

수직축을 중심으로 회전하는 직관과 정지한 곡관 내부의 발달하는 층류 유동의 유사성에 관한 수치적 연구

이 공 희^{*1}, 백 제 현^{*2}

A Numerical Study on the Similarity of the Developing Laminar Flows between in Orthogonally Rotating Square Duct and Stationary Curved Square Duct

G. H. Lee and J. H. Baek

A numerical study on the similarity of the developing laminar flows between in a straight duct rotating about an axis perpendicular to that of the duct and in a stationary curved duct was carried out. In order to clarify the analogy of two flows, dimensionless parameters $K_{LR} = Re/\sqrt{Ro}$ and Rossby number, Ro , in a rotating straight duct were used as a set corresponding to Dean number, $K_{LC} = Re/\sqrt{\lambda}$, and curvature ratio, λ , in a stationary curved duct. For the large values of Ro and λ , it is shown that the flow field satisfies the 'asymptotic invariance property', that is, there are strong quantitative similarities between the two flows such as flow patterns, friction factors, and maximum axial velocity magnitudes for the same values of K_{LR} and K_{LC} if they are correlated with dimensionless axial distances $Z_R = z/(d\sqrt{Ro})$ for a rotating duct flow and $Z_C = z/(d\sqrt{\lambda})$ for a stationary curved duct flow.

Key Words: 2차 유동(Secondary Flow), 코리올리력(Coriolis Force), 원심력(Centrifugal Force), 덕트 유동(Duct Flow), 층류 유동(Laminar Flow), 발달 유동(Developing Flow)

기호설명 (Nomenclature)	K_{LC}	정지 곡관에서 지배 무차원 변수 또는 Dean수 $= Re/\sqrt{\lambda}$
d 수력 지름	K_{LR}	회전 직관에서 지배 무차원 변수 $= Re/\sqrt{Ro}$
f Fanning 관마찰계수	l	축방향 길이 척도 $= d\sqrt{Ro}$ 또는 $d\sqrt{\lambda}$
f_0 정지 정사각 직관에서 $= 14.23/Re$	p	단면내의 압력
	\bar{p}	단면 평균 압력

* 2000년 11월 6일 접수

^{*1} 학생회원, 포항공과대학교 대학원 기계공학과

^{*2} 정 회 원, 포항공과대학교 기계공학과

p^*	원심력이 포함된 수정 압력 $= p - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (x^2 + z^2)$
R	곡률 반경
Re	Reynolds 수 $= w_m d / \nu$
Ro	Rossby 수 $= w_m / \Omega d$
u, v, w	x, y, z 각 방향의 속도 성분
w_m	평균 속도
Z_R	회전 직관에서 무차원 축방향 거리 $= z / (d\sqrt{Ro})$
Z_C	정지 곡관에서 무차원 축방향 거리 $= R\phi / (d\sqrt{\lambda}) = z / (d\sqrt{\lambda})$

그리스 문자

ρ	유체의 밀도
ν	유체의 점도
λ	곡률비 $= R/d$
Ω	회전각속도

1. 서 론

회전 및 정지관에서의 유동 현상은 터빈 블레이드의 냉각 유로, 원심압축기 회전차, 열교환기 및 냉각 장치 등과 같이 다양한 공학 응용분야에 관련되어 있기 때문에 예전부터 관심있게 연구가 수행되어 왔다. 이러한 실질적인 관심을 받아온 이유중의 하나가 바로 회전 및 곡률의 영향으로 인한 2차 유동 현상이다.

먼저 주유동 방향에 수직인 축을 중심으로 회전하는 직관내의 유동의 경우에 회전에 의한 코리올리력의 영향으로 관 내부에 2차 유동이 형성되는데, 주로 완전 발달된 유동에 대해서 실험 및 계산이 수행되어 왔으며, 발달하는 유동의 경우에는 측정상의 어려움 등으로 인해 상대적으로 연구가 부족한 실정이다. Speziale [1]는 회전하는 직관에 대한 수치 계산을 통해서 회전각속도가 작은 경우에는 회전 방향이 서로 반대인 2개의 와류가 발생하지만, Re 및 회전각속도가 증가하

게 되면 압력면 부근에서 부가적인 비대칭 형태의 와류가 발생하게 된다는 것을 밝혔다. Kheshgi와 Scriven[2]도 Ro 를 증가하게 되면 유동장은 기존의 2개의 와류에서 4개의 와류가 발생하는 형태로 변화하는 것을 보였다.

다음으로 정지한 곡관에서의 유동을 고려할 수 있다. 이 경우에 곡관 중심의 속도가 빠른 유동은 벽 근처의 속도가 느린 유동에 비해 원심력의 영향을 더욱 크게 받게 되어서, 주방향 유동에 수직하면서 서로 반대방향으로 회전하는 2차 유동이 발생하게 되며, 결과적으로 압력 손실과 열전달율이 상당히 증가하게 된다. Humphrey[3]는 90° 곡관에서 LDA를 이용해서 2차 유동 형태와 재순환(recirculation)의 발생 위치를 제시하였다.

Taylor[4]는 곡관의 곡률비가 커질수록 2차 유동의 크기 자체는 줄어들지만 감소된 압력 구배로 인해 유선 방향으로의 유동 발달에 큰 영향을 미치게 된다는 것을 보였다. 또한 Soh[5]는 곡관 입구 조건의 변화에 따른 유동의 발달 특성을 수치적으로 파악하였다.

한편 이러한 수직으로 회전하는 직관과 정지한 곡관에서 볼 수 있는 유사한 유동형태에 관한 연구가 주로 원형 단면인 경우에 대해서 정성적인 접근 방법으로 예전부터 행하여져 왔다. 반면에 저자[6,7]는 선행 연구를 통해서 사각 단면내의 완전 발달된 층류 유동에서 이러한 두 유동 사이에 강한 정량적인 유사성이 존재한다는 것을 적절한 무차원 변수 도입과 고차의 정확도를 가진 수치 기법을 통해서 밝힌바 있다. 본 연구에서는 이미 완전 발달된 층류 유동 해석에 사용되어 타당성이 입증된 무차원 변수 및 무차원 축방향 거리를 적용하여 발달하는 층류 유동에서도 역시 이러한 정량적인 유사성이 존재한다는 것을 밝히 고자 하며, 이를 통해서 상대적으로 이해가 부족했던 회전하는 직관내의 발달 유동의 특성을 명확히 파악하고자 한다.

2. 지배방정식 및 수치해법

2.1 지배방정식

2.1.1 회전하는 직관의 경우

y축을 중심으로 일정한 각속도로 회전하는 정사각 단면 직관내의 유동을 해석하기 위해 사용된 직교 좌표계를 Fig. 1에 표시하였다. (x, y, z) 각 방향의 속도 성분을 (u, v, w)로 정하고, 회전하는 직관 내부의 유동을 비압축성, 층류 발달 유동으로 가정하면 연속방정식 및 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + 2\Omega w \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] - 2\Omega u \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 p^* 은 수정된 압력을 나타내며,

$$\begin{aligned} p^*(x, y, z) &= p - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (x^2 + z^2) \\ &= \bar{p}^*(z) + \hat{p}^*(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

로 주어진다. 식 (2)에서 관성력항과 코리올리력 항을 포함하는 회전하는 직관내의 2차 유동의 대표 속도 크기를 다음과 같이 정의할 수 있다.

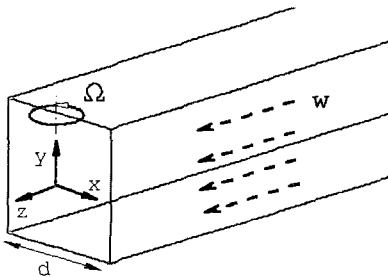


Fig. 1 Coordinate system for flow analysis in an orthogonally rotating straight duct.

$$U_{SR} = \sqrt{\Omega w_m d} = w_m / \sqrt{Ro} \quad (6)$$

기존의 회전하는 직관 및 정지한 곡관에서의 발달하는 유동에 대한 실험 및 계산 결과는 대부분 형식적인 무차원 거리 z/d 또는 곡관의 휨 각도 ϕ 로 표시되었기 때문에 두 유동 사이의 유사성 비교가 힘든게 사실이었다. 따라서 본 연구에서는 이러한 문제점을 해결하고 발달 유동의 유사성 확인을 용이하게 하기 위해서 축방향 길이 척도 l 을 다음과 같이 정의하고자 한다. 즉, 단면 내의 길이 척도는 d , 축방향으로의 속도 척도는 w_m 이므로, 단면내의 유동이 U_{SR} 의 속도로 거리 d 만큼 이동하는 동안 축방향 유동이 w_m 의 속도로 이동하는 거리 l 은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$l = d \sqrt{Ro} \quad (7)$$

2차 유동 속도성분 u, v 와 단면내의 압력 p^* 은 U_{SR} 에 의해서, 축방향 속도성분 w 와 단면 평균 압력 \bar{p}^* 은 평균 속도 w_m 에 의해서 무차원화 되며, 무차원화된 변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u}{w_m} \sqrt{Ro} & \tilde{v} &= \frac{v}{w_m} \sqrt{Ro} & \tilde{w} &= \frac{w}{w_m} \\ \tilde{p}^* &= \frac{p^*}{\rho w_m^2} Ro & \bar{\tilde{p}}^* &= \frac{\bar{p}^*}{\rho w_m^2} & \tilde{t} &= \frac{w_m}{d \sqrt{Ro}} t \\ \tilde{x} &= \frac{x}{d} & \tilde{y} &= \frac{y}{d} & \tilde{z} &= \frac{z}{l} = \frac{z}{d \sqrt{Ro}} \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)의 무차원 변수들을 식 (1)-(4)에 적용하면 다음과 같은 무차원화된 지배방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} &= -\frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{x}} \\ + \frac{1}{K_{LR}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{Ro} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right] &+ 2\tilde{w} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial y} \quad (11)$$

$$+ \frac{1}{K_{LR}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{1}{Ro} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} \right]$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial z} \quad (12)$$

$$+ \frac{1}{K_{LR}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \frac{1}{Ro} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right] - \frac{2}{Ro} \tilde{u}$$

회전하는 직관에서 유동 특성들을 파악하기 위해서 다양한 무차원 변수들의 조합이 사용되어져 왔다. Speziale[1]는 Re , Ro 를, Khesghi와 Scriven[2]은 $Re_\Omega = \Omega d^2/\nu$, Ro 를, Baura [8]는 Re , $1/Ro$ 를 사용하였으나, Re 는 회전의 영향을 포함하고 있지 않기 때문에 회전하는 직관에서의 상사 변수로 사용하는 것은 타당하지 않은 것으로 판단되며, 다음에 설명할 정지한 곡관에서의 주요 무차원 변수중의 하나인 Dean수 $K_{LC} = Re/\sqrt{\lambda}$ 에 상응하지 못한다. 본 연구에서는 식 (10)-(12)에서 볼 수 있듯이 무차원 변수 $K_{LR} = Re/\sqrt{Ro}$ 와 $Ro = w_m/\Omega d$ 를 사용하였다. 여기서 K_{LR} 은 U_{SR} 에 기초한 Re 를, Ro 는 코리올리력에 대한 관성력의 비를 나타낸다. 저자[6,7]는 선행 연구를 통해 회전 직관과 정지한 곡관 사이의 유동의 유사성은 Ro 및 곡률비 λ 가 충분히 큰 경우(체적력에 비해서 관성력이 큰 경우)에 성립되는 것을 밝힌 바 있다. 따라서 $Ro \rightarrow \infty$ 로 하면, 식 (10)-(12)에서 Ro 를 포함한 항은 사라지게 되고, 식 (13)-(15)에서 볼 수 있듯이 회전하는 직관 내부의 유동은 오직 K_{LR} 에 의해서만 영향을 받게 되는 '점근적인 불변 특성' (asymptotic invariance property)을 가지게 된다.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial x} + \frac{1}{K_{LR}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right] + 2\tilde{w} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial y} + \frac{1}{K_{LR}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right] \quad (14)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial z} + \frac{1}{K_{LR}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right] \quad (15)$$

2.1.2 정지한 곡관의 경우

Fig. 2는 곡률 반경이 R 로 표시된 정사각 단면 곡관 유동 해석에 사용된 좌표계를 나타내며, 연속방정식 및 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{R}{R+x} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{R+x} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{R}{R+x} w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w^2}{R+x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{R}{R+x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{R+x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2R}{(R+x)^2} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{u}{(R+x)^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{R}{R+x} w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{R}{R+x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{R+x} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{R}{R+x} w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{uw}{R+x} = -\frac{R}{R+x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{R}{R+x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{R+x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2R}{(R+x)^2} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w}{(R+x)^2} \quad (19)$$

여기서

$$p(x, y, z) = \bar{p}(z) + p(x, y) \quad (20)$$

로 주어지며, 식 (17)에서 관성력항과 원심력항

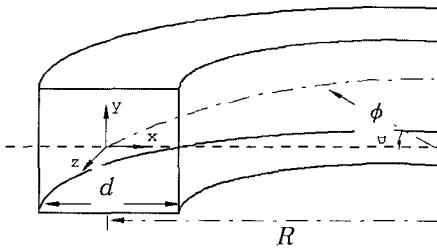


Fig. 2 Coordinate system for flow analysis in a stationary curved duct

을 포함하는 정지 곡관 내부의 2차 유동의 대표 속도 크기는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_{SC} = w_m \sqrt{d/R} = w_m / \sqrt{\lambda} \quad (21)$$

앞서 회전하는 직관 유동 해석에 사용된 것과 동일한 방식으로, 식 (8)에서 Ro 대신에 λ 를 대입하면 다음과 같은 무차원 변수를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u}{w_m} \sqrt{\lambda} & \tilde{v} &= \frac{v}{w_m} \sqrt{\lambda} & \tilde{w} &= \frac{w}{w_m} \\ \tilde{p} &= \frac{p}{\rho w_m^2} \lambda & \tilde{t} &= \frac{t}{d\sqrt{\lambda}} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{d} \quad \tilde{y} = \frac{y}{d} \quad \tilde{z} = \frac{z}{d\sqrt{\lambda}}$$

식 (22)의 무차원 변수들에 기초해서 지배방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\lambda}{\lambda + \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\tilde{u}}{\lambda + \tilde{x}} = 0 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\lambda}{\lambda + \tilde{x}} \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\lambda}{\lambda + \tilde{x}} \tilde{w}^2 \\ &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{K_{LC}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\lambda}{(\lambda + \tilde{x})^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\lambda + \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \frac{2\lambda}{(\lambda + \tilde{x})^2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\tilde{u}}{(\lambda + \tilde{x})^2} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\lambda}{\lambda + \tilde{x}} \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \\ &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{K_{LC}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\lambda}{(\lambda + \tilde{x})^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\lambda + \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\lambda}{\lambda + \tilde{x}} \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\tilde{u}\tilde{w}}{\lambda + \tilde{x}} \\ &= -\frac{\lambda}{\lambda + \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{K_{LC}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \right. \\ &\left. + \frac{\lambda}{(\lambda + \tilde{x})^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\lambda + \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \frac{2}{(\lambda + \tilde{x})^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right. \\ &\left. - \frac{\tilde{w}}{(\lambda + \tilde{x})^2} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 $K_{LC} = Re/\sqrt{\lambda}$ 는 곡관 유동에서 주요한 변수중의 하나인 Dean수를 나타내며, 2차 유동 대표 속도 크기 U_{SC} 에 기초한 Re 를 의미한다. 곡률비 $\lambda = R/d$ 는 원심력에 대한 관성력의 비를 나타낸다. 이처럼 K_{LC} 와 λ 는 곡관내의 층류 유동을 특징지워 주는 중요한 변수임을 알 수 있다.

한편 Ito[9] 및 Austin과 Seader[10]의 연구 결과에 의하면 $\lambda > 8$ 인 경우에는 λ 의 영향은 실제로 무시할 수 있을 정도로 작은 것으로 알려져 있으며, 이러한 사실은 저자[6,7]의 선행 연구를 통해 입증된 바 있다. 따라서 식 (23)~(26)에서 $\lambda \rightarrow \infty$ 를 취하게 되면 다음과 같은 단순화된 무차원 지배방정식을 얻게 된다.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} - \tilde{w}^2 \\ &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{K_{LC}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \\ &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{K_{LC}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} \\ &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{K_{LC}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

위의 식 (27)-(30)에서 볼 수 있듯이 곡률비 λ 는 유동 특성에 영향을 미치지 않고, K_{LC} 만이 곡관내의 층류 유동에서 지배적인 변수가 된다. 또한 회전 직관에 대한 무차원화된 지배방정식인 식 (13)-(15)와 비교했을 때 코리올리력 및 원심력을 제외한 나머지 항들은 동일한 형태를 나타내고 있다.

2.2 수치해법

Fractional-step 방법을 사용해서 회전하는 직관 및 정지한 곡관 내부의 발달하는 층류 유동을 해석하였다. 대류항 차분시 계산의 안정성을 위해 사용되었던 1차의 정확도를 가지는 풍상차분법은 격자 간격에 비례해서 계산 오차를 발생하게 되어 조밀한 격자의 사용이 불가피하며, 이로 인해 과도한 기억 장소를 필요로 하게 된다. 본 연구에서는 2차 상류 차분법을 이용하여 대류항을 차분화함으로써 계산 시간 절감 및 해의 정확성 향상을 도모하는 동시에 운동 방정식에서 인위적인 소산의 필요성을 제거하였다. 한편 점성항과 압력항은 2차 중앙차분법을 이용해서 차분화하였다. 수렴 가속화 기법의 하나인 국부시간단계(local time step) 방법을 사용해서 수렴성을 향상하였다. 비엇갈림 격자계의 사용을 통하여 경계조건의 부가됨을 용이하게 하였고, 각각의 변수값들을 저장하는데서 오는 부가적인 기억장소의 필요를 감소시켰다. 대칭적 형태의 유동 구조를 고려하여 관 단면의 절반 부분만을 계산 영역으로 정하였으며, 축방향, 폭방향 및 높이 방향으로 각각 $75 \times 35 \times 18$ 개의 격자를 사용하였다. 벽 근처에서는 경계층의 영향으로 주유동과 2차 유동의 급격한 구배가 존재하므로 조밀한 격자를 사용하였다. 계산에 적용된 경계조건은 다음과 같다.

- 입구 조건 ; 균일 유동
- 출구 조건 ; 2차 정확도를 가진 외삼법
- 점착 조건 ;

$$u = v = w = 0 \text{ at wall}$$

- 대칭 조건 ;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = v = 0 \text{ at } y = 0$$

3. 결 과

3.1 일반적인 유동 형태

회전하는 직관 및 정지한 곡관 유동에서 유동장이 '점근적인 불변특성'을 나타내는 Ro 및 λ 의 범위내에서 층류 유동의 발달 특성을 살펴보기 위해 K_L 값이 각각 120 및 300이고, Ro , $\lambda = 50$ 인 경우에 대해서 계산을 수행하였다. 먼저 $K_L = 120$ 인 경우에 대해서 무차원화된 축방향 속도 (w/w_m)와 2차 유동 속도 벡터를 Fig. 3에서 표시하였다. 상부는 정지한

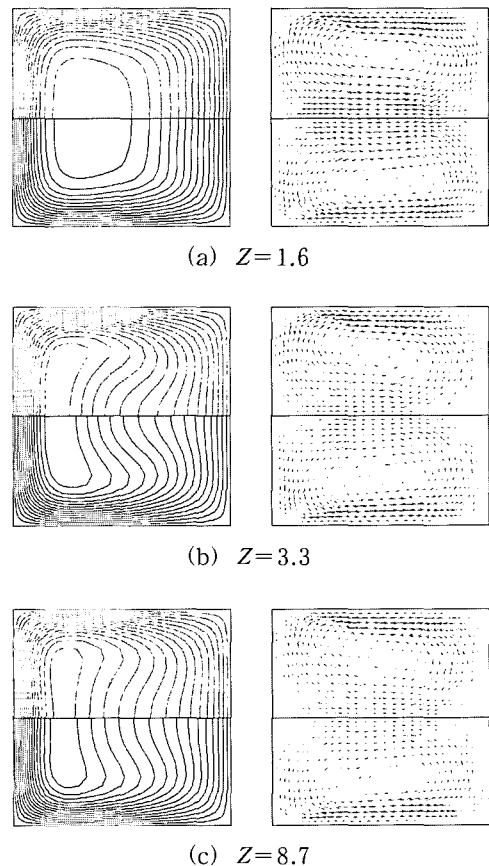


Fig. 3 Development of axial velocity contours (left) and secondary velocity vectors (right) for $K_L = 120$ and $Ro = \lambda = 50$

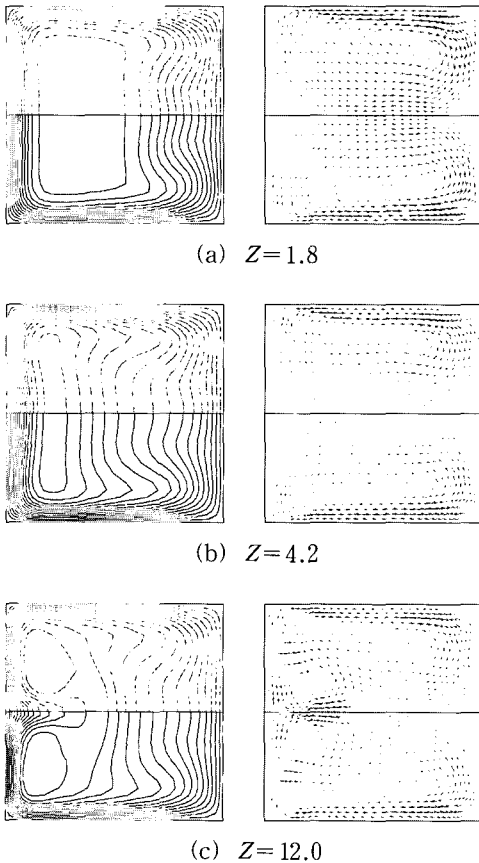
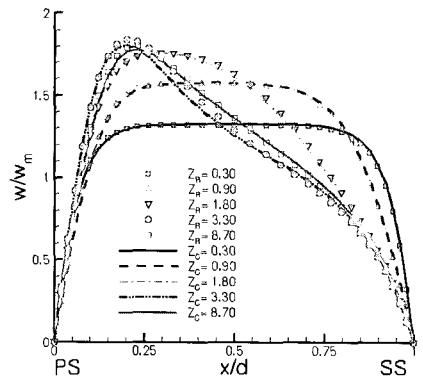


Fig. 4 Development of axial velocity contours (left) and secondary velocity vectors (right) for $K_L=300$ and $Ro=\lambda=50$

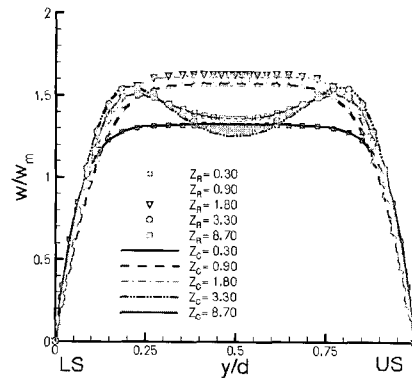
곡관을, 하부는 회전하는 직관을 나타낸다. 먼저 회전하는 직관의 경우, 회전에 의한 코리올리력의 영향으로 축방향 거리 Z 가 증가할수록 직관 중심의 속도가 빠른 유동이 압력면으로 이동하면서 서로 상반된 방향으로 회전하는 2개의 와류가 발생하는 것을 볼 수 있다. 정지한 곡관의 경우도 회전하는 직관의 경우와 마찬가지로 Z 값이 증가할수록 원심력의 영향이 강하게 작용하여 곡관 중심의 유동이 바깥쪽벽으로 이동하는 것을 볼 수 있다. 이러한 2차 유동 형상은 K_L 값이 커지면서 다른 형태를 보이게 된다. 예컨대, Fig. 4에서 볼 수 있듯이 회전하는 직관의 경우에 관성력과 코리올리력 사이의 균형이 깨어지면서 압력면

에서 경계층이 불안정하게 되며, 이로 인해 부가적인 2차 유동이 발생하여 전체적으로 4개의 와류 구조를 형성하는 것을 볼 수 있다. 또한 회전하는 직관내의 유동의 불안정성 발생과 유사한 형태의 2차 유동이 반경 방향 압력 구배 및 원심력의 불균형으로 인해 곡관의 바깥쪽벽에서 형성되는 것을 살펴볼 수 있다. 조사된 축방향 위치들에 대해서 두 유동의 축방향 속도 분포 및 2차 유동 형태가 전체적으로 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

Fig. 5, 6에서는 $K_L=120$ 및 $K_L=300$ 인 경우에 대칭면에서 수평 방향으로 축방향 속도 형상 및 관 중심에서 수직 방향으로 축방향 속

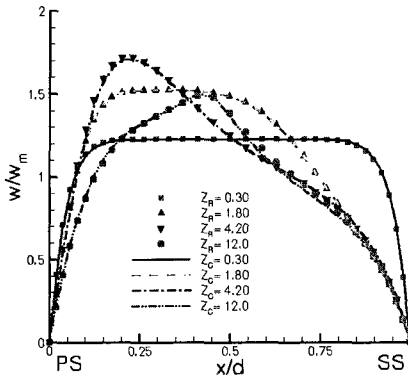


(a) horizontal centerline

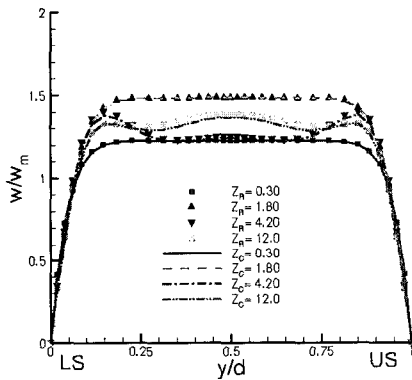


(b) vertical centerline

Fig. 5 Development of axial velocity profiles ($K_L=120$, $Ro=\lambda=50$)



(a) horizontal centerline



(b) vertical centerline

Fig. 6 Development of axial velocity profiles. ($K_L=300, Ro=\lambda=50$)

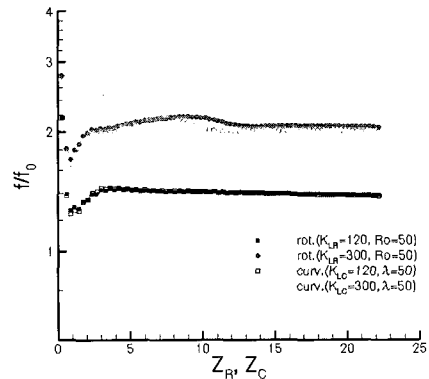
도 형상을 표시하였다. 수평 방향으로 축방향 속도 형상을 나타내는 Fig. 5(a), 6(a)의 하단에 표시된 PS는 압력면(pressure side)을, SS는 흡입면(suction side)을 각각 나타내며, 수직 방향으로 축방향 속도 형상을 나타내는 Fig. 5(b), 6(b)의 하단에 표시된 US는 상부면을, LS는 하부면을 나타낸다. 압력면에서 부가적인 2차 유동이 발생하지 않는 $K_L=120$ 에서 수평 방향으로의 속도 형상을 살펴보면, 입구 근처에서는 코리올리력 및 원심력의 영향이 상대적으로 작기 때문에 거의 대칭적인 형상을 보이다가 유동이 하류로 진행하면서 속도의 최대값이 증가하는 동시에 압력면으로 이동하는 비대칭적 형상을 나타낸다 (Fig.

5(a)). $K_L=300$ 으로 증가하면서, 압력면에서 부가적인 2차 유동의 발생으로 인해 축방향 속도 크기가 감소하게 되고, 최대 속도 지점이 다시 관 중심으로 이동하게 된다(Fig. 6(a)).

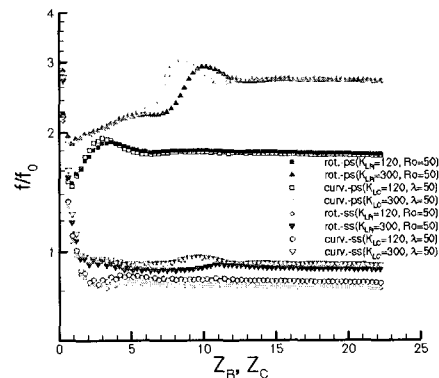
한편, 수직 방향으로의 속도 형상의 경우에 $K_L=120$ 에서는 벽 근처에서 2개의 속도 최고값이 존재하지만(Fig. 5(b)), $K_L=300$ 에서는 압력면에서 부가적인 와류의 발생으로 인해 손실된 유선 방향 운동량의 일부가 관 중심 근처에서 흡수되기 때문에 또 하나의 최대 속도가 존재하는 것을 볼 수 있다(Fig. 6(b)).

3.2 마찰계수

관 유동 해석시 가장 중요한 것 중의 하나가 바로 마찰 계수를 정확히 구하는 것이다.



(a) pressure & suction side



(b) upper (or lower) side

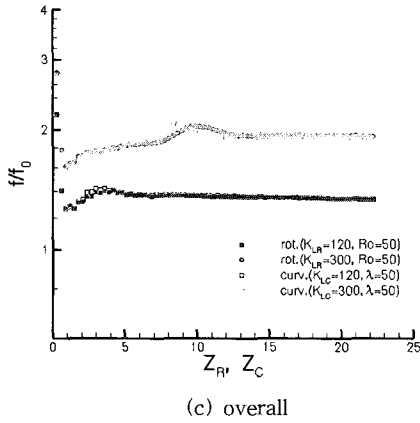


Fig. 7 Variation of friction factor ratio.

Fig. 7은 각각의 벽면 및 전체 평균 마찰계수의 비를 나타내며, 여기서 f_0 는 정지한 정사각 단면 직관에서 완전 발달된 유동에 대한 마찰 계수이다. 저자 [6,7]의 선행 연구에서 $Ro, \lambda > 8$ 인 경우에 유체의 불안정성이 발생하는 임계값은 회전하는 직관의 경우에 $K_{LR_{cm}} \approx 154$ 이고, 정지한 곡관의 경우는 $K_{LC_{cm}} \approx 136$ 임을 밝힌바 있다. 부가적인 2차 유동이 발생하지 않는 $K_L = 120$ 인 경우에는 두 유동의 마찰계수의 변화 형태가 일치하는 반면, 압력면에서 부가적인 2차 유동이 발생하는 $K_L = 300$ 인 경우에는 특히 압력면에서 마찰계수의 국부적인 차이가 발견되고 있다. 이는 앞서 설명한

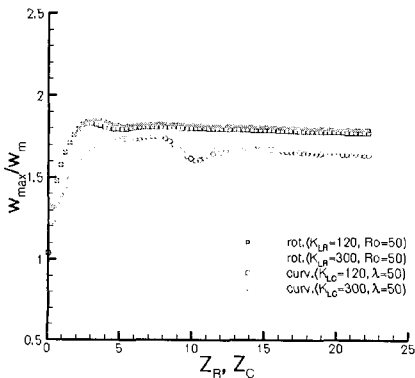


Fig. 8 Variation of maximum axial velocity ratio.

유체의 불안정성이 발생하는 임계값 $K_{L_{cm}}$ 의 차이에서 비롯되며, 임계값의 크기가 상대적으로 작은 정지한 곡관에서 부가적인 2차 유동이 먼저 발생되어 마찰계수의 증가를 가져온다. 그러나 이러한 국부적인 차이는 유동이 완전 발달된 형태로 진행되면서 사라지게 되는 것을 볼 수 있다.

3.3 다른 유동 특징들

Fig. 8은 Z 값의 변화에 따른 최대 축방향 속도의 비 (w_{max}/w_m)를 나타내고 있다. 앞서 Fig. 7에서 살펴 본 평균 마찰 계수의 변화 형태와 유사하게 유체의 불안정성이 발생하는 축방향 위치에서 국부적인 차이를 보이는 것을 제외하고는 두 유동의 최대 축방향 속도의 비가 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

4. 결 론

주유동에 수직한 축을 중심으로 회전하는 정사각 단면의 직관과 정지한 정사각 단면의 곡관에서의 발달하는 층류 유동의 특성 및 정량적인 유사성을 밝히기 위해 무차원화된 축방향 거리 Z_R, Z_C 의 사용 및 고차의 정확도를 가진 수치해법을 이용하여 계산한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 완전 발달된 층류 유동에서와 마찬가지로 발달하는 층류 유동에서도 회전하는 직관 유동의 경우에 무차원 변수 K_{LR} 과 Ro 는 정지한 곡관 유동의 K_{LC} 와 λ 에 각각 대응한다는 사실이 확인되었다.

(2) Ro 와 λ 가 충분히 큰 값을 가지는 경우, K_{LR} 과 K_{LC} 는 각각 회전하는 직관과 정지한 곡관 유동에서 유일한 지배변수가 되며, 유동 특성들은 이들 무차원 변수들에 대해 '점근적인 불변 특성'을 나타내었다. 결과적으로 동일한 K_L 및 축방향 위치 Z 에 대해서 두 유동의 정량적인 유사성이 성립하였다.

(3) 유동의 불안정성으로 인한 부가적인 2차 유동이 발생하는 위치를 제외한 폭넓은 축방향 거리내에서 두 유동에 대한 마찰계수, 주유동의 형태 및 단면에서의 최대 축방향 속도는 전반적으로 일치하였다.

(4) 본 연구에 사용된 무차원화된 축방향 거리 Z_R 및 Z_C 는 점성력을 포함하고 있지 않기 때문에 전 유동 영역에서 사용이 가능하다.

후 기

본 연구는 BK21 지원 사업의 일부로 수행되었으며, 日韓産業技術協力財團 및 과학재단이 지원하는 “理工係青少年交流事業”의 일환으로 日本航空宇宙研究所 방문시 많은 기술적 조언을 해주신 Dr. Ishigaki께 감사의 말씀을 드립니다.

참고문헌

- [1] Speziale, C. G., “Numerical Study of Viscous Flow in Rotating Rectangular Ducts,” *J. Fluid Mech.*, **122** (1983), p.251
- [2] Khesghi, H. S. and Scriven, L. E., “Viscous Flow through a Rotating Square Channel,” *Phys. Fluids*, **28** (1985), p.2868
- [3] Humphrey, J. A. C. et al., “Laminar Flow in a Square Duct of Strong Curvature,” *J. Fluid Mech.*, **83** (1977), p.509
- [4] Taylor, A. M. K. P. et al., “Curved Ducts with Strong Secondary Motion: Velocity Measurements of Developing Laminar and Turbulent Flow,” *J. Fluids Eng.*, **104** (1982), p.350
- [5] Soh, W. Y., “Developing Fluid Flow in a Curved Duct of Square Cross-Section and Its Fully Developed Dual Solutions,” *J. Fluid Mech.*, **188** (1988), p.337
- [6] Lee, G. H. and Baek, J. H., “Similarity Comparison of Laminar Flows between in

- Orthogonally Rotating Square Duct and Stationary Curved Square Duct,” *submitted to Int. J. Rotating Machinery*, (2000)
- [7] 이공회, 백제현., “수직축을 중심으로 회전하는 직관과 정지한 곡관내에서의 층류 유동의 유사성 비교,” 대한기계학회논문집 (B), (2000), 게재 승인
- [8] Baura, S. N., “Secondary Flow in a Rotating Straight Pipe,” *Proc. R. Soc. Lond.*, **227** (1954), p.133
- [9] Ito, H., “Friction Factors for Turbulent Flow in Curved Pipes,” *J. Basic Eng.*, **81** (1959), p.123
- [10] Austin, L. R. and Seader, J. D., “Fully Developed Viscous Flow in Coiled Circular Pipes,” *AIChE J.*, **19** (1973), p.85