 주장에 따르면, 수학에서 절대적 진은 없으며 모든 수학적 지식은 추측에 불과하다. 추측은 주로 시행착오에서 비롯되며, 추측과 반박을 통해 수학적 추측이 개선되어 나가면서 수학이 발전해 나간다는 것이다. 그리하여 Lakatos는 수학에서 발견의 맥락과 정당화의 맥락을 통합한 '수학적 발견의 논리' 를 제시하고 있다. Lakatos의 이러한 수학관은 수학은 불변이 아니라 인간의 필요성에 의해 만들어지고 개선되는 것이라는 점을 강조하며, 따라서 그의 수학관에 입각할 때 수학을 만들고 개선하는, 즉 수학을 하는 경험을 중시하게 된다. Lakatos가 제시하고 있는 증명과 반박의 방법에 의한 수학적 발견, 곧 비형식적인 수학이론의 성장에 관한 패턴, 수학의 탐구양식은 다음과 같은 단계로 정리될 수 있다. 즉 제기된 문제를 시행착오에 의해서 잠정적으로 해결하는 과정에서 소박한 추측을 얻거나 연역적 과정을 통해서 추측을 얻은 단계, 연역전 추측에서는 증명이 추측의 제기에 포함된다. 추측을 부분추측 곧 보조정리로 분해하여 그 비판 가능성을 높이는 사고실험인 증명 단계, 전면적인 반례의 출현으로 증명이 재검토되고 전면적인 반례가 국소적인 반례가 되는 보조정리가 발견되어 추측의 조건으로 합체되어 추측이 정리로 개선되고 이론적 개념이 출현하는 단계, 나아가 보조정리가 기본원리 곧 공리로 되면서 풍부한 연구 프로그램을 얻게 되는 단계를 거친다. 이러한 방법은 학습자에게 능동적으로 사고과정의 질을 평가하고 오류를 수정해 가는 능력과 태도를 개발해 주어, 발견과 개선의 즐거움과 필요한 능력을 개발하려는 학생들의 욕구를 유발시킬수 있다(우정호 2000).

Ⅲ. 연구결과

현실적으로 교수활동은 교실이라는 공간에서 일정한 수업시간 동안에 교사와 학습자와의 관계속에서 이루어진다. 그 속에서 학습자들은 주변의 세계를 관찰함으로써, 혹은 추측과 반박을 통해 시행착오적으로 사고함으로써 혹은 모순, 어려움, 불균형을 일으키는 주위환경에 동화·조절을 함으로써 자신을 적응시켜 가면서 학습하게 된다. 따라서 교수학적 의도가 미비한 환경은 학생들에게 획득하기를 기대하는 많은 학습을 할 수 없게 한다. 연구자는 극한 정의의 지도목표를 Brousseau의 제도상황속에서의 형식적 이해에 두고있으며, 그에 대한 역사발생적 교수모델을 구체화하기 위한 '역사속의 수학'[5]이라는 교재을 통해서 학습과정속에서 학습자의 인식의 변화를 평가의 대상으로 할 것이다.

우선, 과거 교육과정을 분석하고, 역사발생적 원리에 입각한 극한 개념을 위한 수업의 모델을 제시하고, 학습자가 극한에 관한 문제를 풀 때 발생하는 오류를 예방하기 위한 방안과 실 생활에서 극한의 수학적인 접근 방법을 살펴보기로 한다.

A. 교육과정 분석

극한개념이 명시적으로 언급되는 것은 고등학교 단계에서이지만, 학생들은 이미 중학교 단계에서부터 관련된 개념을 학습한다. 예를 들어, 중학교에서 배운 순환소수, 무리수 개념들은 필연적으로 극한의 의미를 내포하고 있어 중학교과정에서 학습자가 이해하기는 매우 어렵고 오히려 수학에 대하여 깊이 생각하고 탐구하는 학생에게는 깊은 개념에 대한 설명을 하지 않은체 단순한 대수식만으로 설명하는 경우는 혼란을 야기시키고 그로 인하여 수학에 대한 지적 갈등을 갖게 만들수도 있다. 그러므로 중학교 과정에서는 분수를 순환소수로 나타내는 것을 다루고 그 역과정인 순환소수를 분수로 나타내는 방법은 고등학교에서 무한급수와 연계하여 가르치거나 7차 교육과정중 고급반을 위한 심화학습으로 다루는 것이 바람직할 것이다. 다른 나라의 경우를 보더라도 미국의 교육과정에 대한 NCTM(1989)의 '학교수학의 교육과정과 평가규준' 에서는 고등학교 학생(Grade 9-12)들은 무한소수의 분석 속에서 자연스럽게 무한 수열과 무한 급수을 접해야 하고 예를 들어 무한등비 급수의 합의 공식을 개발한 후에 그것을 이용하여 $0.999\cdots=1$임을 증명해야 함을 강조하고 있다. 즉, $0.999\cdots=1$의 논의는 무한급수를 이용하는 것이 바람직하고 또한 그것이 무한 급수를 도입하는 좋은 동기를 부여한다고 사려한 것이다. 또한 하나의 중심 개념을 위하여 내용을 주의 깊게 전개하고 확장시키는 수업의 전형적인 형태를 갖고 있는 일본에서도 무한소수의 논의를 중학교 3학년 과정에서 탐구거리로 간단하게 다루고 있다(조한혁·최영기, 1999).

극한 개념을 고등학교때 학습하게 된 것은 금세기 초기 Perrt와 Klein등이 전개한 수학교육 개혁운동의 영향을 받아 응용성이 강하고 교육적 가치가 풍부한 기초 미적분법을 고등학교 수학에서 지도하게 됨에 따라 미적분법의 논리적 기초가 되는 극한 개념도 더불어 지도하게 되었기 때문이다(김

5) 보다 효과적인 수업을 위해 연구자가 고안한 학습자료

웅태 · 김연식, 1985).

우리나라에서는 1955년 공포된 제 1차 교육과정이 제정된 이래로 지금까지 고등학교 단계에서 극한 개념을 지도해 왔고, 현재는 대학 진학을 준비하는 인문계 고등학교 2학년 수학 I 에서 처음 명시적으로 지도하고 있다. 그러나 엄밀한 수준의 극한 개념은 매우 어렵기 때문에 고등학교에서는 비형식적인 극한 개념을 지도하도록 하고 엄밀한 수준의 극한 개념은 대학에 진학한 후에 배우도록 하고 있다. 즉, 고등학교 학생들은 비형식적이고 직관적인 극한 개념을 학습한 후, 그 위에서 극한값 계산 및 극한 개념의 응용인 무한급수의 합, 함수의 연속성, 미적분법의 주요 개념, 등을 학습하고 있다. 교육부에서 나온 고등학교 수학과 교육 과정 해설서에 대해서 살펴보자 6차 교육과정상의 지도의 의의 및 유의점이 다음과 같이 명시되어있다.

> 수열의 극한의 정의 $\varepsilon-\delta$식과 같은 엄밀한 방법이 있으나, 고등학교 학생들에게는 이해하기 어렵다. 따라서, 이 개념은 "한 없이 가까이 간다." 는 표현을 이용해서 직관적으로 다루고, 구체적인 예를 통해서 명확히 하도록한다. 즉, 구체적인 수열의 항의 변하는 모습을 그래프로 나타내 보임으로써 n을 크게 할 때, a_n이 어떻게 변하는가를 고찰하고, 이것을 근거로 하여 수열의 수렴, 발산의 뜻을 파악하게 한다. 또 구체적인 예에서 유추하는 형식으로 극한의 성질을 이해시키고, 이것을 근거로 하여 여러 가지 극한을 구하는 방법을 알아내게 한다.
> 기호 ∞를 수로 다루지 않도록 주의한다. 즉 n→∞이 n이 ∞에 접근함을 의미하는 것이 아니고, 큰 수 N을 주더라도 항상 n>N과 같이 되는 상태를 가리킴을 이해시켜야 한다.
> 특히, 무한등비수열의 수렴, 발산을 알아보고, 이 결과를 일반의 무한수열의 극한의 계산에 활용하는 것도 바람직하다.무한급수와 그 합의 정의를 정확하게 파악시키고, 그 수렴, 발산을 이해시킨다. 수열의 극한의 개념을 바탕으로 하여 함수의 극한의 개념을 이해시키고, 여러 가지 함수의 극한을 구하게 하며, 함수의 연속의 정의와 연속함수의 성질을 다루도록 한다. 함수의 극한과 연속함수의 성질은 미적분의 기호가 되는 중요한 개념임을 인식시키도록 한다(교육부, 1992).

위 내용에 대한 우리의 반응은 너무나 포괄적이고 추상적이다라는 것이다. 그러므로 교수-학습에 별반 도움이 되지 못할 것은 당연하다. 구체적이지 못한 진술로 교사에게는 더욱 교수학적 갈등에 빠져들게 할 위험성도 있다. 특히, 그 진술상에도 교수학적으로 잘못된 표현 예를 들면 학습의 주체자로 학습자의 자리를 인정한다면 적어도 학습자의 입장에서 '이해시킨다. 파악시킨다. 구하게 한다.'의 표현은 '파악할 수 있게 한다. 이해할 수 있게 한다'. 로 바꾸어 표기해야 한다. 교사는 학습의 안내자로 학습자에게 가능한 한 자연스럽고 쉽게 이해할 수 있도록 최선의 방안을 연구하도록 요구되어지는 것은 당연하기 때문이다.

또한 근거없는 내용이 실제로 수열의 극한의 $\varepsilon-\delta$식과 같은 엄밀한 방법을 적용해 보았는가? 일반적으로 엄밀한 $\varepsilon-\delta$식방법이 학습자에게 어려울 것이라는 것에는 어느 정도 동감하지만, 실제로 어느 정도 교수학적 의도와 계획으로 접근했을 때의 구체적인 학습 장애를 찾아내고 분석하는 과정을 거친 연구가 이루어졌다면 우리는 좀 더 효과적인 교수학적 방법에 대한 약간의 실마리라도 얻

어 낼 수 있었을 것이라 확신한다.

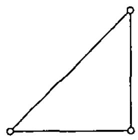
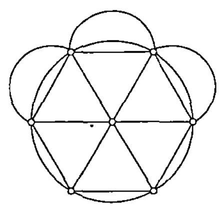
B. Freudenthal의 역사발생적 교수 모델

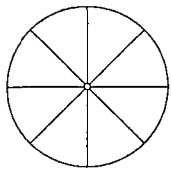
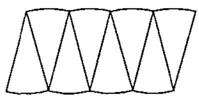
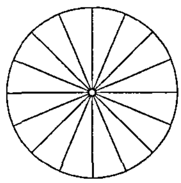
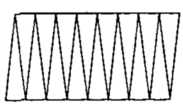
역사발생과정에 대한 특히 사회적 배경과 부합하는 수학의 발전을 고찰하는 것은 현실 세계에서 수학적 개념은 순수한 인간 정신의 창조물이며 다른 어떤 과목보다 추상성 · 논리성이 강한 인간의 적극적인 의지의 산물이라는 필연적인 과정을 학습자가 인식할 수 있게 함으로써, 학습자에게 보다 인간적인 수학에 친근감을 느낄 수 있게 할 것이다. 시대적 상황과 필요성, 수학자의 배경 및 학습과정을 고찰하는 것이 교수학적으로 우리가 의도하는 바를 보다 효과적으로 획득할 수 있는 방법이라 생각한다. 그러므로 역사발생적 차원의 학문적 지식을 가르칠 지식으로 변환하는 것, 즉 교수학적 의도에 의한 지식의 변형인 '교수학적 변환' 이 우리의 주된 관심사가 아닐수 없다. 또한 수학사에서 나타난 인식론적 장애를 분석하는 것은 학습자들이 부딪히는 장애를 찾아내어 그것을 극복하도록 도와줌으로써 수학 학습-지도를 개선할 수 있는 기초가 될 수 있을 것이다. 학습과정상에서 학습자에게 의미있는 내용을 '역사속의 수학' 이라는 자료로 지도하는 방안을 고안해 보았다.

첫째로 학습자료를 사용하기 전에 유의사항을 제시한다.

본 학습자료는 역사발생적 과정을 현재 학습자의 상황에서 인식할 수 있고 또, 그것을 평가하기 위한 자료로써 학습자의 선수학습과 후속학습의 매개로 교수학적 가치가 있으나, 학습자의 기존 인지구조 Piaget에 수학 인식론에 의하면 행동과 조작의 schemes이 무의식 속에 깊이 묻혀 있어 아주 당연한 것으로 여겨지는 것일수록 그것을 의식적으로 수학적 사고면에 반영하는데는 오랜 시간이 걸리므로, 선수학습이 새로운 학습 내용과 동화되기 위해서는 충분한 시간이 허용 되어야 한다. 따라서 교사와 학습자 혹은 학습자들간의 충분한 의사소통 상황으로 유도하고, 적절한 개입으로 학생들의 활동을 공인해 주어는 상황이 요구된다. 수학사적인 예로 Cantor가 일대일대응 조작을 바탕으로 집합론을 건설한 것을 행동과 조작으로부터의 반영적 추상화에 의한 수학 구성의 두드러진 예로 들고 있다. 즉, 일대일대응 조작은 구체적 조작단계에서 구성되는 기본적 조작이지만, 그 조작에 주목하여 수학적 의미를 부여함으로써 현대수학의 발달에 커다란 계기가 마련된 것은 19세기 말에 이르러서이다(우정호, 1998). 이는 극한 개념에서도 마찬가지이다. 교육과정상 변천에서도 언급했지만, 우리의 학습자들은 초등학교때부터 극한개념에 대한 학습을 하지만, 막상 고등학교에서 극한을 학습할때는 인식론적으로 많은 장애가 발생한다(한종희, 1997).

둘째는 단지 수학사를 학습자에게 제시하는 차원이 아니라, 본 자료를 완성해 가면서 학습자의 수학적 성향에 대해 알아볼 수 있으며 무엇보다 그러한 과정자체를 평가에까지 이어지게 할 수 있으므로, 교수학적으로 의미가 있다 하겠다. 이때, 후속학습에 대해서는 후속학습내용을 다룰 때 연계해서 다루도록 하는 방법으로 지도한다. 극한 지도는 미분과 적분의 단원과 연계성이 높으므로 후속학습의 수학사와 연계성을 교수학적으로 자연스럽게 이끌 수 있겠다.

(극한)의 역사속의 수학! 이름: 학년 반 번호				
시대	역사속의 수학	현재 ( )가 본 수학	상황 문제	조별 문제
고대	고대 그리스의 무한은 유한을 계속적으로 연장하는 과정으로서의 무한으로 즉 유한적 연장인 그리스의 기하는 도형의 합동과 닮음의 성질을 다루는 것으로 비례에 관한 이론은 길이나 넓이 혹은 시간 간격 등이 비로 표현될 수 있다는 가정에서 출발한다. 그런데 직각이등변삼각형의 빗변은 어떤 단위선분으로도 그 길이를 표현 할 수 없는 것이다. 이는 그리스 기하 체계를 뒤흔들 만한 발견이었으며 보다 기초적인 재검토를 요구하는 것이었다.	예상반응:각자 다양한 직각이등변삼각형을 그리고, 빗변을 어떤 단위선분으로도 표현 할 수 없는 것들에 대해서 인식한다. 	직각이등변삼각형의 빗변은 어떤 단위선분으로도 그 길이를 표현 할 수 없는 것이다.-의 예를 보이세요.	
	이와 함께 논란이 되는 문제는 원의 면적을 구하는 문제와 관련된다. Hippocrates는 두 원의 면적의 비는 그 원들의 반지름의 제곱의 비와 같다는 보조 정리를 이용해서 주어진 원의 면적의 비는 그 원들의 반지름의 제곱의 비와 같다는 보조 정리를 이용해서 주어진 원의 지름 AB를 지나고 반원의 중점을 중심으로 해서 생긴 원에 의해 만들어지는 초승달 모양의 도형의 넓이가 반지름의 제곱과 같다는 것을 증명하였다. 이를 통해 곡선으로 이루어진 도형의 면적을 직선에 의해 만들어진 도형의 넓이의 비로 나태내는 문제가 중요시 되었다. 모든 다각형이 정사각형의 면적으로 표현 가능해지자 원에 내접하는 아주 큰 다각형을 이용해서 원의 넓이를 표현 하고자 하는 시도가 일어났다. 그러나 Platon과 같은 이상주의자는 원에 내접하는 아무리 큰 다각형도 이상적인 원은 아님을 주장한다.	예상반응: Hippocrates의 달에 대한 증명과 그 의의에 대해서 논의해 본다. 	반원의 중점을 중심으로 해서 생긴 원에 의해 만들어지는 초승달 모양의 도형의 넓이가 반지름의 제곱과 같다는 것을 증명해 보이요.	

시대	역사속의 수학	현재( )가 본 수학	상황문제	조별문제
	결국 모호하고 직관적인 근사 개념이 아닌 논리적인 개념을 통한 설명이 요구되었다. 이에 그리스의 유클리드(Euclid : 333?~275? B.C)는 원에 내접하는 정 2^n각형의 넓이가 이루는 수열의 극한값으로 원의 넓이를 계산하려고 하였다.			원에 내접하는 2^n각형의 넓이가 이루는 수열의 극한값으로 원의 넓이를 계산해보세요.-1조
	그후 아르키메데스(Archimedes:287?~212 B.C)도 같은 생각으로 원의 지름 ×원주율(π)은 원주가 된다는 사실에서 원넓이를 다음과 같이 계산하였다. 1. 원주의 길이를 구한다.— $2\pi r$ 2. 원주의 길이에 반지름을 곱한다.— $2\pi r^2$ 3. 결과를 2로나눈다.($\frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$)아르키메데스의 연구 결과는 오늘날 초등 학교에서 배우는 내용과 똑같은 것이지만 방법은 다르다. 그 방법은 "아르키메데스의 착출법"이라고 알려진 것이다. 그는 온갖 물질은 원자라는 기본단위로부터 이루어져 있다는 원자론의 창안자 데모크리토스의 신봉자답게(평면)도형이 미세한 선을 기본 단위로 하여 이루어졌다고 보았다. 그리하여 평면도형의 면적을 구하는데 있어서 이 "선의 집합"이라는 생각을 이용하는 방법을 고안했다. 이는 또한"카발리에리의 원리"의 모체가 되었다. 아리키메데스는 착출법을 이용하여 원주율 π가 $3\frac{70}{10} < \pi < 3\frac{71}{10}$임을 알게 되었고, 이는 도형의 넓이와 부피를 구할 때 극한을 적용한 것이다. 아르키메데스처럼 매력을 느끼게 하는 천재는 드물다. 왜냐면 그의 일화속에서 다분히 인간적인 노력과 희열·성취감을 볼 수 있기 때문이다.[1]	예상반응:초등학교때에 배운 원의 넓이에 대한 것을 상기하고, 극한개념을 연결할 수 있다.    	오늘날 초등 학교에서 배우는 내용과 똑같은 것이지만 방법은 다르다고 했는데 초등학교때 배운 방법을 제시해보세요.	"카발리에리의 원리"를 조사해보세요.-4조

시대	역사속의 수학	현재( )가 본 수학	상황 문제	조별 문제
중세	중세의 무한은 신의 초월적인 완전함을 뜻하는 것이며 유한은 불완전하고 부족한 세계를 묘사하는 개념이었다.	예상반응:극한의 필연적인 사회배경과의 관계를 인식.		
근대	현실적으로 무한이 처음으로 나타난 것은 크리스트 신학에서라고 말할 수 있다. 흔히 근대의 시작은 인문주의 부활로 일컬어지는 르네상스의 크리스트교의 개혁을 주장하는 종교개혁으로 본다. 근대에는 인간을 자유롭고 무한한 잠재력을 가진 존재로 보며, 특히 뉴튼 역학의 성공으로 신만이 아니라 세계도 무한하다는 인식이 근대의 세계관으로 되었고, 따라서 수학에서도 이러한 사상적인 바탕이 현실적인 필요와 결합하여 무한 개념이 적극적으로 사용되고 연구될 수 있었고 보다 정확하게 현실적으로 우리가 생각하기에 너무 전문적이고 어려워보이는 여러 관련분야들 물리학, 의학, 화학의 발전에 부합되는 필연적인 사회의 요구에 바탕을 두고 극한 개념들이 발달하게 되었다.	예상반응:극한에 대한 중세와 근대의 사회적 배경과 철학관에 대한 토론을 통해서 현재의 극한개념의 형성과정을 인식		물리학, 의학, 화학의 발전에 부합되는 필연적인 사회의 요구에 바탕을 두고 극한 개념들이 발달한 예를 3가지 조사해 보세요.-3조
	18세기에 이르러 우리는 초인적인 수학자이자 과학자인 위대한 철학자 Euler, L(1707~1783)을 만나게 된다. 그는 요한 베르누이의 수제자였고, 지금까지 발견된 논문만도 800편이나 된다. 무엇보다 그는 러시아의 지도작성에 열중하고 있을 때 오른쪽 눈의 시력을 잃었고(1766) 얼마 안되어 왼쪽 눈의 시력마저 잃어버렸으나 그의 생애을 마칠때까지 계속 독창적인 연구을 했던 의지의 수학자였다. 따라서 라플라스가 " Euler는 18세기 후반의 모든 수학자에게는 공통의 스승이었다."라고 칭송하는 것은 너무나 당연한 일일 것이다.1)	예상반응:현대 극한의 형성과 논리성 및 연역적인 수학의 등장과 위대한 수학자에 대한 인식.		Euler,L에 대해서 조사해 보세요.-2조 (1707~1783)

시대	역사속의 수학	현재( )가 본 수학	상황 문제	조별 문제
	Lagrange(Lagrange,J.L.:1736~1813)는 이탈리아에서 출생한 프랑스계의 이탈리아 사람이었다. 그는 나폴레옹이 수학의 위대한 피라미드라고 격찬하였을 만큼 그의 업적은 화려하다. 그는 28살에 "달은 거의 눈에 띄지 않을 만큼의 변화가 있지만, 항상 같은 면만을 보인다."는 것을 이론적으로 밝힌 달의 칭동에 관한 논문으로 프랑스 과학 아카데미상을 받았고, 20살에는 변분법에 관한 문제를 오일러의 기하학적 방법과는 다른 해석적인 방법으로 풀어서 오일러를 놀라게 할 정도였다. Lagrange는 뉴턴 못지 않게 일반적인 원리를 찾아내는 탁월한 재능을 지니고 있었을 뿐만 아니라, 동시에 보기 드문 우수한 직관력으로 추상적인 이론을 발전시킬 수 있었다. Lagrange는 연분수를 통한 새로운 근사법을 발견했고 극도로 복잡한 부등식 계산에 의해서 근사치의 주어진 반복 계산이 전의 것보다 더욱 더 결과에 밀접하게 하는 필요충분조건을 부여하였다. Lagrange는 또한 Taylor 급수에서 나머지의 상한과 하한을 정하는 부등식을 만들었는데 이때 그는 연속함수의 중요한 성질인 중간값 정리를 사용하였다. 그러므로 이러한 18세기의 연구를 통해서 18세기말 무렵에는 부등식이 상당히 잘 발달되었고 이시대의 수학자들은 주어진 n에 대한 오차 즉 ε을 아는데 익숙해 질 수 있었다.	현대의 극한의 발전상에 위대한 수학자들과 극한개념에 대한 현대적 개념 인식.		

시대	역사속의 수학	현재( )가 본 수학	상황 문제	조별 문제
	이러한 극한의 개념이 명백하게 정의된 것은 프랑스의 A.L. Cauchy(1789~1857)에 의해서이다. 19세기초에 Bolzano-Werierstrass, Cauchy, Abel 등에 의해 엄밀성의 문제가 추구되었다. 이때 가장 큰 영향을 미친 것은 Cauchy로써 그는 "수"의 기초 위에서 극한의 개념으로 미적분의 체계를 건설해 나갔다. 그는 미적분의 기본 개념 즉 함수, 극한, 연속성, 도함수, 적분 등을 조심스럽게 정의하였고 그 성질들을 확립하였다. 그는 또한 무한급수 중에서 합을 가지는 것과 가지지 않는 것, 수렴하는 급수와 발산하는 급수를 구별하고 발산 급수를 추방하였다.	예상반응:극한의 정의 확립과 후행학습에의 극한의 중요성인식.		

<연구과제>

● 극한을 정의해보세요.

● 역사속의 수학자중 가장 관심있는 인물에 대한 보고서를 제출해 주세요.

● 수업내용 중 느낀점이나 의문점을 적어보세요.

<토론과제>

● 근대이후 많은 수학자들의 두드러진 활동이 가능했던 사회적 배경에 대해 토론하죠?

<평가> 자기평가 & 교사평가

※ 조별과제(5점): & ※ 연구과제(5점): & ※ 의사소통 능력(5점): &

교육과정상에 명시된 내용을 벗어난 수학사지만 교수학적으로 교사에게 가치 있는 내용을 제시해 본다.

Cauchy의 증명에서 Seidel의 평등수렴의 개념의 발견까지는 거의 40여년의 기간이 소요된다. Lakatos는 이러한 발견에 대한 방해 요인으로 당시에는 증명과 반박의 방식 즉 반례의 발견 이후 증명을 분석하고 잘못된 보조 정리를 찾으려고 시도해야 한다는 것을 알지 못한데 있다고 보았다. 엄밀성에 대한 Cauchy의 혁명은 유클리드 방법론을 미적분에 적용하려는 의식적인 시도였다. 그와 그의 추종자들은 이것이 "해석함의 모호함"을 쫓아낼 빛을 비출 수 있는 방법이라고 생각하였다. 해석학의 모든 모호한 용어는 산술적 용어로 정의되고 그 이전에 증명되지 않았거나 모호한 것들은 증명해 나갔다. 그런데 유클리드적인 골격내에서는 거짓인 명제는 증명을 시도할 여지가 없다. 그래서 Cauchy는 먼저 거짓인 명제를 버림으로써 현존하는 수학적 추측의 덩어리를 개선하지 않을 수 없었다. 추측을 개선하기 위하여 그는 예외를 찾아 원래의 경솔하게 진술된 추측이 타당한 영역을 안전한 분야로 제한하는 방법을 적용하였다. 그러나 그들은 추측을 개선하기 위해 끊임없이 노력한 반면

증명에 의해 개선한다는 생각은 결코 떠오르지 않았다. 유클리드적 전통에 있어서 추측과 증명은 엄격히 분리되어 있었고 증명이라는 이름을 받아들이면서 아직 결정적이 못되는 증명이란 생각은 엄밀주의자에게는 낯선 것이었다. 이들에게는 엄밀하지 않은 증명은 증명이 아닌 것이었다. 유클리드 전통은 모든 수학이 의심의 여지가 없이 자명한 것으로 환원될 수 있다는 생각과 연역적인 추론이 전혀 틀림이 없다는 생각을 전제로 한다. 이를 무오류주의라 부른다. 이러한 가정을 포기해야만이 증명과 반박의 방법이 자유로운 발달을 할 수 있고, 연역적 증명에 대한 비판적 평가와 반례를 다루는 문제에 그것을 적용할 수 있다. 이렇게 역사발생 과정을 살펴보면 그 속에서 고뇌하는 인간, 돌아가는 세상, 그리고 무엇보다도 교육철학을 얻어낼 수 있다.

C. 수학적 문제해결의 오류발생 예방를 위해 Lakatos의 발견술을 제시한다

Lakatos의 발견술은 문제상황으로부터 출발하여 학습자가 그에 대한 해답을 추측하고, 검사, 사고실험, 곧 분석을 통하여 증명 사고실험, 곧 종합이 시도되고 반례를 통해 추측을 개선해 가는 패턴을 취한다. Lakatos의 발견술을 실제로 교수-학습에 적용하기 위해서는 문제에서 발생한 오류에 대해서 학습자에게 오류의 원인을 파악하도록 그 부분을 부각시켜 지도하는 것보다는, 교사가 수업전에 미리 오류 발생 부분을 예측하여 충분한 사고실험을 거친 교수-학습 전략으로 수업에서 의도적으로 오류발생을 일으키는 반박이 가능한 문제를 제시한 후에 학습자에게 추측한 반박을 할 수 있도록 조성하여 학습자 스스로 오류를 확실히 인식하게 하는 방법일 것이다.

본시학습에서 Lakatos의 발견술을 적용한 예를 들어보겠다.

예1)무한급수에서 일반항이 0으로 향한다면 이 급수는 수렴한다는 오류를 범하는 학습자가 많은데 이것은 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이라는 정리를 '가정과 결론' 을 바꾸어 기억하고 있는 경우이고, 또한 초등학교와 중학교의 학습과정에서 소수와 관련된 근사값 계산 0.00001, 0.0005, $\sqrt{2}$ =1.141421356······에서 무시할 만큼 작은 것은 거의 0이 되어 의미가 없다고 보고 버리는 인지조작이 적용되었기 때문이다. 따라서 극한에서는 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이라 하더라도 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 한 없이 커지거나 작아질 수 있음을 인식시켜야 한다. 이를 위해서 예: $a_n= r^n(-1<r<1)$에 대해서 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이고, 이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n= \sum_{n=1}^{\infty} r^n=\frac{r}{1-r}$ =(상수) 임을 보여 주어 국소적 입장에서 입증하고, 학습자의 반박을 이끌어낸다. 예: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 을 제시하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\infty$

임을 보인다. 따라서 학습자의 오류를 의식적으로 인식할 수 있도록 하고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이지만, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$일 때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하는 것이 아님을 학습할 수 있게 한다.

예2)학습자는 ∞(무한대)를 수라고 생각하여 오류를 범하는 경우가 많다.

∞는 수가 아니고, 무한히 커지는 상태를 나타내는 기호임을 예를 통하여 지도하는 것이 효과적일 것이다. 즉 '$n\to\infty$' 는 아무리 큰 G에 대해서도 n이 n>G와 같이 되는 상태에 있음을 나타내는 기호임을 인식시켜야 한다.

$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3} = \infty$의 지도에서 $f(x) = \frac{1}{x-3}$이 $x=3$에서 ∞의 극한값을 갖는다는 뜻이 아니라는 것이다. $f(x) = \frac{1}{x-3}$이 $x\to 3$에 따라 점점 큰 수를 가지며 어느 특정한 수에 가까워지지 않는다는 것을 말해준다. 여기서 ∞는 수가 아니다. 다시말해 $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3} = \infty$과 같은 표현은 왜 함수 $f(x) = \frac{1}{x-3}$이 $x\to 3$에서 극한을 갖지 않는가에 대한 보충 설명을 하고 있는 것이며, 무한대라는 극한값을 갖는다는 이야기가 아니다. $f(x) = \frac{1}{x-3}$은 $x=3$을 뺀 다른 점에서는 극한값 $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-3^2} = \frac{1}{x_0-3}$ ($x_0 \neq 3$) 을 갖는다는 것임을 인식시켜야 한다. ∞에 대한 잘못된 인식으로 학습자들은 부정형에 대해서 극한의 이해가 미비한 경우가 많다. 부정형의 예로 ∞/∞같은 표현을 들 수 있다. 이러한 표현에는 미리 정해진 값이 할당되어 있지 않다. 그 값은 오직 극한으로 보내는 과정을 통해서만 얻어진다. 예:2x+1/x-1에서 x가 무한대로 갈 때, 이 식의 나누는 항과 나누어지는 항은 모두 제한없이 커진다. 그러나 그 둘 사이의 비율은 극한값 2에 수렴한다. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x-1} = 2$ 그렇지만 $\frac{\infty}{\infty} = 2$라고 쓴다면, 완전히 잘못된 답안을 제출하는 것이다. 또 다른 부정형들 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$에 대해서도 학습자에게 효과적인 극한지도를 위해서 미리 갈등상황의 예들을 제시하여 오류발생이 잘 되는 부분임을 의식적으로 인식하도록 지도하는 것이 효과적일 것이다.

학습자들에게 이러한 인식론적 갈등과 오류는 학습자뿐만 아니라 일류 수학자들도 겪었던 것임을 극한 개념의 역사를 활용하여 설명함으로써 학습자에게 자신의 갈등상황에 대한 불안감을 감소시킬 수 있고 수학에 대해서 새로운 인식을 갖게 할 수 있을 것이다. 예를 들면, 극한개념-도함수의 정의

에 대해서 다음과 같은 문제 $x=a$일 때, $y=f(x)$ 의 미분계수 $f'(a)$는 이 함수의 그래프상의 점 $(a, f(a))$에 있어서의 접선의 기울기였다. 이것은 b가 a에 한없이 접근하였을 때의 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$의 궁극적인 값이다. 그런데 b가 a에 접근하는 마지막 순간에는 이 비는 $\frac{0}{0}$이 되고 만다. 이것은 부정형이 아닌가? 가령, $f(x)=x^2$의 미분계수를 구할 때, 먼저 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a$ 와 같이 고쳐서 생각하면 궁극적으로 값은 $2a$가 되지만, 어째서? 원래의 비의 형태에서는 구할 수 없는 것일까?

실제로 이 의문은 심각한 철학상의 문제로까지 확산되어, 수학자들과 철학자들과 한데 얽혀 법석을 떤 일대 논쟁거리가 되었다. 이때 이 난문을 수학적으로 해결한 사람은 A. L Couchy (1789~1857)이다. 그 해답은 "변수가 차례로 취하는 값이 일정한 값에 접근해 가고, 그 차가 임의의 작은 값보다도 작아지면[6], 이 일정한 값을 처음 변수의 극한이라고 부른다." 라고 했다. 이렇게 하면 b가 a와 일치하는 순간을 생각할 필요가 없어지기 때문에 $\frac{0}{0}$이라는 벽에 부딪치지 않는다. 이것은 수학의 역사 중에서 극한에 대한 명백한 개념의 탄생이 나타나게 된 배경으로서 학습자의 수학에 대한 인식에 충분히 활용할 수 있을 것을 기대한다.

D. 실생활에서 수학적인 극한의 접근방법을 살펴보자

수학을 어렵게 하는 이유는 수학에서 구사되고 있는 용어와 기호들의 의미를 학습자가 충분히 인식하지 못하고, 단지 수학 문제를 풀기 위한 다분히 수학적인 이론들의 부분이라고 여기기 때문이다. 수학은 학생들이 일상적으로 경험해 온 용어로 설명되기보다는 대개는 경험해 본 적이 없는 아주 낯선 용어[7]로 설명된다. 그래서 수학 용어는 한글임에도 불구하고 낯선 외래어로 등장하여 수학 학습을 어렵게 하고 결국에는 수학이 어려워지게 된다. 특히 극한 학습에서는 매우 생소한 용어 예를 들면 수렴, 극한, 발산, 무한등비수열, 무한급수, 무한등비급수 와 기호 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n=\pm\infty$, $n\to\infty$, $a_n\to a$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, 등이 등장한다.

Poincare(1908)는 수학적인 정의의 지도에 대하여 다음과 같은 견해를 밝히고 있다. 교육적으로 바람직스러운 정의란 학생들이 보다 이해하기 쉬운 정의이다. 수학자들에게는 너무나 확실하여 광명과 같은 느낌을 주는 정의라고 하더라도 형식적인 논리적 정의를 처음부터 도입하면 학생들에게는

6) 일정값에 한없이 접근하면
7) 전통적인 수학수업의 내연적 정의는 역사적 발생과정의 설명없이 용어 자체로 도입되는 경우가 많다.

무가치한 것이 된다. 학생들에게는 처음에 구체적이고 직관적인 표상을 수반하는 외연적정의[8]가 제시되어야 한다. 그리고 수학적 사고가 발전되면서 그러한 초기의 정의의 조잡성을 스스로 깨닫게 하고 의문이 생기도록 하여 점진적으로 보다 엄밀한 정의를 찾도록 지도되어야 한다고 하였다. 즉, 학습자들에게 가장 부담스럽게 혹은 가장 짜증나게 받아들여지는 수학의 필연적인 엄밀성에 대해서 학습자스스로에게 타당성을 인정하게 하는 것이다. 따라서 시간이 많이 소요되더라도 교수학적 가치가 매우 높은 외연적 정의에 교사·교재개발자·학습자들은 비중 있는 접근을 해야 할 것이다. 역사적으로도 수학적인 여러 가지 개념은 처음에 직관적이고 매우 불완전하게 정의되어 사용되었고, 그러한 직관적인 정의는 수학적 사고의 발전 과정에서 여러 가지 문제점을 야기시키게 되어 보다 엄밀한 정의가 요구되게 되었다. 따라서, 효과적인 학습을 위해서는 적어도 수학적 개념에 대한 학습자의 이해를 돕기 위해서는, 인지조작에 대한 교수학적 전략으로 동화와 조절·평형화, 실제 생활에서 수학적 용어에 대한 구체적인 의미를 담고있는 대상들을 제시하여 직관력 및 적용력을 향상시키고, 학습자 스스로 그 대상에 대한 수학적 인식에 대한 반성을 하도록 해야 한다. 이러한 입장에서 효과적인 교수학습 방법을 제시해 본다.

첫 번째는 동화와 조절을 위한 선수학습에 대한 본시학습의 적용방안이다.

"우리가 태어나서 배우는 많은 언어들 엄마, 아빠, 맘마(밥)······에 대해서 당신이 진정으로 이해한 때는 언제였는가? "라는 질문에 "배웠을 당시"라고 대답하는 분들은 적을 것이다.

나는 그 이유가 "진정으로"이라는 부사 때문이라고 생각한다. 우리는 저마다 다른 생각을 한다. "열길 물속은 알아도, 한 길 사람 속은 모르는 것처럼······" 우리의 인지구조는 경험에 의해서 발달한다. 우리는 어떤 것을 이해하고 있는지 혹은 이해하지 못하는 지를 인식하고 있다. 그리고 대부분의 사람들은 이것이 중요한 문제라고 굳게 믿고 있다. 그러나 우리가 이해를 할 때 무슨 일이 일어나고 우리가 이해하지 못할 때는 어떤 일이 일어나지 않는 가를 대부분의 사람들은 잘 모른다. 우리가 이런 사실을 인식하지 못하는 한, 다른 사람들을 이해시킬 수 있는 좋은 위치에 설 수 없을 것이다. Skemp(1971)는 "어떤 것을 이해한다는 것은 그것을 적절한 도식에 동화시킨다는 의미이다."라고 하였다. 따라서 고등학교 학습자들이 극한 개념을 이해하는 데에 어려움을 겪는 주요 원인으로 극한 개념의 지도에서 기존의 지식과 적절한 관계망을 형성하려는 노력이 부족했거나 학생들이 인지적 장애를 갖고 있기 때문이다. 따라서 교사는 적절한 동화를 위한 schemes을 사용하여 조절 및 평형화을 유도할 수 있는 교수학적 방법론을 고찰해야 하겠다. 나는 그러한 동화-조절의 방법론으로 학습자가 기존의 학습과정상 획득한 schemes들을 이용하는 방법과 다른 교과와의 통합적 교수학적 전략인 연합수업을 제시한다.

예들 들면, 중학교 때 배운 무리수을 예로 학습자의 의식적 인지조작을 유도할수 있다.

---

8) 외연적 정의:어떤 개념을 그 개념에 포괄되는 대상 전체로서 기술하는 것으로서 개념의 외연에 의해서 개념을 정의하는 것.예로써 사다리꼴이란 한 쌍의 맞변이 평행한 사각형이다.이와는 대조적으로 내포적 정의:어떤 대상에 공통된 성질로서 개념을 정의하는것은 그러한 성질을 대상에 공통으로 내포된 특성으로 보고 개념을 규정하는 것으로써, 전통적인 개념정의 방식이다.예로써 사상이란 집합사이의 일대다가 아닌 대응이다.

무리수: 두 정수의 비로 나타낼 수 없는 수이다. 즉 무리수는 십진법으로 표현했을 때 반복되는 자릿수를 갖지 않는다. 무리수의 예로 $\sqrt{2}$ =1.141421356······한변의 길이가 1인 정사각형의 대각선, π=3.14159265······지름이 1인 원의 원둘레, 즉 원둘레[$2\pi r$]÷지름[$2r$], 황금···· 정오각형의 한변의 길이와 대각선의 길이는 1:1.6180······이러한 선수학습내용은 또한 학습자들에게 사각형, 원, 오각형을 통하여 실제 생활안에서 수학 경험하게 할수 있다. 그런후에는 컴퓨터나 계산기를 이용하여 대수적으로 이 수들을 의식적으로 인식하게 할수 있게한다면 학습효과가 클 것이다. 또한 교수학적으로 관련된 부분에 대한 타교과와 조정 통합은 학습자에게 수학의 가치를 인식시키고, 또한 학습에 흥미를 높일 수 있을 것이다. 무엇보다도 조절차원에서 교수학적 의미가 크다고 본다. "과학은 지식의 어머니요, 수학은 과학의 여왕이다"라는 말이 있다. 수학은 과학이라는 학문과 매우 깊은 관계[9]가 있다. 그러나 과학자들이 교육에서 수학의 적용가능성을 예시하려는 노력을 하기를 기대하기는 어렵다. 그것은 수학교육자의 몫이다. 우리는 학습자가 수학을 학습할 뿐만 아니라 그것을 적용하는 방법을 학습하도록 해야한다. 수학과 다른 학문의 통합이나 조정이 아닌 수학을 중심으로 한 통합, 즉 다른 학문의 내용을 수학적인 조직화의 분야로서 다루도록 하는 수학을 핵심과목으로 하는 통합은 학습자에게 그들이 수학으로서 할 수 있는 것을 학습할 수 있도록 할 것이다.

극한 단원의 교과상에서 좀더 학습자에게 동화가 쉽게 일어날 수 있는 교수학적 상황을 살펴보자. 교과서상에서의 모호한 표현 즉, 직관형성의 방해적 요인으로 학습자는 수열의 항을 나타내는 n에 대한 수열의 일반항 a_n과 수렴값 α에 대해 많은 오류를 나타내고, 따라서 많이 혼란스럽게 생각하고, 괴로워한다. 따라서 "무한수열 { a_n}에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 { a_n}은 α에 수렴한다라 하고, α를 무한수열 { a_n}의 극한 또는 극한값이라고 한다." 라는 부분을 "무한수열 { a_n}에서 항 n이 1항부터 증가할때, 일반항 a_n의 값이 특정값 α에 가까워지면 수열 { a_n}은 α에 수렴한다라 하고, α를 무한수열 { a_n}의 극한 또는 극한값이라고 한다." 라고 기술한다면, 항의 개념을 명확히 인식하게 할 수 있을 뿐만 아니라, 수열에 대한 양적인 개념(커진다. 일정값.)에서 동적인 개념(증가한다. 특정값)으로 수열에 대한 이해를 더욱 명확히 할 수 있을 것이다. 학생의 인지구조에 보다 명확한 직관적인 관념 형성을 위해서 무한수열의 기본모델인 수렴수열 · 발산수열 · 진동수열을 동시에 문제상황으로 제시해야 한다. 학습자에게 연역적이고 체계적인 학습을 위해 지금과 같이 단계적으로 수열을 제시하는 것은 수열을 수학적 지식으로 학습시키기 위한 방법적 구성이라고 보여지며, 이는 수열자체의 성질에 접근을 더욱 어렵게 한다. 학습자들은 수렴에 대해서는 매우 민감하게 반응하며, 발산수열에 대해서는 특히 진동수열에 대해서는 잘 인식하지 못하고, 거부감마져 느낀다. 수열은 수체계처럼 단계적인 확장과 분류가 뚜렷이 구분되는 부분이 아니기 때문이다. 주어진 상황의 수열에 대한 직관적 관념으로 시작하

9) 고등학생의 물리학습에서 일과 에너지 부분은 극한 지도와 관련이 깊으며 실재로 학습자의 효율적인 이해를 위한 연합수업을 시도할 수있을 것이다.

여, 다시 그 수열을 의식적으로 분석하고 반성하는 과정을 통하여 어림으로의 특정치를 구하는 것으로써 사용할 때 학습자에게 그 의미가 확고해 질 수 있다. 따라서 기본모델인 수렴수열・발산수열・진동수열의 예 $\lim_{n\to\infty} n$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ 3가지 수열을 동시에 제시하고 이러한 기본 모델들을 이용하여 다른 수열들을 직접 만들어 보고, 학습자들끼리 수학적으로 의사소통 하도록 교사가 주도하는 학습이 이루어지는 것이 바람직 할 것이다. 역사적으로도 Werierstrass는 무한급수 1-1+1-1+1-1······의 합을 구했던 그 이전의 잘못된 방법을 그의 저서 [무한의 역설]에서 소개하였다. 그것은 다음과 같은 세가지의 경우이다.

(1) 1-1+1-1······=(1-1)+(1-1)+(1-1)+····=0+0+0····

(2) 1-1+1-1······=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-····=1-0-0-0····=1

(3) 구하는 수열의 합을 S라고 하면 s=1-1+1-1+1······=1-(1-1+1-1+····)=1-S ∴ S=1/2

그러나 이 무한급수는 진동하므로 극한값이 존재하지 않는다.

따라서, 위의 어느 것도 답이 될 수 없고 [극한값은 없다.]가 바른 해답이다.

일반적으로, 무한의 계산에서는 다음과 같이 계산할 수 없다.

1. 임의로 괄호를 묶는다.
2. 구하는 합을 S로 놓는다.
3. 항의 순서를 바꾼다.

그러나 위대한 수학자 Euler도 (3)과 같이 계산하는 실수를 범하였다. 또한 수열 직교좌표에 나타내는 것보다는 수직선상에서 일반항들로 표현하는 것이 극한의 개념을 이해하는데 더욱 효과적이다. 물론 함수의 경우는 직교좌표로 나타내는 것이 효과적이다.

두번째는 실생활에서 극한에 대한 개념을 가진 대상을 고려하기 위한 기초적인 자료수집방법으로 사전을 찾아보는 것을 권하고 싶다.

그 이유는 사전에는 그 다지 어려운 전문적 용어들이 나오지 않고, 일상적인 개념으로 쉽게 이해가 되는 개념을 가진 대상에 접근하는 실마리을 찾을 수 있기 때문이다. 이는 필자의 경험상 매우 효과적이라고 확신한다.

예를 들면, 수렴에 대한 용어를 국어사전・영한사전에서 찾아보자.

◎ 수렴[收:거둘 수, 斂:거둘 렴]

1. 곡물을 두어 들임.
2. 어떠한 변수 x가 어떤 유한 확정된 수 a에 한없이 가까워지는 일.
3. [물] 광선속, 유체, 전류 등이 한 점에 모이는 일, 또는 대기・해수가 한 수평면 위에서 한 점에 모이는 일. 한 예로는 우리가 중학교 때 학습했던 흑연을 뿌린 책받침 밑에 자석을 놓은 실험을 통하여 수렴이라는 의미를 직관적으로 인식할 수 있도록 학습자를 도울 수 있을 것이다.

Convergence

1. 한 점에의 집중, 집중성
2. 집합점
3. [수학, 물리]수렴, [기상]수렴 현상, [생물]근사 현상

◎ 발산 [發:쏠 발, 散:흩어질 산]
1. 병의 기운이 헤쳐짐.
2. 퍼져서 흩어짐. 또 퍼져서 흩어짐.
3. 증산
4. 물체가 그 표면으로부터 복사선을 방출함.
5. 수열·급수 등과 같은 수치의 무한 계열이 어느 유한 계열의 일정치에 수렴하지 않음.

발산렌즈: 평행 광선을 발산시키는 렌즈. 오목렌즈.

◎ 진동[振:떨칠 진, 動:움직일 동]
1. 흔들려 움직임.
2. [물]하나의 물리적인 양, 곧, 물체의 위치·전류의 세기·전계·자계·기체의 밀도 등이 어떤 일정치의 부근에서 주기적으로 그 변치를 변동하는 일. 이에 대한 예로는 삼각함수 ·파동[10]이 있다.

이상에서 적어도 우리는 수렴, 발산, 진동이란 용어가 수학에서뿐만 아니라, 일상생활에도 쓰이고 있으며, 다른 학문에서도 다루고 있음을 알수 있다. 그리고 그 예들은 관련내용들 수열의 극한이 등장하는 실제적인 예[11]을 조사하는 과정에서 얼마든지 많이 얻을 수 있으리라 확신한다. 혹시 이러한 일들이 수학학습에 무슨 도움이 될 것인가에 대해서 의심하는 분들이 있을지 모른다른 생각에 몇 마디 더 덧붙인다면, 나는 이러한 접근이야말로 활자로 된 수학책에 생기를 불어넣는 가장 근본적인 시도라고 본다. 언어에 구체적인 상을 인식 할 수 있는 시도로써 외연적 정의를 학습자에게 보다 쉽게 인식할 수 있게 할 것이다. 또한 많은 분들이 이러한 접근에 계속적인 관심과 연구를 함으로써 연역적이고 알고리즘적인 수학을 학습자의 인식 안에서 살아있고 활동하는 수학으로 존재시킬 수 있으며, 생활 안에서 학습자들에게 수학을 느낄 수 있다고 생각한다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구를 통해 현재 학교수학에 대해 어떤 관점에서 바라보아도 항상 가장 문제인 것은 교과

10) 고등학교 1학년부터 학습하게 되는 물리학과 화학에서의 주기적 성질
11) 사진기 렌즈에 새겨진 무한기호, 체스이야기-체스판 첫 번째 칸에는 한 알의 밀알을, 두 번째 칸에는 두 알을 ······그런 식으로 모든 체스판을 채워 주십시오. 왕은 그의 소박함에 놀라면서, 그 소원들 당장 들어주겠노라 했다. 그러나 이 수열은 1,2,4,8······64번째항은 9,223372036854775808이기 때문이다., 거울에 비친 대상의 반복상은 r=1/2인 등비수열, 너무나 멋진 화가 에셔의 작품들, 프랙탈····이런 예들은 분명히 학습자에게 흥미를 자극시켜 학습에 재미와 동기를 일으킬 것을 확신한다. 왜냐하면 나 자신도 수학의 새로운 면에 대한 매력에 흠뻑 빨져버릴 수 있었기 때문이다. 따라서 이런 예들 교과서 상에서도 교육과정에서도 우리의 인식에서도 중요한 비중을 차지하기를 바란다.

서[12]였다. 물론 일제 치하에서 시작된 한국의 교육체계상의 필연적인 역사적 발전 과정의 가치와 그 부산물들을 무시하는 것은 아니다. 우리의 과거를 무시한다면 발전된 오늘도 미래도 찾을 수 없을 것이기 때문이다. 중학생들의 중학교 표준화 수학시험 세계 최상위 1~5위라는 세계를 놀라게 한 우수한 결과와, 미국 고등학생의 10% 정도만 이수하는 고급 수학인 미분적분학1년을 한국은 모든 고등 학습자가 이수하며, 7차에서는 심화선택으로 바뀌었지만 국제 수학 올림피아드에서 10위권 이라는 자랑할 만한 순위는 우리 학습자들과 학부모님 그리고 교사분들의 헌신적인 노력들이라 생각한다.

그러나, 이제는 학습자에게 결과를 위한 수학이 아닌, 실제적이고 살아있는 수학을 경험하게 해야 한다. 적어도 이해하고, 느낄 수 있게 해주어야 한다. 더 이상 학습자들과 학부모님들을 코너로 몰아갈 수 있을 정도로 한국 수학교육의 가치가 인식되지 않고 있다. 세상은 좁지 않다는 것을 우리의 똑똑한 학습자들은 점점 더 확실히 인식해가고 있다.

이에 우리 교과서의 지향점에 대해서 몇 가지 문제점들을 생각해 보고자 한다.

첫째는 현재 한국의 초·중·고등학교의 수학교과서는 연역적 전개 방식으로, 학습자 중심에서 구성되어 있지 않으며, 외국의 교과서에 비하여 구성이 초라하고, 소위 참고서로 불리는 교과서 이외의 연습문제집들이 너무 많다. 참고서라함은 문자 그대로 어떤 주제를 연구하는데 참고로 하는 서적을 의미하는 것으로, 그 교과서의 저자가 사용한 참고 문헌들이 교과서 내용을 더 보강하는 역할을 한다. 한국의 초·중·고등학생을 위한 참고서란 교과서만으로는 입시문제 연습에 불충분하다는 시각에서 발상된 것이고, 따라서 그 내용은 연습문제의 반복일 뿐 주제의 이해를 증진시키는 책이 아니다. 한국의 교과서와 참고서는 아무런 동기와 배경설명은 물론 깊이 있는 설명도 없이 수학공식과 문제풀이 기술을 열거한 것에 불과하다. 교과서의 경우 연습 문제의 양도 매우 작아 은연중에 연습 문제집의 필요를 강요한다.

둘째는 한국교과서는 초·중·고교의 교과서가 학년별로 구분되어 있어 가르치는 주제의 일관성이 없다는 점이다. 예를 들면, 중학 수학 1, 중학 수학 2 등 학년별로 구분되어 중학 수학 1안에 대수, 기하 등이 취급되어 있다. 이 보다는 미국의 경우와 같이 수학의 분야 별로 대수 1, 대수 2 등으로 구분하여 학년과 관계없이 수학 체계를 계통적으로 가르치는 식의 교과서가 바람직하다.[13]

Steiner(1988)는 교과서는 종합적·연역적 양식으로 전개하고 수업은 Socrates식의 대화를 통한 발생적·분석적 접근을 시도하는 통합적인 방안이 적절하다고 하였다. 이는 현존의 교과서 구성에 대한 적합성을 변론하는 것이기도 하다. 그러나 Freudenthal은 교육과정과 교과서 분석을 통해 교수목표를 추출하여 세분화·상세화한 다음 의견조사를 거쳐 교수목표를 형식화하는 방법은 행동주의의 산물로 대부분 부정직하고 비과학적인 피상적인 것이며 유행으로 볼 수 있다고 하였다. 그와 같은 방법으로 상세화된 교수목표는 교재내용 그대로의 목록이며, 그것도 논리적·수학적·교수학적으로

12) 敎科書 : [學校 일정한 목적·설비·제도 및 규칙에 의거하여, 교사가 계속적으로 피교육자에게 교육을 실시하는 기관.]의 교과용으로 편찬된 도서

13) 수학의 가장 큰 특징인 계통성의 확보을 위해서, 중간탈락자가 많은 한국의 수학교육의 현실에서 이는 매우 중요한 일이며, 필자는 이를 위한 개혁이 반드시 필요한 시기가 지금이 아닌가 한다.

불합리한 독단적인 것이다. 교수목표의 공식화에 앞서 지도내용에 대한 교수현상학적 분석이 선행되어야 하며, 교수목표는 교과서의 문맥과 독립적으로 형식화되어야 하고, 가능한 한 학습수준이 제시되어야 한다. 교수현상학적 분석을 통해 추출된 목표에 따라 교재를 구성하고 이를 교육현장에 실제로 투입해 학생과 교사의 반응을 관찰 · 분석하여 학습목표를 형식화해야 한다고 하였다.

수학 교과서는 일반적으로 기성 산물로서 연역적으로 기술되어 있으나 Freudenthal은 이를 재발명하면서 실지로 행하는 수학으로 변형하기를 기대하며, 독자들에게 그들의 눈앞에서 수학이 창조되고 있다는 환상을 주는 형식으로 수학 교과서를 집필하기를 기대했다. 즉 교과서는 가르치는 대로 써야하며 실제의 교수경험과 사고실험을 출판하여야 할 것이라고 주장하였다. 이를 위해 Freudenthal은 역사발생적 원리에 입각한 학습이론인 안내된 재발명을 제시하였다. 나는 이러한 Freudenthal의 견해에 깊이 동감하며 학습자의 관념적 · 심리적 접근의 중요성과 실재 현장적용의 효율성 또한 매우 중요하게 고려한 교재을 절실히 요구한다.

그런데 지금 수학교육의 현실은 이러한 다양한 시도와 접근을 요하는 교재의 구성을 창의적이고 다양한 교수학적 방법론을 인정한다는 입장에서 교단에 선 교사들의 재량에 위임해 버리고 있다. '아는 것과 가르치는 것이 다르다는 것' 즉 교수학적 현상학에 대한 중요성을 인식했다면, 수천년에 걸친 수학적 배경과 가치, 다양한 학습자의 수준, 또한 현재에서 조망해 본 학습 내용의 의미와 가치들을 1:40명의 학습상황에서 학습자 개개인을 파악하고, 주어진 학급상 학교상의 일들을 하기에도 버거운 우리의 교사들에게 요구하는 것은 너무나 교수학적 의도가 미비한 일이다. 왜냐하면 우리나라는 정규 4년의 예비교사 교육을 사범대학에서 받고 있으며, 그 과정을 이수한 후에는 소정의 교사자격증을 취득하기 때문이다. 따라서 현행 사범대학 교육에서 교재에 대한 중요성과 다양한 교수학적 방법론에 대한 구체적인 교육이 있어야 한다고 본다.

이제 더 이상 예제와 문제로 구성되고, 연필과 지우개 그리고 연습장만으로 수업하는 일은 지양되어야 할 것이다. 다분히 다체롭고, 의미있는 수학사적 가치를 교과로 끌어들여 좀 더 깊고 , 좀 더 유용하고, 좀 더 흥미롭고 재미있게 수학학습을 경험시켜야 한다. 본 연구는 학교수학에 대한 관심과 사랑으로 연구되었으며, 지금의 학교수학에 많은 답답함과 어려움을 가지신 분들에게 조금이나마 도움이 되었으면 한다. 또한 우리의 교육현실이 많은 문제점과 부족함들을 안고 있으므로 앞으로 많은 발전을 이룰 수 있을 것을 희망한다.

참 고 문 헌

김용국 · 김용운 (1999). 수학사의 이해, 우성문화사.

김용국 · 김용운 (1999). 수학서설, 우성문화사.

김하준 (1996). 교육과정국제비교, 선명인쇄주식회사.

김태주 (1997). 민중 엣센스 영한사전, 민중서림.

김명렬 · 김창동 · 박수화 공저 (1995). (주)중앙교육진흥연구소.

교육부 (1994). 중학교 수학과 교육 과정 해설, 대한교과서주식회사.

박선화 (1993). 무한개념의 발달, 1993 대한수학교육학회 추계 수학교육 연구 발표대회 논문집.

박형종 (1999). 수학과 물리학, 바다와 소나무.

박영배 · 김창원 · 고대혁 · 정문성 · 강문봉 · 김현재 · 최유현 · 조한무 · 김경희 · 김정희 · 이재희 공저 (1998). 수업방법연구, 형성출판사.

신현성 (1999). 수학교육론, 경문사.

석태종 (1997). 교육사회학, 교육과학사.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

이상건. 미국 수학교육의 변화와 발전 경향. 수학교육 논총 **2, 8**.

우정호 · 박선화 (1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구. 1998 대한수학교육학회 추계 수학교육 연구 발표대회 논문집.

이희규 (1992). 민중 엣센스 국어사전, 민중서림.

정기환 (1997). 교육심리학, 동문사.

정태범 (1993). 미국교육의 동향과 한국교육의 방향, 교육과학사.

조한혁 · 최영기 (1999). 0.999··=1에 내재된 수학적 원리, 1999 대한수학교육학회 춘계 수학교육 연구 발표대회 논문집.

한종희 (1997). 고등학교 2학년 학생들의 극한 개념에 대한 오개념과 오류를 조사한 연구, 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

STEPI (1999). 한국 수학 교육 및 연구의 문제점과 정책적 대응 방안, 과학기술정책연구집.

Michael Guillen (1998). 박영훈 역. Bridges to Infinity, 경문사.

Hans Rademacher & Otto Toeplitz (1995) 황혜정 역. The Enjoyment of Mathematics, 교육과학사.

Richard r.skemp (1996). 김판수 · 박성택 옮김, 초등수학교육, 교우사.

Richard r.skemp (2000). 황우형, 수학학습심리학, 사이언스북스.

Brousseau, G., Theory of Didactical Situations in Mathematics, Didactique des

Freudenthal. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, D. Reidel Publishing Company, 1983-1.

Lakatos, I. (1967). *Problems in the Philosopy of Mathematics*, North-Holland Publishing Company.

Mathmatiques, 1970-1990, Kluwer Academic Publishers, 1997

Steiner, H.-G. (1988). *Two Kinds of 'Element' and the Dialectic between Syntheicdeductive and Analytic-genetic Approaches in Mathematics for the learning of mathematics*, **8(3)**, pp.7-15.