

논문

저레이놀즈수 레이놀즈응력모델을 이용한 난류선회류의 유동해석

김 재 한^{*1}, 김 광 응^{*2}

Prediction of Turbulent Swirling Flow Using A Low-Reynolds-number Reynolds Stress Model

J. H. Kim and K. Y. Kim

In this study, numerical calculations are carried out in order to evaluate the performance of low-Re Reynolds stress model based on SSG model for a swirling turbulent flow in a pipe. The results are compared with those of $k-\epsilon$ model, GL model and the experimental data. The results show that low-Re Reynolds stress model and GL model give better results than $k-\epsilon$ model. In the region near the wall, low-Re Reynolds stress model improves the predictions. However, there is no large difference between the predictions with two Reynolds stress models.

Key words: 선회유동(Swirling Flow), 저레이놀즈수 레이놀즈응력모델(Low-Reynolds-number Reynolds Stress Model), $k-\epsilon$ 모델($k-\epsilon$ Model)

1. 서 론

선회유동은 가스터빈 연소기 같은 연소시스템에 형성되며, 화염을 안정시키고 연료와 공기의 혼합을 촉진한다. 또한 난류강도를 증가시켜 열 및 물질전달의 효과를 증진시키므로 가스터빈의 연소기 외에도 열교환기 및 각종 산업용 버너등의 공업 분야에 폭넓게 응용되고 있다.

선회가 충분히 강할 경우 발달한 역압력 구배는 내부에 재순환 영역을 형성하고 이는 화염의 안정에 도움을 준다. 그 결과 유동의 선회는 연소 효율, 연소기 출구에서의 온도장과 연소로부터 발생하는 오염 물질의 방출 정도에 상당한 영향을 준다. 그러므로, 이러한 선회유동의 전산유체역학적 예측은 실제 연소 시스템의 성능을 예측하고 최적화하는 데 있어 매우 유용하다.

전산유체역학적 유동해석의 정확성은 궁극적으로 난류모델에 의해 제한되는 것으로 알려져 있다. Prandtl의 혼합거리모델 이래 현재까지 여러 가지 난류모델들이 개발되었다. 비교적 간단한 와점성계수(eddy-viscosity)모델들은 난류에 대한 유선의 휨, 회전, 부력 등의 중요한 효과를 제대로 예측하지 못하며, 부가적인 효과들을 고려해 특별히 수정된 모델들도 특정한 현상에만 효과를 나타내는 것으로 알려져 있다. 반면에 레이놀즈응력모델과 같은 2차 닫힘(second-order closure) 모델은 유선의 휨에 의한 효과를 보다 잘 예측하여 선회류나 곡류의 해석에 더 적합하다고 알려져 있다[1,2].

난류선회류에 대한 실험적 연구로는 동축의 관으로부터 대기상태로 분류와 선회류가 방출되는 선회분류에 대한 Whitelaw와 Ribero[3]의 연구와 선회강도를 달리하며 속도와 응력 성분 등을 측정된 Morse[4]의 연구가 있다. Hogg와 Leschziner[5]는 표준 $k-\epsilon$ 모델과 레이놀즈응력모델을 사용하여 난류 선회분류를 수치해석 하였다. 그들은 와점성계수(eddy viscosity)의 개념을 사

* 2001년 10월 8일 접수

^{*1} 인하대학교 대학원 기계공학과

^{*2} 정회원, 인하대학교 기계공학과

용하는 $k-\epsilon$ 모델보다 레이놀즈응력모델이 우수함을 보였고, 계산 결과는 일반적으로 실험치와 잘 일치하였지만 점선 방향의 속도는 잘 예측하지 못하였다. Jones와 Pascau[6]도 같은 계산을 수행하였는데 이들 역시 동일한 레이놀즈응력모델을 사용하고 ϵ -방정식을 수정하여 약간의 개선을 이루었으나 점선방향속도와 응력성분들은 여전히 잘 예측하지 못하였다.

최근에는 벽 근처 낮은 레이놀즈수 영역의 난류에 관한 난류모델의 연구가 활발히 진행되고 있다. 과거의 난류모델들은 벽 근처 영역에서 대부분 실험적인 벽법칙을 적용하고 있으나, 이 벽법칙은 유선의 곡률이 크거나 압력구배가 큰 경우에는 수정이 필요하다고 알려져 있다. 선회류의 경우 곡률 효과를 고려해 새롭게 수정한 벽법칙에 대한 Kim과 David[7]의 연구도 수행된 바 있다.

최근에 널리 사용되고 있는 레이놀즈응력모델들의 결점 중 하나는 벽의 영향을 반영하기 위해 벽으로부터의 수직거리와 수직벡터를 사용한다는 점이다. 따라서, 이러한 물리량을 명확히 정의하기 어렵거나 불가능한 형상의 유동일 경우 그 적용이 모호하게 된다. 이런 단점을 극복하기 위해 So와 Yuan[8]은 경계로부터의 수직거리나 수직벡터를 사용하지 않는 저레이놀즈수 레이놀즈응력모델을 새로이 개발하였다.

본 연구에서는 So와 Yuan[8]이 Speziale 등[9]의 모델을 바탕으로 개발한 저레이놀즈수 레이놀즈응력모델을 선회류와 같이 복잡한 유동에 적용하여 그 성능을 검증하였다. 이를 위해 계산결과를 벽법칙을 사용하는 Gibson과 Launder[10]의 레이놀즈응력모델(GL모델)과 표준 $k-\epsilon$ 모델에 의한 결과 및 So 등[11]의 실험치와 비교하였다.

2. 난류모델

2.1 지배방정식

본 연구에서 사용된 정상상태, 축대칭, 비압축성 난류유동에 대한 원통좌표계에서의 연속방정식과 축방향, 반경방향 및 원주방향 운동량방정식들은 다음과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} [\mu \frac{\partial U}{\partial x} - \rho \overline{u^2}] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\mu \frac{\partial U}{\partial r} - \rho \overline{uv})] - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2)$$

$$\rho U \frac{\partial V}{\partial x} + \rho V \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} [\mu \frac{\partial V}{\partial x} - \rho \overline{vw}] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\mu \frac{\partial V}{\partial r} - \rho \overline{v^2})] - \mu \frac{V}{r^2} + \rho \frac{\overline{w^2}}{r} - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (3)$$

$$\rho U \frac{\partial(rW)}{\partial x} + \rho V \frac{\partial(rW)}{\partial r} = -2\mu \frac{\partial W}{\partial r} - 2\mu \frac{W}{r} \frac{\partial}{\partial x} [\mu \frac{\partial(rW)}{\partial x} - r\rho \overline{uw}] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\mu \frac{\partial(rW)}{\partial r} - r\rho \overline{vw})] \quad (4)$$

2.2 레이놀즈응력모델

위의 지배방정식에서 사용되는 레이놀즈응력텐서($\overline{u_i u_j}$)에 관한 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial(\overline{U_k u_i u_j})}{\partial x_k} = D_{ij} + P_{ij} + \Pi_{ij} - \epsilon_{ij} \quad (5)$$

여기서, D_{ij} , P_{ij} , Π_{ij} 와 ϵ_{ij} 는 각각 확산, 생성, 압력-변형률 상관 및 소멸을 나타내는 항들로서 다음과 같은 형태를 가진다.

$$D_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j u_k}) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u_j p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i p}}{\partial x_j} \right)$$

$$P_{ij} = -\left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right]$$

$$\Pi_{ij} = \frac{p}{\rho} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

$$\epsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$$

위의 항들 중 생성항을 제외한 나머지 항들은 모델링이 필요하며, 이를 위해 압력-변형률 상관

항, 소멸항 그리고 난류운동에너지의 소멸률 ϵ 에 관한 방정식 등에 대해 So와 Yuan[8]의 모델을 사용하였다. So와 Yuan[8]은 유선이 흰 유동이나 회전유동에서 Launder 등[12]의 레이놀즈응력모델 보다 나은 예측성능을 보인다고 알려진 Speziale 등[9]의 높은 레이놀즈수 레이놀즈응력모델을 벽근처 저레이놀즈수 영역까지 확장한 다음과 같은 모델을 제시한 바 있다.

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & -(C_1\epsilon + C_1^*\tilde{P})b_{ij} + C_2\epsilon(b_{ik}b_{kj} - \frac{1}{3}\Pi\delta_{ij}) \\ & + C_5k(b_{jm}e_{ikm} + b_{im}e_{jkm})\Omega_k \\ & - \alpha_1(P_{ij} - \frac{2}{3}\tilde{P}\delta_{ij}) - \beta_1(D_{ij}^* - \frac{2}{3}\tilde{P}\delta_{ij}) \\ & - 2(\gamma_1 + \frac{C_3^*}{2}\Pi^{1/2})kS_{ij} + f_w\Pi_{ij}^w \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^w = & (C_1\epsilon + C_1^*\tilde{P})b_{ij} - C_2\epsilon(b_{ik}b_{kj} - \frac{1}{3}\Pi\delta_{ij}) \\ & + a^*(P_{ij} - \frac{2}{3}\tilde{P}\delta_{ij}) + 2\gamma^*kS_{ij} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, Π 는 비등방텐서의 2차 불변항(invariant)이고, \tilde{P} 는 난류운동에너지의 생성률, k 는 난류운동에너지, ϵ 은 난류운동에너지의 소멸률, b_{ij} 는 레이놀즈응력성분의 비등방텐서, 그리고 S_{ij} 는 평균변형률텐서이고, 다음과 같이 정의된다.

$$\Pi = b_{mn}b_{mn}$$

$$\tilde{P} = \frac{1}{2}P_{ii}$$

$$b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$

Π_{ij}^w 은 벽효과를 보정해 주기 위해 사용되었고, f_w 는 높은 레이놀즈수 영역에서 Π_{ij}^w 의 영향을 제거하기 위해 사용된 감쇠함수로 국부 난류 레이놀즈수 (Re_t)를 매개로 하고, 그 정의는 다음과 같다.

$$f_w = \exp[-(Re_t/150)^2]$$

$$Re_t = k^2/(\nu\epsilon)$$

소멸항의 모델은 다음과 같다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3}\delta_{ij}\epsilon(1-f_w) + f_w\epsilon_{ij}^w + \epsilon_{ij}^* \quad (8)$$

여기서, 첫 항은 레이놀즈수가 클 때 등방성으로 환원된다. 그리고, 두번째 항은 벽근처 영역에서 비등방성을 고려해 주는 항으로 압력-변형률 상관항에서 사용되었던 것과 같은 감쇠함수가 사용되고, 마지막 항은 다른 레이놀즈응력성분들을 위한 추가적인 벽영향 고려항으로 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_{ij}^w = \frac{\epsilon}{k}\overline{u_i u_j}$$

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}\right) - \frac{\overline{u_i u_j}}{k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial k}{\partial x_k}\right)\right]$$

난류운동에너지 소멸률, ϵ 에 관한 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = & \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial \epsilon}{\partial x_k}\right) + C_{\epsilon 1}\frac{\epsilon}{k}\tilde{P} - C_{\epsilon 2}f_{\epsilon}\frac{\epsilon^2}{k} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(C_{\epsilon}\frac{k}{\epsilon}\overline{u_i u_k}\frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}\right) + C_{\epsilon 3}\nu\frac{\epsilon}{k}\left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_k}\right)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, f_{ϵ} 는 벽영향을 고려해 주기 위해 ϵ -방정식에서 사용되는 벽감쇠함수로 다음과 같이 정의된다.

$$f_{\epsilon} = 1 - 0.22\exp[-(Re_t/6)^2]$$

확산항에 대해서는 Daly와 Harlow[13]의 단순 구배모델을 사용하였다.

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[C_s\frac{k}{\epsilon}\overline{u_k u_l}\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_l}\right] \quad (10)$$

Table. 1 Model constants.

C_1	C_2	C_1^*	C_3^*	C_5
3.4	4.2	1.8	1.3	0.4
α_1	β_1	γ_1	α^*	γ^*
0.4125	0.2125	0.01667	-0.32	0.072
C_ϵ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$C_{\epsilon 3}$	C_s
0.12	1.5	1.9	2.95	0.22

본 연구에서 사용된 저레이놀즈수 레이놀즈응력 모델에 사용된 모델상수들은 아래의 Table 1에 나타난 바와 같다.

3. 수치해석 방법

3.1 경계조건

유동의 입구에서는 축방향과 접선방향 평균속도 성분들(U , W) 그리고 난류응력성분들($\overline{u^2}$, $\overline{w^2}$)을 실험치로 주었고, 반경방향 난류응력성분은 접선방향 난류응력성분과 동일하게 가정하였다. 그리고, 난류운동에너지의 소멸률은 다음과 같이 주었다.

$$\epsilon = k^{3/2}/\xi$$

여기서, 특성길이 ξ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 0 < r < d/2 &: \xi = 0.5d \quad (d = \text{내측관의 내경}) \\ d/2 < r < D/2 &: \xi = 0.027D \quad (D = \text{내측관의 외경}) \\ D/2 < r < R &: \xi = R - D \quad (R = \text{전체관의 반경}) \end{aligned}$$

전단응력성분들에 대한 입구조건에는 Lumley [14]의 연구와 같이 다음 식들을 사용하였다.

$$\begin{aligned} \overline{uw} &= -C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ \overline{vw} &= -C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right) \\ \overline{uw} &= -C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial W}{\partial x} \end{aligned}$$

유동의 출구에서는 축방향 평균속도 성분만 실험치로 주고, 나머지 성분들에 대해서는 구배를 0으로 주는 조건을 적용하였다.

관의 중심에서는 축대칭의 특성을 고려하여 다음과 같은 경계조건을 적용하였다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(U, \overline{u^2}, \overline{v^2}, \overline{w^2}, \overline{uw}, \epsilon)}{\partial r} &= 0 \\ V = W = \overline{uv} = \overline{vw} &= 0 \end{aligned}$$

관의 벽면에서는 No-slip condition을 적용하여 ϵ 을 제외한 모든 성분들의 값을 0으로 주었고, 벽에서의 ϵ 값에 대해서는 다음과 같은 식을 적용하였다.

$$\epsilon_w = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial r} \right)^2$$

3.2 수치기법

지배방정식들은 미소검사체적을 적분하여 대수 방정식을 얻는 유한체적법(finite volume method)에 의하여 차분화 되었고, 대류항의 처리에는 멱승도식(power-law scheme)이 사용되었다. 속도-압력 보정에는 운동량방정식에서 속도를 구하고 연속성을 고려하여 압력을 구하는 SIMPLE 알고리즘을 사용하였다. 격자계로는 검사체적의 표면에서 속도 보정의 필요가 없고, 두 격자점 사이의 압력이 자연스럽게 그 사이의 속도성분의 추진력이 되는 엇갈림 격자계를 사용하였다. 이산화된 방정식들은 TDMA를 이용한 반복해법으로 계산하였다.

4. 결과

Fig. 1과 같이 반경이 62.5mm인 관의 중심부에 위치한 작은 관(직경 $d=8.7\text{mm}$)에서 25.4m/s의 분류가 분출되고, 그 주위로 선회류가 유입

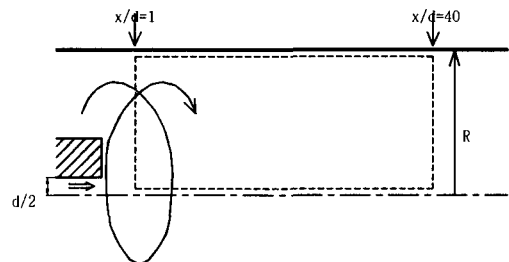


Fig. 1 Geometry of the flow field

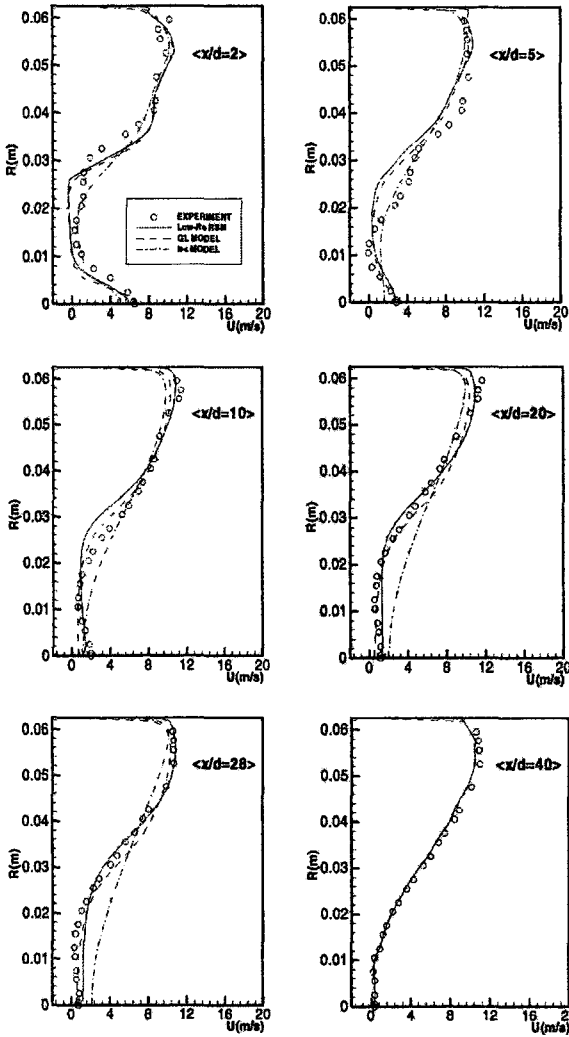


Fig. 2 Axial mean velocity profiles

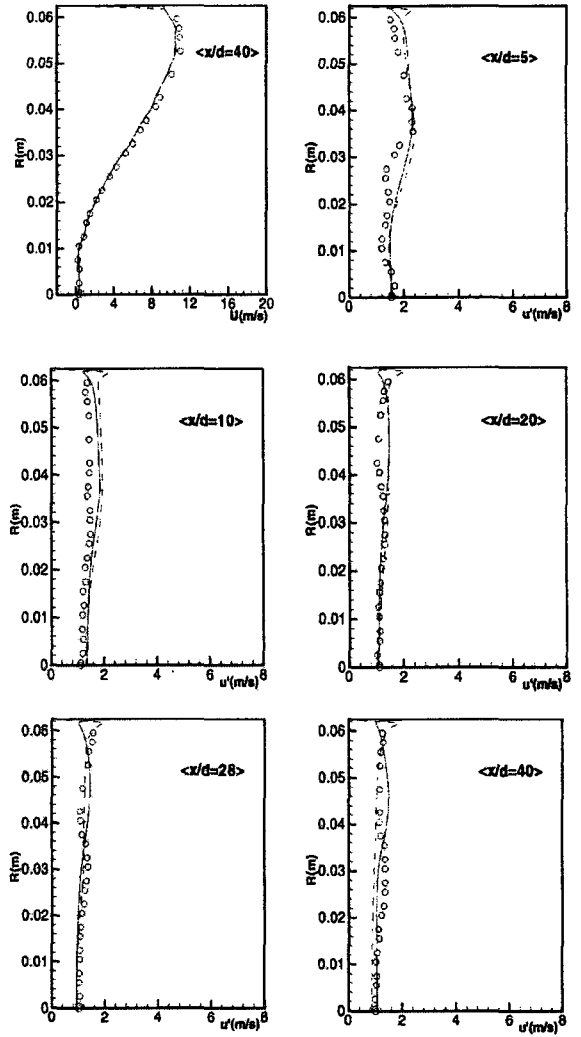


Fig. 3 Axial turbulent intensity profiles

되는 유동을 해석하였으며, 이 유동장에 대해서는 So 등[11]이 실험을 수행한 바 있다. 선회가 강할 경우 유동이 아임계(subcriticality)에 가까워져 출구 경계조건이 압력을 통해 유동장 내부로 거슬러 올라오게 되므로 축방향 평균속도성분으로 구배가 0인 조건을 주는 것은 불합리하다. 따라서, 출구에서 축방향 평균속도성분은 실험치를 사용하였고, $x/d=1$ 에서의 실험치를 입구조건으로 주었다.

유입되는 선회류의 레이놀즈수와 분출되는 분류의 레이놀즈수는 각각 54,900과 14,380이고, 선회강도는 2.25이다.

저레이놀즈수 레이놀즈응력모델의 경우에는 벽함수를 사용하지 않으므로 미세격자를 위해 80×80 의 격자를 사용하였고, 벽함수를 사용하는 GL모델과 $k-\epsilon$ 모델의 경우에는 40×30 의 격자를 사용하였다.

Fig. 2는 각 위치에서의 축방향 평균속도성분에 대해 저레이놀즈수 레이놀즈응력모델과 GL모델 및 $k-\epsilon$ 모델의 결과들을 실험치와 비교한 것이다. $k-\epsilon$ 모델의 경우 Fig. 2에서 보이는 바와 같이 유동의 초기에는 비교적 양호한 예측결과를 보여주었으나, 이후 관의 중심부 근처의 영역에서 실험치 보다 큰 값을 나타내며 유동이 진행됨에

따라 이 차이가 커짐을 확인할 수 있다. 반면에 저레이놀즈수 레이놀즈응력모델과 GL모델은 $k-\epsilon$ 모델과는 달리 비교적 정확한 예측을 하고 있다. 유동의 초기에는 선회류와 분류가 혼합되는 영역에서의 속도증가를 제대로 예측하지 못했으나, $x/d=10$ 이후에는 비교적 좋은 예측 성능을 나타내고 있다. 그리고, 벽근처에서는 거의 전 영역에서 저레이놀즈수 레이놀즈응력모델이 다른 모델들에 비해 우수한 예측성능을 보여주고 있다.

즈응력모델이 벽근처 영역에 대해 더 나은 예측 성능을 보이나, $x/d=5$ 하류에서는 전반적으로 두 결과의 차이가 줄어들면서 공히 실험치에 접근하고 있다.

Fig. 4는 접선방향 난류응력 성분에 대한 결과로 입구부에서는 저레이놀즈수 레이놀즈응력모델이, $x/d=20$ 하류에서는 GL모델이 각각 우수한 성능을 보였다. 저레이놀즈수 레이놀즈응력모델의 경우 $x/d=10$ 상류에서 벽근처 영역에 대한 예측이 매우 정확하다. 두 모델은 공히 반경 $0.02m \sim 0.04m$ 의 혼합영역에서 난류응력 성분을 제대로 예측하지 못하고 있다.

Fig. 5는 관의 중심에서의 축방향 평균속도 성분들의 분포를 보여주고 있다. 유동의 초기 부분에서 $k-\epsilon$ 모델에 의한 결과는 다른 레이놀즈응력

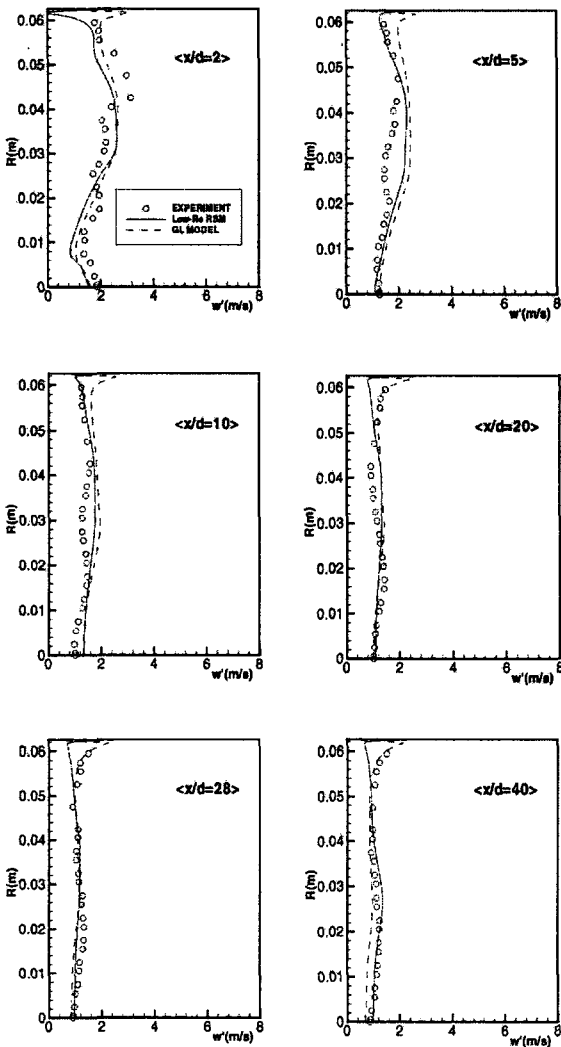


Fig. 4 Tangential turbulent intensity profiles

Fig. 3은 각 위치에서의 축방향 난류응력성분에 대한 결과로 입구부에서는 저레이놀즈수 레이놀

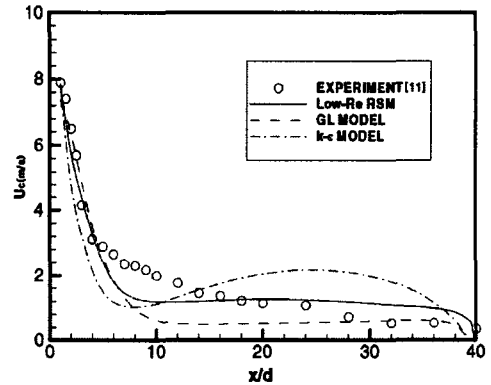


Fig. 5 Centerline axial mean velocity distributions

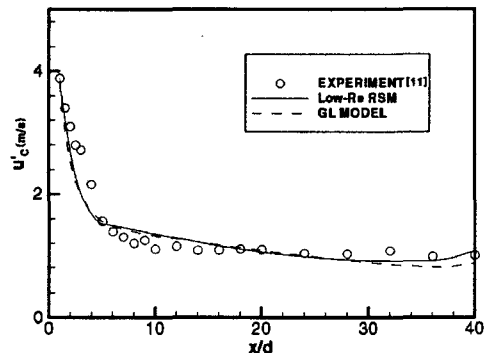


Fig. 6 Centerline axial turbulent intensity distributions

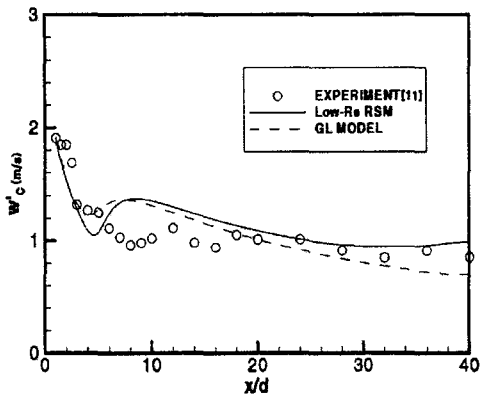


Fig. 7 Centerline tangential turbulent intensity distributions

모델들 보다 더 급격한 기울기의 속도 감소를 보이고 있으며, x/d 가 7~24인 영역에서는 오히려 속도가 증가하고 이후 주어진 출구조건에 맞추기 위해 감소하는 불합리한 속도분포를 나타내고 있다. x/d 가 5~12인 영역에서는 세 모델 모두 속도 감소의 완화를 제대로 예측하지 못해 실험치 보다 큰 감소를 보였다. 전반적으로 저레이놀즈수 레이놀즈응력모델이 다른 두 모델에 비해 관의 중심에서의 축방향 평균속도 성분 예측에 있어 우수한 성능을 나타낸다.

Fig. 6은 관의 중심에서의 축방향 난류응력 성분들의 분포를 나타내고 있다. 저레이놀즈수 레이놀즈응력모델과 GL모델은 유동 초기의 축방향 난류응력 성분의 급격한 감소와 이후에 나타나는 감소의 완화를 정확히 예측해내고 있다.

Fig. 7는 관의 중심에서의 접선 방향 난류응력 성분들의 분포를 보여주고 있다. 두 레이놀즈응력 모델들이 모두 비슷한 결과를 보이고 있으며, x/d 가 5~12인 부분에서는 접선 방향 난류응력 성분의 증가와 감소가 실험치와는 반대로 나타나는 것을 볼 수 있으나 대체적으로 실험치와 일치하고 있음을 알 수 있다.

4. 결론

저레이놀즈수 레이놀즈응력모델의 성능을 파악하기 위한 난류선회류의 유동 해석이 본 연구에서 수행되었다. 계산 결과에서 $k-\epsilon$ 모델은 레이

놀즈응력모델에 비해 유선의 휨에 의한 효과를 제대로 예측하지 못해 특히 관의 중심 영역에서 실험치와 차이를 보였다. 전반적으로 저레이놀즈수 레이놀즈응력모델과 GL모델은 유사한 결과를 나타내고 있으나 벽 근처 영역에서의 계산을 향상시키는 것으로 나타났다. 관의 중심에서도 저레이놀즈수 레이놀즈응력모델이 다른 모델에 비해 우수한 예측 성능을 나타내었다. 그러나, 이 모델은 벽 근처 난류응력 성분의 크기를 예측하는 데 있어서는 다소의 문제점을 드러내고 있어, 앞으로 예측 성능의 향상을 위한 개선이 필요하다.

참고문헌

- [1] Irwin, H. P. A. H., and Arnot-Smith, P. A., "Prediction of the Effects of Streamline Curvature on Turbulence," *Phys. Fluids*, Vol. 18 (1975), pp. 624-630.
- [2] Gibson, M. M., Jones, W. P., and Younis, B. A., "Calculation of Turbulent Boundary Layers on Curved Surfaces," *Phys. Fluids*, Vol. 24 (1981), pp. 386-395.
- [3] Whitelaw, J. H. and Ribeiro, M. M., "Coaxial jets with and without swirl," *J. of Fluid Mech.*, Vol. 96 (1980), pp. 769-795.
- [4] Morse, A. P., Ph. D. Thesis, University of London (1980).
- [5] Hogg, S. and Leschziner, M. A., "Computation of highly swirling confined flow with a Reynolds stress turbulent model," *AIAA J.*, Vol. 27 (1989), pp. 57-63.
- [6] Jones, W. P. and Pascau, A., "Computation of confined swirling flows with a second moment closure," *ASME Trans., J. of Fluids Eng.* (1989), pp. 248-255.
- [7] Kim, N. and Rhode, D. L., "Law of the wall from perturbation analysis for swirling axial flows," *ASME Fluids Eng. Conf.* (1999).
- [8] So, R. M. C. and Yuan, S. P., "A near-wall Reynolds-stress closure without wall normals." Arizona state university (1997).

- [9] Speziale, C. G., Sarkar, S. and Gatsky, T. B., "Modeling the pressure-strain correlation of turbulence : an invariant dynamical systems approach," J. of Fluid Mech., Vol. 227 (1991), pp. 245-272.
- [10] Gibson, M. M. and Launder, B. E., "Ground effects on pressure fluctuation in the atmospheric boundary layer," J. of Fluid Mech., Vol. 86 (1978), pp. 491- 511.
- [11] So, R. M., Ahmed, S. A. and Mongia, H. C., "An experimental investigation of gas jets in confined swirling air flow," NASA CR-3832.
- [12] Launder, B. E., Reece, G. J. and Rodi, W., "Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure," J. of Fluid Mech., Vol. 68 (1975), pp. 537-566.
- [13] Daly, B. J. and Harlow, F. H., "Transport equations of turbulence," Phys. Fluids, Vol. 68 (1970), pp. 491-511.
- [14] Lumley, J. L., "Computational modelling of turbulent flows," Advances in Applied Mechanics 18, Academic Press, pp. 123-178.
- [15] Patankar, S. V., "Numerical heat transfer and fluid flow," McGraw-Hill (1980).