한국초등수학교육학회지 5, 1-18. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 5, 1-18.

초등수학교육에서의 패턴에 관한 소고[1)]

강 신 포[2)]

반복단위와 패턴의 부분 합성을 인식할 때 반복 패턴에 대한 수학적 발전의 잠재성이 충분히 발휘되고, 두 개의 같은 집합으로 분할 활동을 통해서 짝수·홀수의 인식 지도가 필요하며, 수패턴을 통한 유도전략을 배워서 덧셈계산에서 가속적인 발전을 위한 교수 순서를 제시한다.

Ⅰ. 서 론

우리는 수학에서 패턴의 의미를 정의하기가 쉽지 않다. 그 어려움 중의 하나는 단어가 여러 가지 다른 의미를 가진다는 것이다. 수학에서 우리는 종종 규칙을 찾는 것과 관련하여 패턴이란 단어를 사용하고, 그래서 규칙성을 더 다루는 것 같다. 모든 일상 생활에서 우리는 규칙성에 매력을 느끼는 듯하고 패턴을 찾든지 또는 패턴을 부과하여 상황을 설명하려고 한다. Gestelt 심리학에서는 밀려오는 느낌과 경험들을 자료들의 분리된 하나 하나의 모임으로가 아니라 조직화된 전체로써 해석하려고 꾸준히 노력하는 것이 인간의 특색이라고 보는 관점이다. 학생들이 인식하고 이해해서 수학에서 가능할 때마다 패턴을 사용하게 격려할 수 있다면 그것은 학생들에게 긍정적인 도움을 줄 것이 틀림없다는 것을 암시한다. 수학자와 수학교육자들은 수학에서 패턴의 중요성에 관해서 오랫동안 열성적이었다. Sawyer(1995. p12)는 '수학은 모든 가능한 패턴의 분류와 연구이다.'라고 주장했다. Williams와 Shuard(1982. pB30)는 '질서와 패턴 탐구는 아동과 함께하는 모든 수학분야에서 하나의 추진력의 하나이다.'고 암시했다.

본 논문에서는 초등학교에서 반복패턴에 대한 작업에 있어서 반복단위의 인식을 다루고, 짝수 홀수의 성질을 고려하여 수의 크기에 관계없이 패턴을 주시하기 위해서 두 개의 같은 집합으로 분할하는 생각으로 발전시키고 또 덧셈에서의 패턴 작업으로 유도 전략을 아동에게 가르쳐서 덧셈학습의 가속적인 발판을 위한 교수 순서를 제시한다.

Ⅱ. 초등학교에서의 반복 패턴

1. 반복하는 선형 패턴들의 목적

반복 패턴은 수와 대수를 목표한 제1단계의 특별한 경우란 점에서 상대적으로 중요한 위치를 차지하고

1) 본 논문은 2001년 부산교육대학교 자유과제연구 지원비에 의하여 연구되었음.
2) 부산교육대학교 ([611-736] 부산광역시 연제구 거제1동 263)

있다. '규칙성과 연속성의 생각을 신장시키기 위해 반복패턴을 사용하라' 이런 목적은 반복패턴이 일주일의 날들처럼 일상생활에 익숙한 아동들이 주기적 구조의 예를 생각할 것처럼 보이고 이러한 수와 대수에 대한 사고의 발전의 중요성은 아직 분명하게 만들어지지 않았다.

학습에 있어서 중요한 생각으로서의 반복패턴은 더 많은 수학으로 이끄는 사고의 형태로서 그 자체가 가치가 있을지 모른다. 이러한 관점에서, 반복패턴의 수행에 포함된 사고가 더 진보적 생각으로 어느 정도 이끈다고 보는 전통적인 활동에서의 가치의 관점이 있다. 반복패턴 작업은 교수가치라기 보다는 개념적으로 다루는 단계로서 보여지는 것은 대개 대수영역이다.

Clemson(1994 p68)은 대수는 수와 도형에 관한 일반적인 설명하고 인지하는 것에 대한 모든 것이라고 주장한다. 반복패턴은 단지 그것을 수행하는 것의 초기기회를 제공하는 것으로 보여질 수 있다. Owen (1995)은 인식과 예견, 일반화 그리고 규칙에 대한 소통을 포함하여 아동들이 수학에 있어 다른 어떤 매개체를 통해서 그것을 이용할 수 없는 수학적 사고의 요소에 접근함을 제공하는 것을 통해 반복패턴을 이해하게 하는 것은 바로 실제 사건에서 주기적 구조를 잘 아는 것이라고 주장한다.

아이들은 그들이 편안히 패턴을 가려내고 조작할 수 있음으로써 다른 경우보다 더 높은 수준에서 수행할 수 있을 것이다. 반복패턴작업의 목적은 적어도 이론적으로 대수에서 뒤따르는 발전을 위한 기초로서 수립되어야 한다. 이것은 어떻게 아동들이 실제적으로 반복패턴을 수행하는 것에 부합하는가?

2. 반복패턴 수행의 특징

반복패턴작업의 성질에 대한 공식적인 관점은 아동들이 자신의 패턴을 고안하는 전조로 필요해서 어른들의 패턴 모델을 모방하는 것이다. 이 생각은 그 뒤 패턴을 만드는데 특별한 관심을 가지고, 그것의 끊임없는 적응을 요구한다고 쓰여있다. Greeno 와 Simon (1974)은 어떻게 나열이 생성되는가를 질문해서 정보과정의 인지를 알려고 했다. 그들이 말하는 과정은 그전에 입력된 것으로부터 정보를 가지고 있고 인접한 것과 관련된 항목들에 대해서 자리를 지키는 메카니즘을 가지고 있어야 한다. 이 현상은 반복패턴 나열과 수열에 공통적이다. 그들은 수열의 생성에 대한 다른 제안을 제공하는데 그것은 반복수열을 만드는 다음 세 가지와 일치한다.

가. 모든 관계들을 기억해서 항목들을 인접한 항목과 관련짓는 과정. 예를 들면 가다가나가다가나 등의 패턴에서 그것이 "다"였고 "가"이면 "나"이다 와 같이 "패턴쌍"을 만들어서 나열한다.

나. 반복의 단위 (위의 예에서 가다가나)의 기억 그것은 반복에서 비교해서 지금 위치를 결정하는 매 때마다 암송한다.

다. 리듬 또는 계산체계. 예를 들어 강조해서 읊조림. 리듬이 가지고 있는 곳에 도달되게 되는 나열에서 그 포인트를 안다. 그래서 주어진 나열에서 약간 오른쪽, 왼쪽으로 옮겨서 리듬을 택하여 "가는 움직일 때 왼쪽은 "다"이고, 오른쪽은 "나"란 것은 안다.

이런 것 중 단지 나) 만 규칙을 만들고 적용하는 과정으로 생각될 것 같고 가)는 규칙으로서 헤아리지만 하나의 규칙도 적용하지 못하는 조건들을 모아 둔 것이고 나)은 율동적으로 접근, 다)는 전혀 규칙에 의존하지 않는다. 아동들의 패턴을 만드는 것을 관찰하면 어떤 유형의 내용에서 약간의 반복패턴들은 □속에 채워 넣어서 만들어지는 것을 볼 수 있다. 다시 말하면 규칙을 만들고 그것의 꾸준한 적용은 반복패턴에서 바람직한 일이지만 일어날 수 있는 모든 것은 아니고 아동의 작업의 산물로서 반복패턴이 있다고 해서 규칙이 만들어지고 적용되는 증거가 전혀 없다. 그와 같이 따로 존재하는 것은 물론 발전의 여지를 간절히 요구한다.

3. 아동의 반복패턴 작업에서 발전

Green, simon(1974)의 '연속적인 패턴 형태를 이해하는데 심리학에 있어서 결정적인 중요서' 라는 연구가 시작되고 이 분야의 연구 접근은 두 갈래가 있다

가. 패턴 자체가 원래 가지고 있는 차이를 인식하려고 하는 것도 그것은 실제 수행과 비교 될 수 있는 수행의 단계를 제시한다.

나. 반복패턴들에서 어린 아동들의 작업에 대한 경험적 연구, 그것은 약간의 발전적인 특성을 차지한다. 첫째의 예로서 Vitz 와 Todd (1967, 1969)비슷한 경우의 형태에 의한 복잡성에 대하거나 또는 그 패턴이 예견 될 수 있을 때까지 좀더 그리거나 작은 요소로 고침으로써 반복패턴을 배열하는 모형을 제공한다. 이 접근을 이용하여 그들은 처음에는 가장 덜 복잡한 형태에서 시작해서 어렵게 배열되어 있는 예를 제시한다. Simon 자신을 「배열에서 패턴을 찾게 하는데 필요한 관계들이 많으면 많을수록 오랜 기간 기억속에 패턴을 저장하기 위해서 고착화하는데 필요한 기초가 많아지고 패턴으로부터 배열을 만들어 내기 위해서 필요한 기억들이 하는 일이 더 많아진다.」 이 때문에 반복되는 패턴의 자리의 길이가 어려움에 관계되어 있다고 제안하면서 상대적인 어려움의 예견에 대한 이론적 '정보과정'의 접근을 제안한다.

둘째의 경우에서는 3~5세 아동들이 한번의 작업을 완성하는 능력을 연구함으로써 Rustigian(1976) 는 반복패턴의 확장을 위한 반응들에 대한 발전적인 단계를 발견했다. 작동적 이동이 그림으로 표시하는 현상적인 것보다 다루기 더 쉬웠고 형태가 생각보다 더 쉽다는 것을 알 뿐 만 아니라 그는 초기 요소들에 대한 과정적인 것을 발견했다. 이러한 연구들은 반복패턴에서 발전에는 두 갈래가 있다는 것을 제시한다.

하나는 아동들이 작업할 수 있는 패턴의 복잡성에 있다. 가장 간단한 요소가 교대로 나타나는 형태는 좀 더 복잡한 요소들 또는 재료의 하나의 특징보다 더 많이 이용하는 반복패턴을 포함하는 패턴보다 나이 어린 아동들 사이에는 더 흔히 있는 것으로 보일 수도 있다.

둘째는 반복패턴을 아동들이 어떻게 보고 있는가 이다. 여기에는 반복의 한 주기와 관련된 전체로서 아동이 패턴을 아는가 그렇지 않은가에 관한 주요한 발전의 발단이 있다.

발전의 두 갈래로 복잡성정도와 이해의 종류는 상대적으로 독립적인 것처럼 보인다. 즉 하나는 리듬적 방법으로 매우 복잡한 패턴을 다루는 아동을 발견할 수 있고 반복단위로서 가장 간단한 교재로 나타나는 패턴을 보는 나머지들, 교육학적 질문은 그래서 만약에 어느것이 더 중요하다면 어느 것이 되어야 하는가 이다. 학교수업은 아동들이 필적할 수 있는 패턴을 더 복잡하게 하고, 어떻게 아동들이 실제로 반복패턴을 만드는데 접근하는가를 무시해야 하는가? 또는 반복단위들로서 패턴들을 아동들이 볼 수 있도록 노력을 기울이는데 우선권을 주고 그 패턴이 얼마나 복잡한가에 대하여는 그리 염려하지 않아야 하는가?

4. 반복패턴 작업의 가치

반복패턴 작업이 대수를 배우기전의 한 요소로서 수학을 발전시키는 것으로 느끼는 공헌은 일반화를 위한 내용이다. 이러한 면에서 보면 반복패턴에서 반복단위의 인식의 중요성은 일반화의 대수적 원리의 초기 예이다. Diens(1963. p68) 은 「가장 자주 일어나는 일반화의 형태는 어떤 것이 유한에서 무한분류까지 행해질 수 있는 경우들의 분류로 확장하는 것이다. 아동들이 어떤 변수의 값들에 한 연산을 할 수 있다는 것을 배울 때 변수의 값은 무관계 하다는 것을 갑자기 깨닫게 되는 순간이 와서 연산은 어떤 변수의 값에 대해서도 수행할 수 있게 된다.」 라고 서술하고 다시 더 높은 수준의 상황이 주어진 결과로 아동들이 인식한 규칙들이 교묘하게 대상을 다룰 때 그 과정이 일어난다고 제의한다. 한 반복패턴의 내용에서 반복단

위를 보는 것은 패턴을 쉽고 통제 된 방법으로 바뀔 수 있게 한다. -즉 교묘하게 다루는 것이다.

반복단위를 인식한 아동은 전체에 대한 질문들에 대해서 부분들의 특징과 관계짓는 방법으로 그 질문에 접근할 수 있고, 이것은 '대수는 수관계와 패턴 같은 더 구체적인 위치로부터 추상화 될 수 있다'(Orton 1992. p178)고 보는 과정의 예로써 일찌기 보여 질 수 있다. 그러나 어떻게 과정적, 리듬적 접근으로 아동이 그 요구를 다루는 것일까?

정교하고 나선상의 헤아리는 전략에 호소해야 하는데, 그것은 많이 실수하고 가치를 가려서 과정을 반복하는 것보다는 다른 점검하는 방법이 없다. 과정들을 강조해선 아동들은 미래 발전에 희망이 거의 없는 막다른 골목으로 도달되게 된다. 더 나은 발전에 도달되게 하는 수학적 사고의 관점으로 보면 반복패턴이 보여준 방법이 모방되고, 연속되거나 고안 될 수 있는 복잡성보다는 더 중요한 것으로 보이다. 그리고는 그 다음 던지는 질문은 반복단위를 알아내고 반복패턴을 더 가치 있게 인식 할 수 있도록 가르치는 것이 가능한가?

5. 반복패턴 교수

다른 사람이 어떻게 특별한 방법으로 알게 되는가 하는 것은 모든 수준에서 교육의 도전들 중의 하나이다. 그러나 아동들이 반복패턴을 만들고 자유자재로 반복단위를 인식하고서 조작할 수 있는 능력을 패턴 속에서 발전시키려 할 때 그 단계를 넘어서 반복패턴 작업은 가치가 있다. 인식의 한 형태에서 다른 형태로는 전환은 꽤 자연스럽게 일어난다고 Dienes는 느낀다. 그러니 이것은 학습자의 경험과 태도라고 추정되고 그것은 모든 교실에서 자연스럽게 나타나리라고 기대할 수 없고 좀 더 적극적으로 가르쳐야 한다.

아동들에게 질문하여 반복패턴을 고안하게 하고 종이와 연필을 주어진 요소로 사용하여 도형, 수와 문자들을 가지고 패턴을 만들도록 하는 연구가 시행된 결과 그들의 패턴인식에 있어서 경험을 반영하는 경향이 나타난다. 아동들의 75%이상이 간단한 패턴을 만들었다. 그것은 세 개의 모양이 요소일 때 가장 공통적인 반응은 그것들의 순환이다.(그림2-1)

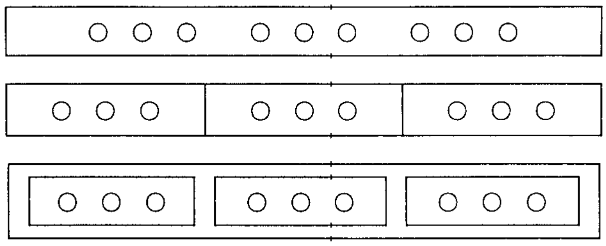
△ □ ○ △ □ ○ △ □ ○ (그림2-1)

다른 반응이 나타날 때 그것들은 복잡한 반복패턴이 아니라 모두가 다른 종류의 패턴이었다. 예를 들어 세 개의 각 모임의 (그림2-2)처럼 앞의 세 개(7%)로부터 순서가 다른 도형패턴에 정돈이 있다. 도형과 수 패턴에서는 (그림2-3)처럼 대칭적 정돈(8%)이 있다.

△ □ ○ ○ □ △ △ ○ □ △ ○ (그림2-2)

3 5 7 9 9 7 5 3 (그림2-3)

잘 아는 반복패턴들의 내용에 대해서 생각하는 길로 아동들은 안내하는 방법을 찾는데 있어서 실험이 시행되었는데 패턴이 세 가지 방법으로 만들어지도록 되어있는 일련의 점들을 나누어서 반복 단위를 인식하도록 아동들을 안내하는 것이 목적이다. : (그림2-4)처럼 (a)공간으로 (b)직선으로 (c)네모 안에 넣기



(그림2-4) 반복단위를 제시하는 3가지 방법들

복잡한 패턴들은 리듬적 접근을 기초로 하여 가끔 달성되고 있다는 제안이 있다. 또 다른 패턴인식을 바꾸는 접근은 그들과 함께 행해진 것에 의해서 더 나아가는 것이다. 이것은 반복단위가 무엇이던가를 아동들에게 분명하게 말하기를 요구하고 그들의 교실의 다른 아동들에 대해서 반복패턴을 기술하도록 하는 적당한 방법으로 그것들에 대해서 이야기 함으로 가능하다. 더 나아가는 활동은 그들의 반복단위에 의해서 패턴을 비교하고 그 정의한 단위를 한 단계 한 단계 사려 깊게 변경함으로써 패턴을 대량으로 만드는 것이다. 이러한 야심에 도움이 되는 활동들에 대한 다른 제안은 매체 사이에 설명을 포함한다.

반복패턴들을 만드는 일상적인 활동 같지 않게, 이러한 활동들은 올바른 방법으로 패턴을 보는데 의존하고, 리듬적 접근은 충분하지 않을 것이다. 적당한 방법으로 처음에 패턴을 보지 않았던 아동들은 교사에 의해서 도움을 받아야 할 필요가 있을 것이다. 그러나 때로는 모든 아동들은 반복단위의 인식의 발달로서 그들 자신에 이런 일들을 할 수 있게 되어야 한다. 패턴의 조작을 포함한 활동은 도와주지 않은 채 행해질 때, 반복패턴에서 패턴의 단위를 보는 능력에 대한 서술의 형태로 보여 질 수 있다.

Ⅲ. 짝수와 홀수에 대한 인식

여러 나라의 수학교육과정에서 짝수, 홀수를 교수-학습에서 언급하는 것을 볼 수 있다. 왜 이러한 특별한 수가 배수를 포함한 다른 형태의 수들 보다 우선적으로 특별히 다루도록 선발되었는가 하는 것은 거의 언급되지 않는다. 하나의 이유는 그리스시대 아마 더 오래 전부터 수학 발전의 오랜 역사를 홀수와 짝수가 가지고 있기 때문이다. 그러나 아동들이 어떻게 짝수와 홀수를 인식하고 그들이 다른 내용을 이해하는지 알려져 있는 것이 별로 없다.

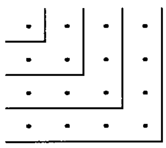
- 모든 자연수는 짝수, 홀수 중의 하나이다
- 일의 자리수가 홀수 혹은 짝수인 것은 자리수의 개수에 관계없이 한 수가 짝수 또는 홀 수인가를 결정하는데 사용 될 수 있다.
- 숫자 0은 짝수로 생각할 수 있다.

이 장에서는 짝수 홀수의 간단한 역사를 쓰고 아동들이 수학수업시간에 그 수를 어떻게 기술하고 위의 세 가지 사실에 대해서 연구자들은 어떻게 다루고 있는가를 생각해 보려고 한다.

1. 짝수, 홀수의 간단한 역사

Smith는 '짝수와 홀수의 구별은 산수적 과학의 가장 오래 된 현상들 중의 하나이다' 하고,짝수, 홀수의

구별에 관한 가장 처음 기록된 것 중에 하나가 BC1150에 쓰여진 것으로 믿어지는 'I-왕'으로 알려져 있다. 중국의 신화에 홀수는 흰색, 낮, 일, 태양, 짝수는 추위, 밤, 땅을 상징했다. 그리스사람들은, 그들의 수학에서 주관심은 기하였는데 다각수라 불리우는 기하학적 형태로 수를 표현했다. 그래서 재미있는 성질은 1에서 시작하여 연속된 홀수들의 합은 항상 제곱수이다라는 것이다.



(그림3-1)

그림 3-1은 네 번째 제곱수에 대한 이 성질을 나타내는 것이며, 처음 네 개의 홀수의 합은 제곱수인 것이다. 즉 $1+3+5+7=4^2$. Euclid는 기하학원론에서 수의 정의를 준비했고, 그것을 짝수와 홀수로 확장했다.

이것을 요약하면

- 짝수는 두 개의 같은 부분으로 나눌 수 있다.
- 홀수는 두 개의 같은 부분으로 나누어지지 않거나 짝수와 하나 차이가 난다.(Smith 1958)

짝수와 홀수의 정의는 앞으로 시도해 볼 만한 가치가 있다. (특히 수의 두 가지 부류를 아동들에게 소개할 때 쓰이는 방법과 관련해서) 유크리드 정의는 자연수를 두 개의 같은 부분으로 나누는 분할을 포함한다.

이것은 수 6에서 아래 그림3-2이다.

(그림3-2)

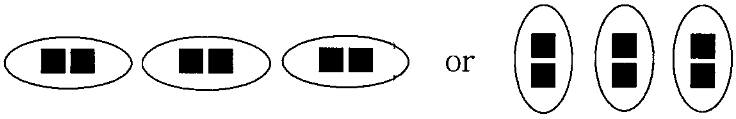
홀수정의의 처음부분은 짝수정의와는 독립적임을 나타낸다. 두 번째 정의는 짝수와 관련된다. 홀수는 짝수에서 1빼어서 된다는 사실을 보면서, 모든 짝수는 두 개의 홀수에서 1차이가 난다는 것처럼, 많은 곳에서 이것은 정의로 간주하지 않고 짝수와 홀수의 정의를 이끌어 오는 것이 관례이다.

짝수와 홀수는 수학자들이 연구함으로 나타나고 그것은 어린이들에 의해서 곧 인식된다는 것이 중요하다. 다양하게 접근하는 모습들이 가능하고 다양한 접근 모습들이 여기 제시되고 이 접근 능력을 발전시키는데 목적 있다.

2. 짝수 홀수에 대한 교수

매우 어린 아동들도 짝수와 홀수에 대한 그들 자신의 의미를 세울 수 있다. Charke and Attinson(1996 p54)은 6살 아동의 정사각형을 사용할 때 예를 든다.

교사는 아동에게 한 쌍의 정사각형 둘레에 원을 그리도록 제시하고 아동은 반응하기를

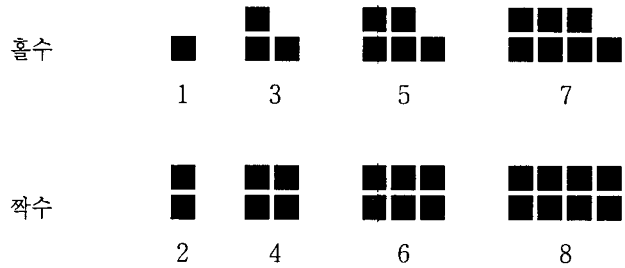


(그림3-3)

나는 당신이 나에게 그림 둘레에 원을 그리게 했기 때문에 어떤 것이 홀수이고 짝수인지를 이제 안다. 두 개씩 나누어서 남는 것이 없으면 짝수이고 나는 두 개씩 헤아려서 안다.

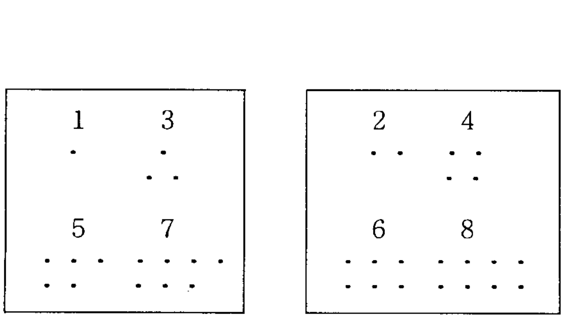
교사가 아동에게 주는 정의는 Euclid가 말한 정의는 아니다. 그러나 그것과는 같은 것이다. 여기에 위험이 있다. 아동이 좀 더 나은 다음 단계에서 짝수 홀수를 알아내는데 양자택일 규칙이나 알고리즘적 접근으로 나타나고 그림을 그리기 전에 그가 겪은 경험과 새로운 접근이 같다는 것을 이해하지 못하는 그러한 위험이 있다. 만약 어떤 수가 2개씩의 집합으로 똑같이 나누는 수가 짝수라면 그 수가 두 개의 같은 부분들로 나누어질 때는 어떤가? 후자는 Euclid 정의이고 전자는 아동의 것이다.

우리는 아동이 한정된 수에서 관계를 일반화할 수 있다는 증거를 가지고 있다. 그 한정된 수는 가끔 단지 작은 수이고, 큰수에서는 때때로 다르게 행동하는 것으로 믿으며 아동은 일반적으로 짝수와 홀수에 대해서 알고 있다고 결론을 끝내리는 것은 잘못될 수 있다. Caine(1970.9.4)는 짝수와 홀수는 그들의 형태의 의해서 관찰되어야 한다고 제의한다. 만약 우리가 수들을 나타내기 위해 정사각형을 그리는 것을 이용한다면 짝수와 홀수가 나타내는 형태를 보여줄 수 있다.



(그림3-4)

(그림3-4)는 그림은 짝을 지어 정렬된 정사각형으로 만들어지고, 짝수는 직사각형 모양이고 홀수는 더 불규칙적인 모양을 만든다. Caine은 말로써 정의를 제공한다. 정사각형들의 홀수 개는 짝을 지어 정렬할 수 없다.



(그림3-5) 따로 편성된 홀수와 짝수들

1980~1990년 사이 영국 교과서에서 인기 있는 시리즈는 홀수와 짝수를 따로따로 형성하여 동그라미를 사용하여 소개한다는 것이다. (그림3-5)는 이러한 접근을 보여준다.

아동들은 이와 같은 그림으로 표현하기가 소개되기 전에 수를 세거나 연결할 수 있는 장난감을 2개씩 '집합으로 사물을 나누거나 사물들을 2개의 똑같은 두 부분으로 나누어서 전에 언급한 어려운 관계를 수립하려는 기회가 정상적으로 주어진다. 이와 같은 활동들은 '2개로 똑같이 나누어지는가? 그리고 2개로 똑같이 나누었으되 1개가 남는다'라는 개념을 발전시키는데 유도되어진다. 그것은 유클리드의 홀수와 짝수의 정의를 반영한다.

교사들은 종종 1~9사이의 수만으로 아동들이 홀수와 짝수의 개념을 안다고 믿지만 1992년 행해진 한 조사에서 많은 수의 학생들이 그렇지 못하다는 것이 입증되었다. 이 조사에서 아동들이 10이상의 숫자들이 홀 짝수의 구별에 맞지 않는 규칙들을 쓴다고 증거를 제시했으나 아래와 같은 취약점이 조사 상 발생되었다.

- 이 조사는 실제로 아동들의 추론과정을 밝히지 못했고, 답을 맞출 기회가 50:50 이었다.(사실 아동들은 추측하도록 유도되었고, 주어진 수들이 짝수이거나 홀수라는 것 이외의 어떠한 결정도 할 기회가 없었다)
- 이 조사를 위해 선택되어진 수의 개수는 인터뷰 조사 형식 때문에 아동들이 여러 가지 행동을 보일만한 숫자를 뺀 0~100까지의 수를 사용했음에도 불구하고 한정되어 있었다.
- 7세 아동들만이 조사에 참여했기 때문에 다른 나이의 아동들이 반응에는 결론을 내릴 수 없었다. 다른 종류의 방법을 사용하는 실험적 조사에 대한 연구를 함으로서 위의 문제들 또한 해결 될 것이다.

3. 실험적 조사

앞서와 같은 예비적인 조사 후에 좀더 깊은 조사가 5~11세 사이의 아동들에게 행해졌다.일정한 수준을 가지고 있다고 생각되는 아동들의 수학의 성취도를 반영하기 위해 3개의 학교가 선택되었다. 각각 아동들은 0~99까지 마구잡이로 고른 수들에 5개중 1개를 선택하게 하였다. '선택1은 홀수. 선택2는 짝수. 선택3은 짝수로 홀수도 아니다. 선택4는 짝수로 홀수로 된다. 그리고 마지막은 모른다'였다. 이런 방식으로 홀수 아니면 짝수라는 오직 두 개만의 가능성을 제사하는 문제점을 극복하고자 했다. 그리고 이런 방식은 성공적으로 아동들이 홀수 아니면 짝수이외의 다른 선택들을 했다. 아동들에게 시간제한은 하지 않았고, 조사가 끝난 후 아동들이 제시한 답의 이유를 물었다. 1.3.4.5.학년 학생들은 모두 비슷한 양상을 보였고, 특정한 숫자에 대해서는 학년이 올라 갈수록 정답률이 높았다.

일의자리수 / 십의자리수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	32	64	56	59	60	59	59	63	60	55
1	48	59	41	55	43	52	48	63	48	55
2	47	40	51	47	54	45	51	49	51	56
3	36	59	34	59	40	51	41	62	39	56
4	37	51	49	51	48	51	48	49	45	48
5	34	58	41	60	41	52	37	55	38	55
6	52	49	34	47	49	44	52	53	45	51
7	33	59	52	52	37	59	44	58	41	67
8	38	51	51	53	48	44	52	48	52	52
9	29	59	43	59	36	62	39	51	43	67

<도표3-1> 2학년 학생들의 정답 비율

가. 한자리수(1~9)

한자리수(1~9)들에 대한 답이 아동들이 그보다 큰 수에 대해서 어떻게 반응하는가를 아는데 사용된다. 1에서 9까지 숫자들에 대한 각 학년의 이해도는 (도표3-2)에서 알 수 있다.(같은 학년 학생들 사이에서는 많은 변화가 없이 비슷했다.)

일의자리수 / 십의자리수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	47	84	84	83	84	86	86	87	86	91
1	84	82	82	82	78	84	79	85	76	85
2	86	47	88	71	86	69	84	69	81	69
3	71	80	72	81	70	81	74	86	68	80
4	87	68	82	69	79	70	83	75	86	76
5	74	85	69	86	71	76	70	81	66	84
6	79	79	83	65	80	67	82	75	82	71
7	67	84	67	84	71	80	68	82	64	85
8	84	69	84	67	83	62	87	72	84	66
9	67	88	68	82	62	78	69	86	68	85

<도표3-2> 6학년 학생들의 정답비율

모든 학년에서 이해도가 실망스러울 정도로 낮았다. 앞에서 말했듯이 홀수와 짝수는 5학년 단계의 교과과정에서부터 등장하지만, 6학년 학생들은 오직 86%만이 한자리수에서 홀수와 짝수의 성질을 확실히 말할 수 있었다. 만일 아동들이 10의 배수가 아닌 큰 숫자들의 짝수, 홀수를 구별하는 것은 절대적으로 필요하다. 이번 실험 학생들 중 많은 아동들은 그것을 알지 못했다. 어쨌든 아동 때 한자리수의 성격들을 사용하지 않고 수를 2로 오직 나눌 수 있는가, 없는 가로 홀수와 짝수를 가리는 것도 가능하다. 하지만 이러한 접근방식은 간단한 방법을 사용하는 것보다 훨씬 많은 것을 요구한다. 아동들은 한자리수의 결정을 위해 많은 종류의 방법을 사용했다는 것을 알 수 있다.

어떤 A아동의(2학년) 홀・짝・홀・짝・…이라는 진행에 기초를 둔 공식을 만들었다. 7이라는 숫자를 제시했을 때 그는 손가락으로 홀・짝 진행을 7까지 했다. 이렇게 해서 그는 7이 홀수라는 것을 말한다. 그에게 58을 보여주며 그는 ' 나는 8만 계산한다.' 그는 50을 무시하고 왜 무시했는지 설명할 수 없었다.

B아동(5학년)은 4와 7이란 숫자를 2단(구구단) 연관시켰다. 그녀는 왜 7이 홀수냐고 묻자 그녀는 7은 2단의 수가 아니기 때문이라고 했다.

C아동(5학년)은 7이라는 숫자에 제외라는 방식을 적용했다. 그녀는 답은 0,2,4,6,8 은 짝수이고 7은 그 안에 없으므로 홀수이다.

D아동(4학년)은 유클리드 짝수의 개념은 사용했다. 그는 4는 2사람에게 나누어 각각 2개씩 갖는다라고 말했다. 7을 제시했을 때 1,3,5,7은 2개로 나눌 수 없다고 했다. 그는 결론에 덧붙여 '2,4,6,8은 짝수이고 7은 이중에 없으므로 홀수라고 추론할 수 있다'라고 말했다.

나. 수 0

앞의 조사에서 숫자 0은 7살 아동 중 45%가 짝수라고 했다. 오직 짝수와 홀수라는 2가지 선택밖에 제공되지 않았으므로 믿을 수 없는 통계이다. 그러나 후에 실시한 5개 선택 사항에서는 23%이었다. 0이짝수라고 제대로 맞추는 비율은 나이가 많아질수록 높아지거나 하지 않았다. 대략 3~6학년 학생 중 2명중 1명 꼴로 0이 짝수라고 바르게 말했다. 그리고 모든 학년에서 5명중 1명 이상은 0은 홀수라고 말했다. 0은 모든 방면에서 아동들에게 어려움을 주는 숫자로 알려져 있다. 0이 국내 수학교육과정에서 특별히 취급되

지는 않지만 아동들은 숫자의 뜻과 가치를 이해하는 과정에서 은연중에 익히도록 요구된다. 어째든 11세 미만의 아동들이 0을 2로 나누거나 하는 일이 거의 없기 때문에 그들은 홀수냐 짝수이냐 만을 결정 하면 된다. 0은 여러 가지 방법으로 묘사되었다.(예를 들어 영, 공…등) 0을 어떻게 부르는가에 따라 아동들이 그것에 대해 어떻게 생각하느냐에 영향을 기치는 것처럼 보였다. 수를 셀 때 제일 처음 세니까 홀수라고 보기로 하고, 또 2단을 이용하여 2단은 0 2 4 6 8로 하기 때문에 짝수라고도 대답한다.

다. 10의 배수

모든 10의 배수의 시작은 0이다. 1~9사이 숫자의 짝수와 홀수의 성질에 대한 지식은 10의 배수가 짝수인지 홀수인지를 알아보는데는 도움이 되지 못한다. 만일 아동이 모든 10의 배수가 짝수라는 것을 모를 때는 2가지 방법을 사용하여 가르칠 수 있다. 첫째는 0이 짝수라는 사실을 이용하는 것이고, 둘째는 10의 배수가 나머지가 있는지를 알아보기 위해서 2로 나눈다는 것이다. A(2학년)는 자신 있게 '9는 무시하고 0만 보면 0이 홀수이니까 90은 홀수이다.' 하고 대답했다. 그는 왜 9를 무시했는지 설명하지 못했고, 비록 0의 의미를 잘못 이해했으나 일의 자리의 숫자를 보고 판단한다는 것은 알고 있었다.

B(4학년)는 90은 0이니까 아무도 어떤 것을 가질 수 없다고 말하고 '9는 세지 않는다.' 라고 덧붙였다. 또 60도 똑같은 방식으로 일의 자리 즉 0에 되풀이했다.

한 연구에서는 7세 아동들이 10이 짝수라는 것을 인지할 수 있다는 것을 시사했고, 20, 40, 80 등 짝수의 배수들은 30, 50, 70, 90 같은 홀수의 배수보다 훨씬 쉽게 익힌다는 사실도 암시했다. 후에 행해진 연구에서는 10을 제외한 10의 홀수배수에서 상대적으로 잘 알지 못한 것은 그 다음 학년에서도 똑같은 상태가 지속된다는 것을 확인했다.

2학년 학생들 사이에서 10의 배수에 대한 이해도는 이전에 행하여진 조사와는 상당한 차이가 있다. C(4학년)는 60은 짝수라고 매우 빨리 답하고, 그는 짝수가 2, 4, 6이니까 0을 무시하고 십 자리에 있는 6에 초점을 맞추었다고 했다. 후에 그는 90이 홀수라고 했고 짝수는 2, 4, 6, 8하고 올라가니까 80은 짝수라고 했다. 여기서 C는 0은 무시하고 십 자리 수만 보았다.

라. 다른 특징을 가진 일의 자리 수보다 더 큰 십의 자리 수

한 연구에서 72와 87이 이용되었는데 마치 두 수에서 큰 수인 십의 자리수의 특징에 의해 아동들은 영향을 받는다고 제시했다. 이 부분에서 20개의 숫자의 집합은 짝수의 10의 자리 수와 10개의 홀수의 일의 수와 홀수의 십의 자리 수와 짝수의 일의 자리수로 분할되었다. 72와 87에서는 낮은 실력을 나타낸다. 그리고 일의 자리보다 십의 자리수가 더 클 때 그 수가 홀수일 때 아동들의 결정에 더 적게 영향을 미친다. 10%는 짝수일 때 홀수를 택하고 홀수일 때는 짝수를 선택한다. 이런 아동들은 이내 십의 자리수의 특징을 이용한 것이다. 15% 아동은 54와 같은 수는 짝수이며 홀수라고 결정한다. 어떤 아동은 63은 60은 짝수, 3은 홀수이므로 63은 짝수이고 홀수라고 결정했다. 이것은 아동들이 어떻게 생각하는지에 좋은 예이다. 십의 자리 수와 일의 자리수가 다를 때, 아동들이 짝수의 십의 자리수가 홀수의 일의 자리 수보다 작은 경우 가장 성공적이고 십의 자리가 홀수이고 짝수인 일의 자리 수보다 클 때 가장 덜 성공적이다. 이런 형태는 6살 아동에 걸쳐서 나타난다. 어떤 아동들한테서는 일의 자리의 홀수의 특징이 십의 자리수의 짝수의 특징보다 좀 더 적게 나타난다. 왜 이렇게 되는가는 설명하기 어렵다.

초등학교 아동들이 평균적으로 한자리수에서의 짝 · 홀수 판단의 통과율이 85%의 범위인 것으로 나타나고 다시 말하면 적어도 6살의 초등 학생 중 열에 하나는 한자리 이상 되는 수에서 일의 자리 수를 적용시키는 규칙을 적용하는 지식을 알지 못했다.

Ⅳ. 덧셈 학습에서의 패턴들

수 계산 수준에서는 수의 사칙연산을 완전하게 수행할 것을 요구한다. 수를 조작하여 이익을 보려는 마음에서 수를 배우는 것이다. 예를 들어 7+8, 9-4, 3×4, 8÷2 이러한 계산의 답을 아는 것이나 계산은 오랫동안 생각하지 않는다. 정상적인 교육의 출발에서는 아동들은 수에 대해서 아는 것이 별로 없다. 그들은 2+3, 4-3 답을 헤아리거나 계산해서 답한다. 그러한 지식 획득은 아동들이 더 많은 자신감을 갖고 또한 수학적 사고를 가지고 그것들을 대하게 된다고 확신한다.

이 장은 숫자 체계의 구조를 고려하고 왜 수 패턴이 존재하는지 그리고 아동들이 덧셈지식을 발전시키는 데 그것이 기여하는지를 제시하면서 시작한다. 우리는 덧셈지식이 초등학생들에게 어떻게 발전되는지 그 증거를 조사한다. 이 과정은 자연스러워서 주목할 만하다. 곱셈과 달리 학교에서 덧셈을 기억하기 위해 아동들의 협조된 노력이 거의 들지 않는다. 그러므로 과정에서 생기는 수단이 근래 실행하는 것보다 더 강하게 탐구하려는 잠재력을 가진 아동들의 인식론적 경향과 힘의 반영으로 보일지 모른다. 우리는 어떤 유형들이 덧셈계산을 하는데 도입되어야 하는지, 그 접근이 어떻게 발전될 수 있는지에 대해 계속해서 고려해 보아야 한다.

1. 숫자체계의 구조

숫자들 사이의 관계는 수 체계의 기초를 이루는 구조 때문에 존재한다. 숫자들의 유형 관찰도 그런 관계를 표시한다. 현재 전 세계적으로 쓰이는 아라비아 숫자 체계에서 우리는 관계를 조사하고, 그 구조들의 결과인 수 표기에 있어서 패턴들을 관찰하는 좋은 본보기이다.

숫자의 덧셈과 그것의 역은 뺄셈의 기법을 적용하는 것으로부터 나온 결과는 아주 재미있는 생각을 불러일으킨다. 즉 덧셈의 교환법칙, 결합법칙, 덧셈의 역인 뺄셈사이의 관계이다. 많은 아동들은 이 세 가지를 직관적으로 알아내고, 숫자들을 더하는데 사용할 때 그것들을 성공적으로 적용한다는 증거가 명백해진다. 이런 관계들은 그것들이 어떻게 표현이 되든 숫자들에 적용된다. 그러나 아라비아 숫자의 체계에서는 표현의 체계는 그것들 자체가 유형으로써 명백하게 나타나는 더 많은 관계가 생기게 된다. 다른 숫자체계와 별개로 그것의 수 체계 본질은 그것이 덧셈과 곱셈에서 10개씩 단위로 모아져서 결합되어있는 것이다.

집합적 단위로서 10에 대한 수적인 특별한 이유는 없다. 그것은 우리 두 손의 손가락에서 나온 것이다. 그러나 10이 사용되는 사실은 마음속으로 계산하는데 중요한 역할을 하는 10의 두 약수 2와 5를 가지고 있기 때문이다. 9이상의 숫자들은 그 체계의 규칙들에 따라 결합된 10개의 숫자를 두 개 이상 요구하는 첫 번째 숫자가 10이다. 한 자리에 가치를 주어서 위치를 이용하는 것은 (그림4-1) 와 같이 각 한 자리 수는 십의 자리 수와 같은 수로 배치시키고 일의 자리는 0을 포기하는 매우 유용한 패턴을 가져온다. 이것은 10의 배수의 덧셈에 유용하다. 20+50은 2+5와 같이 계산하기 때문에 서로 다른 자리의 숫자들을 더하는 것으로 오직 단위만 다를 뿐이다.

1	↔	10
2	↔	20
3	↔	30
…		…
9	↔	90

(그림4-1)

그래서 이 생각은 자연스럽게 수 체계의 다른 배수들에 확장된다. 그래서 아동들이 한 자리수의 덧셈을 잘 구사하고 또한 그 체계를 이해했다면 그들은 쉽게 10, 100, 1000등의 배수들의 덧셈에 대해서 그들의 지식을 전이할 수 있다. 아동들이 오직 어떤 숫자를 더하기 위해서 알아야 할 유일한 다른 지식은 한 숫자를 어떻게 나누는가 이다. 예를 들면 27=20+7 그리고 만약 덧셈을 한 것이 10보다 크거나 같으면 덧셈이 일어나는 그곳에서 따로 두고 무엇인가 해야 할 것이다. 자리들의 합이 10보다 클 때 그 체계의 이해는 답을 구하는 가능한 전략을 제시하는 데 매우 유용하다. 예를 들어 한 자리수의 합이 10이 되는 경우는 합이 10이 넘는 덧셈을 하기 위한 전략을 발전시키는데 가끔 아동들이 사용된다. 그래서 9+1=10또는 10-1=9를 이용 9+8=(10-1)+8=10+8-1=17. 이러한 변형은 다음을 기반으로 한다.

① '하나 많다', 그리고 '하나 적다' 의 관계에 대한 지식과 두 수에 대한 지식

② 10+8을 18이라고 삼는 수 체계에서 수를 표현하는 방법을 이해하는 것을 포함하여, 단위수 10의 역할 이해하기

이러한 종류의 전략은 제법 덧셈의 암기해야 할 부분을 줄인다. 그리고 더 큰 숫자들을 더하고 뺄 수 있는 전략을 발전시킬 수 있게 한다. 그것은 그것들이 수 체계내의 관계에 대한 지식을 기본으로 하고 있다는 것을 보여 줄 수 있다. 그 관계들은 관찰하기 쉬운 패턴의 연구를 통해서 명백해지고, 패턴들을 초래했던 수 체계 내의 구조가 반영될 때 우리에게 이해되고 이용할 수 있다. 어느 정도에는 이 과정을 아동들이 계산한 방법을 배울 때 자연스럽게 발생하는 것으로 보인다. 그러나 패턴들이 명백하게 드러난 구조적 관계에 대한 토의에 초점을 둔 교수를 통해서 수리능력을 신장시키는데 순수한 잠재력이 있는 것 같다.

2. 초등학생의 덧셈의 발전

아동들이 수 계산하는 방법들은 조사하는데는 두 가지 중요한 접근법이 있다. 첫째는 시도했던 아동들과 그들이 실제 계산하려는 동안 그 이전에 사용한 도구들에 대해 이야기 나누고 인터뷰해서 손가락을 이용하거나 다른 계산할 때 사용을 발견하기 위해 관찰한 것과 결합시키는 것이고 둘째는 시간 측정에 의해서 아동들이 계산하는데 지연된 시간 등을 연구하는 것이다. 한자리 덧셈에 초점을 맞추어 두 가지 접근을 사용한 연구를 포함하는, 덧셈 지식의 정상적인 발전의 양을 두 가지 종류의 문헌으로부터 증거가 제시된다.(Threffall 1995) 우선 아동들은 덧셈할 때 헤아리는 절차를 사용한다. 그러나 헤아리는 절차 내에서 사실에서 사실로 변화할 때 아동들마다 채택하는 3가지 다른 전략이 있다. Baroody와 Giusburg(1986)은 이런 것들을 처음부터 모든 것을 헤아리는 것(CAF), 처음 가수부터 헤아리는 것(COF), 그리고 큰 수에서부터 헤아리는 것(COL)을 언급한다. 4+9의 덧셈에 이용하는 예가 있다.

CAF : 1부터 모든 것을 헤아리는 것 : 1, 2, 3, … , 13 (13단계)

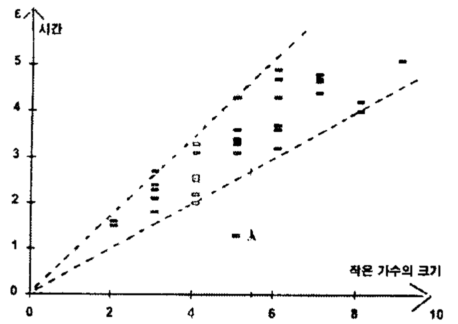
COF : 첫 번째 가수부터 헤아리는 것 : 5, 6, 7, … , 13 (9단계)

COL : 가장 큰 가수부터 헤아리는 것 : 10, 11, 12, 13 (4단계)

본 전략으로 불리는 COL전략은 Ginsburg(1977)에 의해 알려졌고 아동들에게 널리 사용된다. Siegler는 본 전략이 5~6세 아동들에게 실제로 학교에서 뚜렷이 가르쳐지지 않을지라도 대부분 아동들에 의해 채택된다는 사실을 믿었다. Gray(1991)는 완전한 CAF대신 COL와 COL 둘 중 하나를 이용하는 것은 평균이상인 아이는 7살까지이고 대부분 평균이하 아동들은 10살까지 되는 것을 발견했다.

어떤 아동들에 의해 숫자 헤아리는 전략에 대한 명백한 논증은 개별적인 질문에 대답하는 반응시간의 조사가 가수의 크기에 대하여 계획될 때 주어진다. 한가지 도표가 (그림4-2)에 보여져 있다.

각 그래프의 점은 아동들이 대답한 사실을 표시한다. 가로축은 둘 중 작은 가수의 크기 (4+9에서 4, 7+5에서 5)로 점을 이어 곡선이 그려져 있다. 이것은 예를 들어 수직선의 4눈금에 표시된 점은 4가 가장 적은 가수로 대답되 있던 질문 즉 4+5, 4+7, 8+4, 4+8, 9+4 등을 모두 의미한다.



(그림4-2) 10세의 덧셈 질문에 대답한 시간을 가장 작은 가수에 따라 곡선을 그린 것.

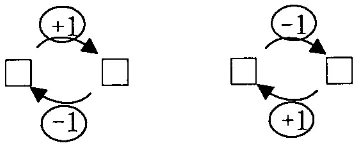
(그림4-2)는 어떤 아동W가 응답한 시간을 보여준다. 도표는 왼쪽 바닥에서 오른쪽 꼭대기까지 일련의 점들이 뚜렷이 경사를 띈다. 가장 작은 가수의 크기가 클수록 응답하는데 걸리는 시간이 많이 든다는 것을 보여준다. 이런 경사는 두 가지를 강하게 나타낸다. 첫째 W는 그 질문에 답을 찾기 위해 헤아렸다. 수를 헤아리는 각 단계에 따라 일정 양의 시간이 결렸기 때문에 더 높은 단계는 더 많은 시간이 처리하는데 걸렸다. 둘째 W는 COL전략을 이용했다. 더 작은 가수의 크기에 직접적으로 비례하기 때문이다. 만약 W가 CAF나 COF전략을 이용했다면 시간은 가장 작은 가수의 크기에 비례하지 않았을 것이다. 예를 들어 만약 COF전략이 쓰여졌다면 2+9에 걸리는 시간은 9+2보다 더 걸렸을 것이다. 실제로 그들은 거의 같다. 응답시간을 재는 것은 초등학생 연령의 아동들에게 공통적이다. 셈하기 전략이 과도하게 아동들에게 의해 쓰여진다는 증거가 있는 곳조차도 몇 몇 개의 덧셈에서는 기억해서 답하는 것을 발견하는 것은 드물지 않다. 이것을 위한 대부분의 증거는 있다. 그러나 보충할 증거는 알려지지 않는 연구들에서 알 수 있다. 예를 들어 그림(4-3)에서 W아이의 도표에서 COL추세에서 한 가지 예외가 있다. 경사에서 멀리 떨어져 있는 A지점은 W가 5보다 더 작은 가수인 다른 사실들 보다 훨씬 더 빨리 대답한 5+5의 답하는데 주어진 시간이다. W는 5+5의 답을 알았다고 답했다.

유도 전략에 의한 덧셈계산법은 교사들이 보통 알고 있는 보다 더 널리 아동들이 쓰고 있다. Gray 보고서에서 2학급의 교사는 숨겨진 계산법을 사용하는 아동들과 답을 알거나 유도해내는 아동들을 구별하지 못했다. 확신을 가지고 있는 아동들과 인터뷰에서 다른 두 수의 합을 구하는 데 제일 먼저 하는 것 중에서 유도되는 범위가 5+6, 6+5 라는 사실은 주목할 만하다. 5+6의 덧셈에서 5+5는 10이고 만약 5중의 하나에 1을 더하면 11이 된다는 것을 안다. 이 아동들은 이전부터 유도전략을 사용한 자연스러운 방법을 통해 새로운 덧셈법을 알 수 있다는 것을 말해준다. 이것을 사용함으로서 유도법은 점점 더 자연스럽고 빠르며, 계산과정에 있어 명백히 계산하지 않고 답을 구하는 중심단계가 된다. 그래서 결국 유도법은 의식적으로 기억하지 않는 효과적인 '즉각회상'이라 말할 수 있다.

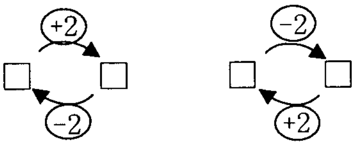
3. 패턴을 통한 유도전략의 교수

만약 아동들이 알고 있는 셈으로 회상이나 유도된 셈을 통해서 덧셈의 지식을 발전하려면 주어진 어떤

수에서 1과 2를 더하고 빼기를 정확하고 빨리 할 수 있는 것이 필수적이다. 이 지식은 '하나 더 많기'와 '하나 더 작기'와 관련된 수체계에 있어서 수 헤아림의 배치에 기인
한다.



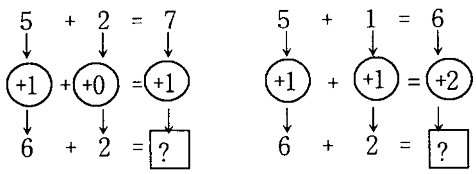
(그림4-3)



(그림4-4)

(그림4-3), (그림4-4)는 머릿속에서 그림을 만드는 준비행위로서 계산하는 아동들에게 유용하다. 아동들은 왼쪽상자에 수를 적고 오른쪽 상자에 들어갈 수 있는 수를 계산한다. 이것은 2를 더하고 빼는 것으로 확장이다.

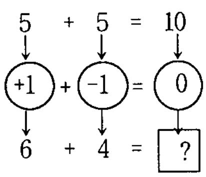
각각의 그림은 덧셈의 역인 뺄셈을 자연스럽게 설명한다.



(그림4-5)

(그림4-5)는 어떻게 6+2의 답이 알고 있는 5+2=7, 5+1=6으로부터 얻어질 수 있는 가를 제시한다. 전략표는 아동들이 알고 있는 다양한 덧셈계산을 사용한 덧셈계산의 답을 얻는데 다른 전략들을 탐구할 기회를 제공한다. 아동들은 다른 덧셈계산 사이의 관계와 패턴을 볼 수 있을 뿐 아니라, 수를 연산하는데 정신적 모형으로 발전시키는데 도움을 주는 시각적 기준을 제공받는다.

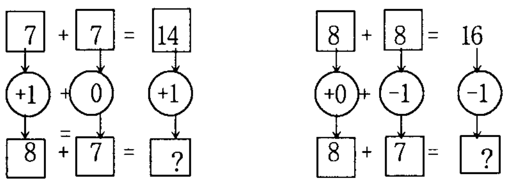
수 덧셈에서 합이 10인 수의 계산은 받아올림이 있는 계산으로 가기 위해 필수적이다. 합이 10이라는 더하기와 관련된 형식의 사용기술을 이해하고 발전하기 위해 아동들이 10이 되는 덧셈계산의 지식과 예를 들어 7+3=10과 10=7+3과 같이 두수의 합이 10이 되는 형식의 기술을 증진시키는 것은 중요하다.



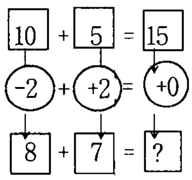
(그림4-6)

(그림4-6) 는 알고 있는 5+5=10을 이용해 6+4의 답을 찾는 개념표를 보여준다. 10을 초과하는 답의 단위 숫자들의 더하기 개념은 아동들이 한자리수가 더해져 10이 될 때 얻어지는 형식을 생각하고 이해하고 알아낸다는 점을 지적한다. 아동들이 10+4는 두 자리수 14의 형태로 적혀지는 덧셈을 안다고 여겨지지 않는다. 덧셈의 이 기술 방법은 수체계에 기반을 둔 10진수의 영역이다.

유사성이나 수체계 이해의 발전 결과로서 아동들이 알게 되는 패턴의 종류들은 5와 10을 이용한 형식들을 포함한다. 이러한 형식들을 아는 것은 어떤 덧셈의 치식을 직접적으로 증가시키지만 다른 지식은 이미 알고 있는 지식과 더불어 다음 3가지 수반되는 전략 중 하나를 사용함으로 유도되어진다.



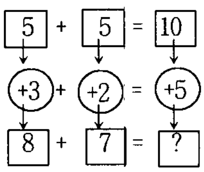
(그림4-7)



(그림4-8)

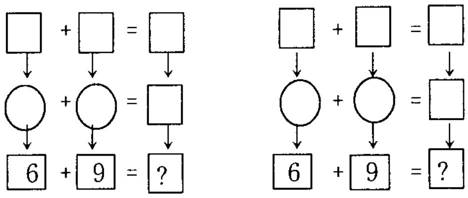
다음 계산들은 ① 예를 들어 8+7이 7+7보다 하나 더 많다(또는 8+8보다 하나 적다)는 알고 있는 계산과 연관되어 깨달아 진다. 이것은 (그림4-7)에서처럼 표를 이용하면 더 알기 쉽다. ② 예를 들어 8+7과 같이 가수들 사이의 동등한 형태의 다음 변화는 10(빼기 2)+5(더하기 2)와 같다. (그림4-8)표는 이것을 나타낸다. ③ 8+7은 5+3과 5+2와 같이 보통 5나 10주변으로 가수들을 세분화 한 다음 5+5와 3+2로 재 정렬되는 상호교환과 결합법칙을 사용한다.

(그림4-9)은 접근법을 전략표로서 보여준다.



(그림4-9)

이러한 전략들은 또한 분할과 동치의 원리 그리고 분해, 재 정렬, 합성을 학생 스스로 학습하게 하는 법칙을 이용하는데 이것들은 일반적으로 수학학습을 통한 응용가능성을 가지고 있다. 많은 계산법은 이 방법들에 의해 해결되고, 아마도 습득한 패턴에 의존했을 때도 여러 가지 경우에 다른 전략들을 이용하도록 충분히 융통성을 보이는 것이 아마 더 유리할 것이다.



(그림 4-10)

아동들은 (그림4-10)에서 보여지는 6+9의 계산과 같은 것처럼 덧셈계산의 유도를 한 다른 개념을 이용하는 체험을 할 기회를 받을 것이다. 그들이 알고 있는 6+9의 답을 유도하는 계산을 선택해 표를 완성할 것이다. 이것은 먼저 서술된 모든 덧셈 계산을 유도하기에 충분한 몇 개의 형식의 계산지식과 함께 한 세 가지 개념은 - 알고 있는 계산을 깨닫고 적용하는 것, 가수들 사이에서 같은 형태로 바꾸는 것 , 그리고 다루기 쉬운 부분으로 가수를 세분화하는 것 -을 나타낸다. 그러나 이것은 아동들이 주어진 덧셈계산을 위해 찾아낸 가장 적당한 개념 어느 것이나 사용하는 것은 방해하지 않는다. 아동들의 어느 개념을 더 좋아할 지는 아직 알려지지 않았다.

V. 결 론

본 논문에서는 반복패턴, 짝·홀수의 인식, 덧셈의 학습에서 패턴들에 대해서 조사하였다. 반복패턴에 대한 작업은 심미적으로 기쁘게 하는 결과를 가져오게 하고 교사가 수학적 인식을 가져오게 하는 가치 있는 내용을 제공하는 보람있는 활동이 될 수 있다. 그러나 실현될 수 있고 대수 배우기 전 단계에서 그것의 비교적 높은 상태로 평가받을 가치가 있는 수학적 잠재력에 대해서 아동들의 반복패턴 인식과 그것을 고찰하는 것에 아동들의 접근은 자유자재로 하는 것의 하나로 발전 될 필요가 있으며, 거기에는 반복 단위가 보이고 패턴의 부분과 부분들에 합성으로서 처리 될 수 있다. 수학에서 많은 다른 경우처럼 반복패턴에 절차상의 접근은 상대적으로 빨리 짧은 기간동안에 성공을 가져올 수 있지만 다음 발전에는 한계가 있다. 반복패턴들의 수학적 발전의 잠재성은 만약 반복패턴 작업이 단지 그들이 '인식하고 만들어질 때' 수준 1단계에서 그친다면 충분히 발현되지 않는다. 만약 반복패턴들이 반복단위를 알아서 행하여진다면 잠재성이 발휘된다. -그것은 외면상의 작업완성 된 후 추가적인 작업이 필요하다.

1에서 9까지 수에서 단지 짝수·홀수의 성질을 고려한 것은 아동들에게 분명히 불충분하다. 더 큰 수에 이 지식을 적용할 준비가 되어있지 않다는 것의 분명한 증거가 보인다. 보다 큰 수를 두 개의 같은 집합과 2개씩 묶는 집합으로 분할하는 것은 10의 배수를 넘어서 두 자리 수에 계속되어야 한다. 일의 자리수가 같은 수로 분할하는 패턴들이 아동들이 관계를 찾는데 뒷받침해주는 구체적인 표현은 사용하는데 만들어졌다는 것은 중요하다. 짝수, 홀수의 두 개의 상대적으로 간단한 개념에 나타나는 것은 복잡하지 않고 직접적이지도 않다. 아동들이 수의 크기가 무엇이든지 관계없이 짝수, 홀수에서 패턴을 주시할 수 있도록 하기 위해서 두 개의 같은 집합으로 분할하고 같은 활동으로서 2개씩 된 집합으로 나눈다는 생각으로 발전시키는데 좀더 질적으로 많은 시간이 소요될 필요가 있다.

아동들이 단순한 수 계산을 빠르게 반응할 수 있도록 여러 가지 방법을 가르치는 것이 필요하다. 이것은 아동이 연필이나 종이의 도움 없이 머리로 암산하는 것을 뜻하는 것으로 보통 이해한다. 우리는 아동들이 기계적인 학습이 우리가 아동에게 기대하는 단순한 덧셈과정에서의 상기와 반응을 정확하게 보려는 목적을 결국 이루지 못한다는 것을 안다. 만약 아동이 수체계에서 계산하는 것, 수 사이의 관계를 그리고

결합, 교환, 역연산, 이런 모든 것은 관찰과 수패턴의 응용을 통해서 발전될 수 있는데, 이런 것에 대한 이해와 지식을 가지면 덧셈 능력이 생길 수 있다. 알고 있는 셈에서 덧셈을 계산하는 전략을 발전시키는 데 그러한 지식을 아동들이 처음으로 사용한다고 제시한다. 우리는 수 패턴과 전략표의 도움으로 유도 전략을 배운 아동들이 덧셈유도에서 알게 되고 필요하면 오랜 기억으로부터 직접 생각해 내게하는 사례를 들었다.

우리는 아동들의 덧셈학습의 가속적인 발전을 위해 다음의 교수 순서를 제시한다.

1. 패턴을 공부함으로 수체계의 이해를 발달시킨다.
2. 셈에서 패턴들과 그들 사이의 관계를 주시한다.
3. 전략표를 아동에게 소개한다.
4. 등수의 합과 그들의 패턴을 통해 셈 결과 5와 10이 되는 경우를 배운다.
5. 답을 구하기 위해서 알고 있는 셈을 재정돈하는 전략을 신중하게 발달시킨다.
6. 분할과 동치를 이용하는 전략을 펴고 분석, 재순서, 총합 접근을 발전시킨다.
7. 유도되는 셈과 빨리 헤아리는 셈이 자동적으로 알고 있는 셈이 되도록 아동들에게 덧셈계산의 값을 많이 준다.

본 논문은 덧셈에 초점을 두었다. 그러나, 큰 숫자의 덧셈, 뺄셈, 나눗셈에서 아동들의 정신적으로 작용하는 적응력에 대한 논의도 많은 부분을 차지한다.

참고 문헌

Baroody. A.J. and Ginsburg. H.P (1986). The relationship between initial meaningqul and mechanival knowledge in anithmetin. In J. Hiebert(ed). *Conceptual and Procedural Knowledge : the case of Mathematics*. Hillsdale. NJ : Lawrence Erlbaum.

Caine, P. A. (1970). *Number, Shapes and Patterns*. London : Chatto & Windus

Clarke, S. and AtRinson, S. (1996). *Tracking Significant Achievement in Primary Mathematics*. London : Hodder & Stoughton.

Clemson, D. and Clemson, W. (1994). *Mathematlcs in the Early Years*. London : Routledge.

Dienes, Z. P. (1963). *An Experimental Study of Mathematics Learning*. London : Hutchinson.

Gray, E. M. (1994). Spectram of Performance if two digit addition and Substraction. In J.P, da Ponte and J,F matos(eds). *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3*. Lisbon : University of Lisbon. 25-32.

Rustigian, A. (1976). *The ontogeny of pattern recognition : significance of colour and form in linear pattern recognition among young children*. Unpublished PhD thesis, University of Connecticut.

Sawyer, W. W. (1995). *Prelude to Mathematics*. Harmondsworth : Penguin

Siegler, R. S. and Robinson, M. (1982). The development of numerical understandings. In H.

W. Reese and L. P. Lipsett(eds). *Advances in Child Development and Behavior*, Volume 16. New York : Academic press.

Simon, H. A. (1972). Complexity and the representation of patterned sequences of symbols. *Psychological Review*. 79(5). 369-82.

Smith, D. E. (1958). *History of mathematics*. 2 vols. New York : Dover.

Thorndike, E. L. (1922). *The Psychology of Arithmetic*. New York : Macmillan.

Vitz, P. C. and Todd, T. C. (1971). A model of the perception of simple geometric figures. *Psychological Review*. 78(3). 207-28.

Williams, E. and Shuard, H. (1982). *Primary Mathematics Today*. 3rd eds. Harlow : Longman Group Limited

<Abstract>

A Note on Patterns in the Elementary Mathematics Education.

Kang, Sin po[3)]

This note includes that repeating patterns, knowledge of odd and even numbers, and the patterns in processing and learning addition facts. The potential to mathematical development of repeating patterns is fully realized if the unit of repeat is recognized. Through the partition of numbers greater then 9 into two equal sets and into sets of 2s, It is necessary the teaching of children's knowledge of odd and even numbers. Being taught derivation strategies through patterns in numbers, we suggest that the teaching seguence to accelerate development of children's learning of additions facts.

3) Pusan National University of Education (263 Keoje-1-Dong, Yeonje-Gu, Pusan, 611-736, Korea. Tel: 051-500-7234; Fax: 051-505-4908)