

펠리베열 월쉬함수를 이용한 정속 이동 금속판의 열교환 최적제어에 관한 연구

論 文
50D-11-2

A Study on Optimal Control of Heat Exchange of Thin Metal Moving at Constant Velocity Via the Paley Order of Walsh Functions

金 泰 勳* · 李 明 珪** · 安 斗 守***
(Tai-Hoon Kim · Myung-Kyu Lee · Doo-Soo Ahn)

Abstract - This paper uses the distributed heating thin metal moving at constant velocity which are modeled as distributed parameter systems, and applies the Paley order of Walsh functions to high order partial differential equations and matrix partial differential equations. This thesis presents a new algorithm which usefully exercises the optimal control in the distributed parameter systems. In this paper, the excellent consequences are found without using the existing decentralized control or hierarchical control method.

Key Words : Distributed parameter system, Paley order of Walsh function, Optimal control

1. 서 론

정속도로 이동하는 금속판에서의 열교환을 모델링하는 경우, 시스템의 구조상 시간과 공간에 따라 여러 형태로 분포되어 있기 때문에 집중정수 모델로 표현하여 시스템 특성을 해석하고 제어하는 것에는 여러 가지 문제점들이 있다. 시스템의 상태는 시간과 공간의 영향을 받는 상태변수가 되기 때문에, 그 동적 특성은 편미분 방정식으로 표현되게 되고 또한 분포정수계로 모델링하게 된다.[1-3]

분포정수계는 시스템이 두 개 이상의 독립변수로 표현되면서 또한 각 변수에 대한 미분을 포함하는 편미분 방정식으로 표현되므로, 분포정수계에 직접 최적제어 논리를 도입하는 것은 매우 어렵다. 따라서 분포정수계를 특정 동작점(equilibrium point)에서 집중정수계로 변환한 후에 기존의 최적제어방법을 도입하는 방식이 사용되었으나[4-5], 이 경우에는, 매우 큰 차원의 시스템으로 변환되기 때문에 제어기의 설계가 어렵고, 분산형 제어이론을 도입 할 경우 분산된 각 부 시스템간의 상호 정보 전달 관계의 처리에 있어서 복잡한 과정을 거쳐야 하는 어려움이 있다.

본 연구에서 제시하고자하는 새로운 알고리즘은 월쉬 함수 고유특성을 그대로 유지할 수 있는 유한 급수 전개 방법을 이용하는 것이며, 계산의 편리성을 위하여 월쉬함수 펠리베열로 구성된 고속 월쉬 변환[6]을 사용하는 것이다.

본 연구에서 적용한 Picard의 반복연산법[7]은, 시스템의 해석을 위해 상태방정식을 적분방정식으로 변환하고 적분 항에 포함된 미지의 상태벡터를 최초 초기조건으로 가정하여 적분

방정식으로부터 상태벡터를 구하고, 이 값을 다시 적분 항에 포함된 상태벡터에 치환하여 새롭게 수정된 상태벡터를 구하는 반복연산법으로, 오차가 0으로 수렴될 때의 상태벡터를 찾아내는 것이다. 또한 월쉬 함수의 특성을 이용하여 미분방정식을 간략화 된 대수방정식으로 변환하여 처리할 수 있도록 하였다. 그리고 월쉬 함수를 도입할 때 수반되는 적분연산행렬이 많은 '0' 요소를 포함하는데 착안하여 고차적분연산행렬을 직접 사용하지 않고 대응되는 요소만을 이용하여 리카티방정식의 해 및 시스템의 해를 보다 간편하게 결정할 수 있음을 보였다.

2. 펠리베열 고속월쉬변환

2.1 월쉬함수 및 월쉬함수의 변환[6]

월쉬함수와 같은 직교함수는 미분방정식으로 표현되는 물리계를 간략화 된 대수방정식으로 표현하여 시스템 해석 및 제어 문제의 해를 구하는 방식이 널리 이용되고 있다. 월쉬함수는 함수의 발생순서의 배열에 따라 세 가지 형태로 분류되는데, 시퀀시(Sequency)배열, 펠리(Paley)배열, 그리고 하다마드(Hadamard)배열로 나뉜다. 월쉬함수는 배열방식에 관계없이 $m (= 2^p, p=0, 1, 2, \dots)$ 개의 함수로 하나의 완전집합을 이루며, 본 연구에서는 시스템이론 및 제어이론에 주로 이용되는 펠리배열 월쉬함수를 이용한다. 펠리배열 월쉬함수는 Rademacher함수(이하, Rad함수)의 연속적인 곱에 의해 발생되는 순서에 따라 배열되는 월쉬함수를 말한다. Rad함수는 다음과 같이 표현되며

$$Rad(i, t) = \text{sign}[\sin(2^i \pi t)] \quad (2.1)$$

펠리배열 월쉬함수와의 관계는 다음과 같다.

* 正 會 員 : 프라임테크 선임연구원
** 正 會 員 : 慶星大 電氣電子및컴퓨터工學部 教授 · 工博
*** 正 會 員 : 成均館大 電氣電子및컴퓨터工學部 教授 · 工博
接受日字 : 2001年 9月 12日
最終完了 : 2001年 10月 5日

$$Pal(n, i) = \prod_{l=1}^i Rad(i, l)^{b_l} \quad (2.2)$$

단, $n=0, 1, \dots, m-1$, $p=\log_2 m$

여기서 b_i 는 n 을 2진수로 표현할 때의 각 자릿수 값으로 n 은 다음과 같이 표현된다.

$$n = \boxed{b_p} \dots \boxed{b_2} \boxed{b_1} \quad (2.3)$$

그리고 월쉬함수는 구간 $[0, T]$ 에서 다음과 같은 직교특성(orthogonality)을 갖고 있다.

$$\int_0^T Pal(i, t) Pal(j, t) dt = \begin{cases} T, & (i=j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases} \quad (2.4)$$

단, $i, j=0, 1, \dots, m-1$

또한 m 개의 월쉬함수로 표현되는 함수 $x(t)$ 는, 월쉬함수가 부분적으로 연속인 함수값으로 구성되기 때문에, 부분적으로 연속인 형태로 표현된다. 이때 i 번째 세부구간에서의 $x(t)$ 의 값 \bar{x}_i 는 다음과 같다.

$$\bar{x}_i = \sum_{n=0}^{m-1} X_n Pal(i, n) \quad (i=0, 1, \dots, m-1) \quad (2.5)$$

또한 n 번째 월쉬계수 X_n 은 다음과 같다.

$$X_n = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \bar{x}_i Pal(n, i) \quad (n=0, 1, \dots, m-1) \quad (2.6)$$

여기서 $Pal(n, i)$ 는 n 번째 월쉬함수에 대한 i 번째 세부구간에서의 값이다. 식(2.5)를 이산월쉬역변환이라 하고, 식(2.6)을 이산월쉬변환이라 한다.

2.2 펄리베열 고속월쉬변환

고속월쉬변환은 이산월쉬변환을 보다 신속하게 처리하기 위해 사용된다. 월쉬함수 m 항 전개를 이용하는 경우 모든 월쉬함수는 m 개의 세부구간에서 +1 혹은 -1의 값만으로 구성되므로 각 월쉬계수들은 원 함수의 이산값들의 가·감산에 의하여 간단히 계산할 수 있다. 고속월쉬변환 알고리즘은 Welch과 Guinn에 의해 제시되었으며 고속푸리에변환(fast Fourier transform)의 주파수축을 알고리즘(decimation in frequency algorithm)을 기초로 하여 개발되었다[6,8].

고속월쉬변환 알고리즘은 그림 2.1과 같으며 그림에서 점선은 감산을 나타내고 실선은 가산을 나타낸다. 그림에서와 같이 고속월쉬변환은 다음의 과정을 따른다.

- [1] 월쉬함수 m 항 전개를 이용하는 경우 고속월쉬변환은 $\log_2 m$ 개의 단으로 나눈다.
- [2] 최초의 단($p=0$)에 \bar{x}_i 를 비트 자리바꿈(bit-reverse)하여 증가순서대로 재배열하고 p 번째 단과 $p-1$ 번

때 단과의 관계는 다음과 같다.

$$x_{(h)}^p = x_{(h)}^{p-1} + x_{(j+h)}^{p-1} \quad (2.7)$$

$$x_{(j+h)}^p = x_{(h)}^{p-1} - x_{(j+h)}^{p-1} \quad (2.8)$$

단, $j = m/2^p$, $h = l + k \cdot 2^v$, $k=0, 1, \dots, 2^{p-1}-1$,
 $l=0, 1, \dots, j-1$, $v = \log_2(j+1)$

- [3] 고속월쉬변환과 역변환은 똑같은 과정에 의해 이루어지며 식(2.6)에서 보듯이 고속월쉬변환의 경우에는 식(2.7), (2.8)의 계산결과에 $1/m$ 을 곱하면 된다.

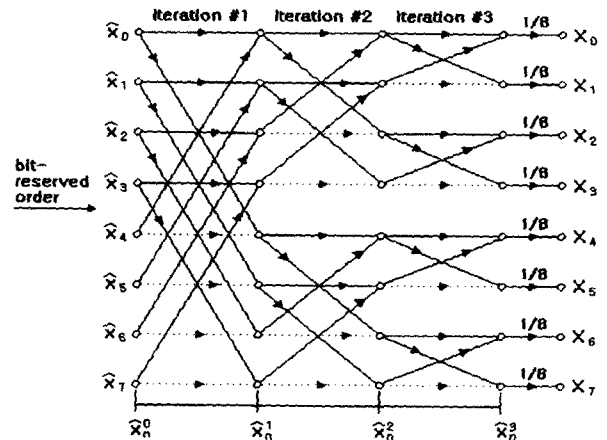


그림 2.1 고속월쉬변환 신호흐름선도

Fig. 2.1 The flow diagram for a paley-order fast Walsh transform

월쉬함수 m 항 전개를 이용하는 경우 고속월쉬변환은 $p (= \log_2 m)$ 개의 단계가 필요하고 각 단계에서 m 번의 가·감산이 필요하므로 총 $m \log_2 m$ 번의 가·감산을 통하여 이루어진다.

3. 분포정수계의 집중정수 모델링

3.1 분포정수계의 집중정수 모델링과 평가함수의 모델링

분포정수계를 집중정수계로 변환하는 방법에는 공간분할 기법[9], 갤러킨(Galerkin) 접근 방법[10-11], 리즈(Ritz) 접근방법[11] 등이 있다. 본 연구에서는 첫 번째 방법인 공간분할기법을 사용하여 분포정수계를 집중정수계로 모델링하였다.

분포정수계에서 식(3.1)로 표현되는 평가함수를 최소화하는 제어입력 $u(y, t)$ 를 결정하고자 할 때, 평가함수를 집중정수모델의 평가함수로 근사화시켜야 하는 문제를 포함하고 있다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\{ \int_0^{y_f} [x^2(y, t) + u^2(y, t)] dy \right\} dt \quad (3.1)$$

이 평가함수를 공간분할기법에 의하여 근사화 하면 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \Delta y \int_0^T [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (3.2)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

4. 펠리베열 고속 월쉬 변환에 의한 분포정수계의 해석 및 최적제어

4.1 펠리베열 고속 월쉬 변환에 의한 상태방정식의 해

다음과 같이 표현되는 시스템의 해를 Picard의 반복연산법에 의하여 구하는 문제를 고려한다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.1)$$

단, $\mathbf{x}(t)$ 는 n 차 상태벡터, $\mathbf{u}(t)$ 는 r 차 입력벡터

식(4.1)을 적분하고 최초 해를 $\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}_0$ 으로 가정하여 대입한 후 반복 적용할 때 k 번째의 결과는 다음과 같다.

$$\mathbf{x}^k(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t f(\mathbf{x}^{k-1}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad (4.2)$$

주어진 식(4.1)의 상태방정식이 Lipschitz 조건을 만족한다면 Picard에 의한 식(4.2)의 반복 연산에 의해 다음을 만족하는 식(4.1)의 미분방정식의 해가 존재한다[7].

$$e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \| \mathbf{x}^k(t) - \mathbf{x}^{k-1}(t) \| \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

다음의 식(4.4)와 같이 주어지는 n 차 선형계의 해는 다음과 같이 결정 할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (4.4)$$

식(4.4)를 적분하고 최초 해를 $\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}_0$ 으로 가정하여 대입한 후 반복 적용할 때 k 번째의 결과는 다음과 같다.

$$\mathbf{x}^k(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A} \int_0^t \mathbf{x}^{k-1}(\tau) d\tau + \mathbf{B} \int_0^t \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (4.5)$$

단, $k=1, 2, 3, \dots$

주어진 식(4.4)의 상태방정식이 Lipschitz 조건을 만족한다면 Picard에 의한 식(4.5)의 반복 연산에 의해 식(4.5)를 만족하는 식(4.4)의 미분방정식의 해가 존재한다. $\mathbf{x}^{k-1}(t)$ 를 알고 있다고 할 때, 구간 $[0, T]$ 에서 월쉬 함수를 적용하여 식(4.5)의 해를 구하는 문제를 고려한다. 위 식(4.5)의 $\mathbf{x}^k(t)$ 와 초기조건 및 $\mathbf{u}(t)$ 를 각각 월쉬 함수로 나타낸다.

$$\mathbf{x}^k(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{X}_i^k \text{Pal}(i, t) = \mathbf{X}^k \text{Pal}(t) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{X}_{0,i} \text{Pal}(i, t) = \mathbf{X}_0 \text{Pal}(t) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{U}_i \text{Pal}(i, t) = \mathbf{U} \text{Pal}(t) \quad (4.8)$$

단, $\text{Pal}(t)$ 는 m 개의 월쉬 함수로 구성되는 m 차 월쉬 벡터를 나타낸다. $\mathbf{X}^k = [\mathbf{X}_0^k, \mathbf{X}_1^k, \dots, \mathbf{X}_{m-1}^k]$ 이며, 상태벡터 $\mathbf{x}^k(t)$ 의 월쉬 계수($n \times m$)행렬로 결정해야 할 값이다. 또한 \mathbf{X}_i^k 는 상태벡터 $\mathbf{x}^k(t)$ 의 i 번째 월쉬 계수로 n 차 벡터이다.

초기조건에 대한 월쉬 계수행렬은 $\mathbf{X}_0 = [\mathbf{X}_{00}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]$ 으로 첫 번째 계수만 $\mathbf{X}_{00} = \mathbf{x}_0$ 의 값을 취하며 나머지는 모두 $\mathbf{0}$ 의 값을 취한다. \mathbf{U}_i 는 $\mathbf{u}(t)$ 에 대한 i 번째 월쉬 계수로 r 차 벡터이고, $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{m-1}]$ 는 $\mathbf{u}(t)$ 에 대한 월쉬 계수행렬($r \times m$)이다.

식(4.6)-(4.8)의 관계를 식(4.5)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^k \text{Pal}(t) &= \mathbf{X}_0 \text{Pal}(t) + \mathbf{A} \int_0^t \mathbf{X}^{k-1} \text{Pal}(\tau) d\tau + \mathbf{B} \int_0^t \mathbf{U} \text{Pal}(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{X}_0 \text{Pal}(t) + \mathbf{A} \mathbf{X}^{k-1} \int_0^t \text{Pal}(\tau) d\tau + \mathbf{B} \mathbf{U} \int_0^t \text{Pal}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.9)$$

위 식(4.9)에서 월쉬 함수의 적분은 시간 t 의 함수이다. 적분 가능한 임의의 함수를 월쉬 함수로 전개할 수 있는 것과 마찬가지로 월쉬 함수의 적분 역시 월쉬 함수로 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\int_0^t \text{Pal}(\tau) d\tau = \mathbf{P}_m \text{Pal}(t) \quad (4.10)$$

\mathbf{P}_m 은 펠리베열 월쉬함수의 적분연산행렬로 다음과 같다.

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\frac{m}{2}} & -\frac{1}{2m} \mathbf{I}_{\frac{m}{2}} \\ \frac{1}{2m} \mathbf{I}_{\frac{m}{2}} & \mathbf{0}_{\frac{m}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{단, } \mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \quad (4.11)$$

여기서 m 은 전개항수를 나타내며, 식에서 첨자는 해당 정방행렬의 크기를 나타낸다. \mathbf{P} 는 정방행렬이고, \mathbf{I} 는 단위행렬이다. 앞으로 적분연산행렬은 편의상 \mathbf{P} 로 표기한다. 식(4.9)에 월쉬 함수의 적분연산행렬을 도입하고 월쉬 벡터를 소거하면 다음의 식(4.12)로 표시되는 대수 방정식으로부터 $\mathbf{x}^k(t)$ 의 월쉬 계수행렬인 \mathbf{X}^k 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{X}^k = \mathbf{X}_0 + \mathbf{A} \mathbf{X}^{k-1} \mathbf{P} + \mathbf{B} \mathbf{U} \mathbf{P} \quad (4.12)$$

그런데 적분연산행렬 \mathbf{P} 는 많은 $\mathbf{0}$ 요소를 포함하고 있다. 월쉬 함수 $m(=2^n)$ 항 전개를 이용하는 경우 m^2 개의 요소

중 $2m-1$ 개의 요소만이 $\pm 2^{-(n+1)}$ ($n=0, 1, \dots, p$)의 값을 취하므로 이러한 특성을 이용하면 식(4.12)의 \mathbf{X}^k 를 다음과 같이 구할 수 있다. 단, $\mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{X}^{k-1}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}\mathbf{U}$ 이다.

1) $i=0$ 인 경우

$$\mathbf{X}_i^k = \mathbf{X}_{00} + \frac{1}{2^{i+1}} [\mathbf{G}_i^{k-1} + \mathbf{H}_i] + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{j+1}} [\mathbf{G}_{i+2^j-1}^{k-1} + \mathbf{H}_{i+2^j-1}] \quad (4.13)$$

2) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ (단, $n=1, 2, \dots, p-1$)인 경우

$$\mathbf{X}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [\mathbf{G}_{i-2^{n-1}}^{k-1} + \mathbf{H}_{i-2^{n-1}}] + \sum_{j=n+1}^p \frac{1}{2^{j+1}} [\mathbf{G}_{i+2^j-1}^{k-1} + \mathbf{H}_{i+2^j-1}] \quad (4.14)$$

3) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ (단, $n=p$)인 경우

$$\mathbf{X}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [\mathbf{G}_{i-2^{n-1}}^{k-1} + \mathbf{H}_{i-2^{n-1}}] \quad (4.15)$$

식(4.13)-(4.15)에서 결정된 \mathbf{X}^k 를 고속 윌쉬 역변환하면 $\mathbf{x}^k(t)$ 를 구할 수 있는데, 전 단계에서 구한 $\mathbf{x}^{k-1}(t)$ 를 비교하여 식(4.5)의 조건을 만족하는 $\mathbf{x}^k(t)$ 가 식(4.4)의 해가 된다.

이상의 과정과 같이 본 연구의 방법은 역행렬의 연산이 필요 없으며, 고속 윌쉬 변환과 역변환을 이용하기 때문에 매우 간편하게 시스템의 해를 구할 수 있음을 알 수 있다.

지금까지 구한 $\mathbf{x}(t)$ 는 구간 $[0, T]$ 에서의 값이다. $t=T$ 일 때는 윌쉬 함수를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{X} \int_0^T \text{Pal}(\tau) d\tau + \mathbf{B}\mathbf{U} \int_0^T \text{Pal}(\tau) d\tau \quad (4.16)$$

단, \mathbf{X} 와 \mathbf{U} 는 각각 $\mathbf{x}(\tau)$ 와 $\mathbf{u}(\tau)$ 의 윌쉬 계수행렬이다. 또한 윌쉬 함수 정의구간 $[0, T]$ 에서 윌쉬 함수의 적분은 다음과 같으므로

$$\int_0^T \text{Pal}(i, t) dt = \begin{cases} T, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

식(4.16)은 다음과 같다.

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_0 + T(\mathbf{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{B}\mathbf{U}_0) \quad (4.18)$$

단, \mathbf{X}_0 와 \mathbf{U}_0 는 $\mathbf{x}(\tau)$ 와 $\mathbf{u}(\tau)$ 의 $\text{Pal}(0, \tau)$ 의 계수(n 차 벡터)

여기서 $\mathbf{x}(T)$ 는 다음 구간의 초기조건으로 이용될 수 있다.

4.2 펄리베열 고속 윌쉬 변환에 의한 분포정수계의 최적 제어

다음의 식(4.19)와 같은 편미분 방정식이나 식 (4.20)과 같

은 분포정수계에서,

$$\frac{\partial x(y, t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 x(y, t)}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial x(y, t)}{\partial y} + a_0 x(y, t) + b_0 u(y, t) \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}(y, t)}{\partial t} = \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{x}(y, t)}{\partial y} + \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(y, t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(y, t) \quad (4.20)$$

최적제어문제는 공간분할기법에 의한 집중정수 모델링을 통하여 다음의 식 (4.21)과 같이 표현되는 시스템에서, 식 (4.21)의 평가함수 J 를 최소화하도록 하는

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.21)$$

최적제어 문제로 변형된다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt \quad (4.22)$$

최적제어 벡터 $\mathbf{u}(t)$ 는 최대 원리에 의해 다음의 식 (4.23)과 같다.

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \quad (4.23)$$

4.2.1 고속 윌쉬 변환에 의한 리카티해 및 최적제어입력의 결정

식(4.23)에서 $\mathbf{K}(t)$ 는 리카티해로 다음의 2점 경계치 문제로부터 그 해를 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

단, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\boldsymbol{\lambda}(T) = 0$

$\tau = T - t$ 로 치환하고

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \boldsymbol{\lambda}(\tau) \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \boldsymbol{\lambda}(\tau) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

단, $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_0$, $\boldsymbol{\lambda}(0) = 0$

상대천이 행렬을

$$\boldsymbol{\Phi}(\tau) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{11}(\tau) & \boldsymbol{\Phi}_{12}(\tau) \\ \boldsymbol{\Phi}_{21}(\tau) & \boldsymbol{\Phi}_{22}(\tau) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

라 하면 $\boldsymbol{\lambda}(0) = 0$ 이므로 식(4.25)의 해를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\Phi}_{11}(\tau) \mathbf{x}(0) \quad (4.27)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau) = \boldsymbol{\Phi}_{21}(\tau) \mathbf{x}(0) \quad (4.28)$$

식(4.27)에서 $\mathbf{x}(0)$ 를 식(4.28)에 대입하면

$$\lambda(\tau) = \Phi_{21}(\tau) \Phi_{11}^{-1}(\tau) \mathbf{x}(\tau) \quad (4.29)$$

최적제어벡터는 식(4.23)과 식(4.28)에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \Phi_{21}(T-t) \Phi_{11}^{-1}(T-t) \mathbf{x}(t) \\ &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\text{단, } \mathbf{K}(\tau) = \Phi_{21}(\tau) \Phi_{11}^{-1}(\tau)$$

따라서 식(4.26)의 상태천이행렬을 구함으로써 리카티해를 결정할 수 있다. 상태천이행렬은 식(4.25)-(4.28)로부터 알 수 있듯이 다음의 초기조건을 이용하여

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{단, } p=1, 2, \dots, n) \quad (4.31)$$

식(4.25)의 해를 구함으로써 결정할 수 있다. 단, \mathbf{e}_p 는 p번째 요소만 1이고 나머지 요소는 모두 0인 n차 열 벡터이다. 식(4.25)의 초기조건을 식(4.31)로 하고 $\mathbf{x}(\tau)$ 와 $\lambda(\tau)$ 를 구하면 $\Phi_{11}(\tau)$ 와 $\Phi_{21}(\tau)$ 의 p번째 열 벡터가 구해진다. p 번째 열벡터는 다음의 과정으로 결정된다.

식(4.25)를 적분하고 최초 해를 $\mathbf{y}^0(t) = \mathbf{y}_0$ 로 가정하여서 해를 구하고 반복 적용할 때 k번째의 결과는 다음과 같다.

$$\mathbf{y}^k(\tau) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{F} \int_0^\tau \mathbf{y}^{k-1}(t) dt \quad (4.32)$$

$$\text{단, } \mathbf{y}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix}, \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}^k(\tau)$ 와 초기조건을 각각 월쉬 함수로 전개하고 적분연산행렬을 도입한 후 월쉬 벡터를 소거하면 다음의

$$\mathbf{Y}^k = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{F} \mathbf{Y}^{k-1} \mathbf{P} \quad (4.33)$$

대수방정식으로부터 $\mathbf{y}^k(\tau)$ 의 월쉬 계수행렬 \mathbf{Y}^k 을 구할 수 있다. 식(4.33)의 계산은 다음과 같이 이루어진다.

(1) $i=0$ 인 경우

$$\mathbf{Y}_i^k = \mathbf{Y}_{00} + \mathbf{F} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{j+1}} \mathbf{Y}_{2^j}^{k-1} \quad (4.34)$$

(2) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ ($n=1, 2, \dots, p-1$ 인 경우)

$$\mathbf{Y}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} \mathbf{F} \mathbf{Y}_{i-2^{n-1}}^{k-1} + \mathbf{F} \sum_{j=n+1}^n \frac{1}{2^{j+1}} \mathbf{Y}_{i+2^j}^{k-1} \quad (4.35)$$

(3) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ ($n=p$ 인 경우)

$$\mathbf{Y}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} \mathbf{F} \mathbf{Y}_{i-2^{n-1}}^{k-1} \quad (4.36)$$

이상에서 구한 \mathbf{Y}^k 로부터 고속월쉬 역변환을 이용하여 $\mathbf{y}^k(\tau)$ 를 구한 다음 아래의 오차가 0으로 수렴될 때까지 위의 과정을 반복한다.

$$\mathbf{e}(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}^k(\tau) - \mathbf{y}^{k-1}(\tau)\| \quad (4.37)$$

위 오차 $\mathbf{e}(\tau)$ 가 0으로 수렴될 때의 $\mathbf{y}^k(\tau)$ 가 식(4.39)의 해인 $\mathbf{y}(\tau)$ 이다. 이상에서 구한 $\mathbf{y}(\tau)$ 는 식(4.31)의 초기조건에 의한 결과로 $\Phi_{11}(\tau)$ 와 $\Phi_{21}(\tau)$ 의 p번째 열 벡터와 같다. 그러므로 식(4.24)의 모든 초기조건에 대한 식(4.38)의 해를 구함으로써 상태천이행렬 $\Phi_{11}(\tau)$ 와 $\Phi_{21}(\tau)$ 를 결정할 수 있고 이로부터 리카티해, 최적제어입력을 구할 수 있다.

4.2.2 고속 월쉬 변환에 의한 최적상태 결정

또한 최적상태는 4.2.1절에서 구해진 최적제어입력을 이용하여 다음의 과정을 따라 구할 수 있다. 먼저 구해진 식(4.23)을 식(4.21)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t)] \mathbf{x}(t) \quad (4.38)$$

식(4.38)의 양변을 적분하여 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\gamma}(\tau) d\tau \quad (4.39)$$

$$\text{단, } \boldsymbol{\gamma}(\tau) = [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(\tau)] \mathbf{x}(\tau)$$

식(4.39)의 해를 최초 $\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}_0$ 로 가정하여 k번 반복 적용하고, 양변의 벡터들을 각각 월쉬 변환한 다음 적분연산행렬을 도입하고 월쉬 벡터를 소거하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{X}^k = \mathbf{X}_0 + \mathbf{I}^{k-1} \mathbf{P} \quad (4.40)$$

단, \mathbf{I}^{k-1} 은 $\boldsymbol{\gamma}^{k-1}(\tau)$ 의 월쉬 계수행렬

이 대수 방정식으로부터 $\mathbf{x}^k(t)$ 의 계수 \mathbf{X}^k 를 구할 수 있으며 그 과정은 다음과 같다.

(1) $i=0$ 인 경우

$$\mathbf{X}_i^k = \mathbf{X}_{00} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{j+1}} \mathbf{I}_{2^j}^{k-1} \quad (4.41)$$

(2) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ ($n=1, 2, \dots, p-1$ 인 경우)

$$\mathbf{X}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} \mathbf{I}_{i-2^{n-1}}^{k-1} + \sum_{j=n+1}^n \frac{1}{2^{j+1}} \mathbf{I}_{i+2^j}^{k-1} \quad (4.42)$$

(3) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ (단, $n=p$)인 경우

$$\mathbf{X}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} \mathbf{I}_{i-2^{n-1}}^{k-1} \quad (4.43)$$

식(4.41)~(4.43)에서 구한 \mathbf{X}^k 를 고속월쉬 역변환하면 $\mathbf{x}^k(t)$ 를 구할 수 있으며 전 단계의 반복연산에서 구한 $\mathbf{x}^{k-1}(t)$ 와 비교하여 다음의 오차가 0으로 수렴할 때까지 반복한다.

$$e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \| \mathbf{x}^k(t) - \mathbf{x}^{k-1}(t) \| \quad (4.44)$$

식(4.44)의 오차가 0으로 수렴할 때의 $\mathbf{x}^k(t)$ 가 식 (4.38)의 해인 $\mathbf{x}(t)$ 가 되며, 바로 최적상태가 된다.

5. 정 속도 이동 금속판의 열 교환 시뮬레이션

일정한 속도로 열전달이 진행되는 얇은 금속판을 가열시킬 때 그림 5.1의 금속판의 열 교환에 대하여 고려한다.

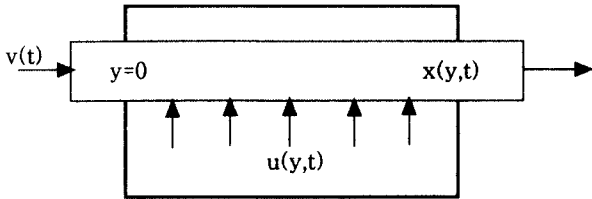


그림 5.1 정 속도로 이동하는 금속판의 분포적인 가열
Fig. 5.1 Distributed Heating Thin Metal Moving at Constant Velocity

그림 5.1에서 $x(y,t)$ 는 일정한 속도 $v(t)$ 로 통과하는 금속체의 온도이고, $u(y,t)$ 는 분포적으로 가해지는 가열입력이다. 이에 대한 열전달 편미분 방정식은 식 (5.1)과 같다.

$$\frac{\partial x(y,t)}{\partial t} = c \frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial y^2} - v(t) \frac{\partial x(y,t)}{\partial y} + u(y,t) \quad (5.1)$$

식 (5.1)에서 c 는 열의 확산계수이고 $v(t)$ 는 속도이며, 각 요소의 값은 다음과 같다고 하자.

$$x(y,t) = 1, \quad x(0,t) = 0, \quad x(t_f, y) = 0$$

$$\left. \frac{\partial x(y,t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial x(y,t)}{\partial y} \right|_{y=y_f} = 0$$

$$y_f = 6.0, \quad \Delta y = 1.5$$

$c=0.5, v(t)=1.0$ 일 때 다음과 같은 평가함수를 최소화 하는 최적제어를 수행한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\{ \int_0^{y_f} [x^2(y,t) + u^2(y,t)] dy \right\} dt \quad (5.2)$$

식(5.1)을 공간분할기법을 이용하여 집중정수모델로 나타내면 다음의 n 차 상태방정식으로 표현된다. 이때 증분의 크기는 $\Delta y = \frac{y_f}{n-1}$ 이다. $n=5$ 이라 할 때

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (5.3)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{I},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4/9 & -4/9 & 0 & 0 & 0 \\ 2/9 & 2/9 & -4/9 & 0 & 0 \\ 0 & 2/9 & 2/9 & -4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 2/9 & 2/9 & -4/9 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 & -2/9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

또한 식(5.2)는 다음과 같이 표현된다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt \quad (5.4)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} = 1.5 \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

그림 5.2, 5.4는 정속도로 이동 금속판을 표현한 분포정수계의 최적 제어 입력을, 그림 5.3, 5.5는 분포정수계의 최적 상태 제어를 4장의 과정에 의해 얻은 결과로, 분포정수계를 5차의 집중정수계로 모델링하고 월쉬 함수 64항 전개를 이용하여 얻은 결과이다.

그림 5.3에서 5개의 상태변수는 일정한 속도 $v(t)$ 로 통과하는 금속체의 온도분포 $x(y,t)$ 를 4개로 분할하여 집중정수계로 모델링할 때 나타나는 상태변수이다. 즉 $x_1(t)$ 는 $y=1$ 일 때의 금속체의 온도변화인 $x(1,t)$ 를 의미하며, $x_2(t)$ 는 $y=1+\Delta y$ 일 때의 금속체의 온도변화인 $x(2,t)$ 를 의미한다. 나머지 상태변수도 마찬가지이다.

이들 집중정수 모델에 대한 상태변수를 합성하여 분포정수계의 온도분포를 나타내는 변수 $x(y,t)$ 를 3차원 그래프로 나타내면 그림 5.4와 같다. 이와 같은 제적에 대한 최적 제어 입력 값을 그림 5.5에 나타냈다. 그림 5.2의 제어 입력들은 각 지점에서의 가열입력을 나타낸다. $u_1(t)$ 는 $y=1$ 에서의 가열입력 즉 $u(1,t)$ 를 의미하며, $u_2(t)$ 는 $y=1+\Delta y$ 일 때의 가열입력 $u(2,t)$ 를 의미한다. 나머지 가열입력도 마찬가지이다.

6. 검토 및 고찰

본 연구의 적용 예에서는 Picard의 반복연산에서 나타나는 오차의 수렴 한계값을 10^{-8} 으로 하였을 때의 결과이다. 적용 예와 유사한 연구 결과는 A.P. Sage[12]와 M.L. Wang[13] 등에 의해 얻어진바 있는데, Sage는 단순히 공간분할기법만을 사용하여 분포정수계를 집중정수계로 모델링하여 일반적인 최적제어를 수행하였고, Wang은 레젠드라 함수의 특성을 이용하여 레젠드라 계수들을 상태벡터로 구성되는 집중정수 모델을 구성하고 여기에 직접 최적제어를 적용하여 같은 결과를 얻었다. 또한 이명규[14]는 분산형 최적 제어를, 이한석[15]과 이승[16]은 계층별 최적 제어를 적용하여 유사한 결과를 얻었다.

표 6.1은 2점 경계치 문제에서 나타나는 반복연산의 횟수와 오차의 수렴여부를 나타낸다.

7. 결 론

본 연구에서는 정속도로 이동하는 분포정수계를 공간분할기법을 사용하여 집중정수계로 모델링하고 고속 월쉬 변환과 Picard의 반복연산법을 고차 편미분 방정식과 행렬 편미분 방정식에 적용하여 분포정수계의 최적제어를 간편하게 수행할 수 있는 새로운 알고리즘을 제시하였다. 본 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

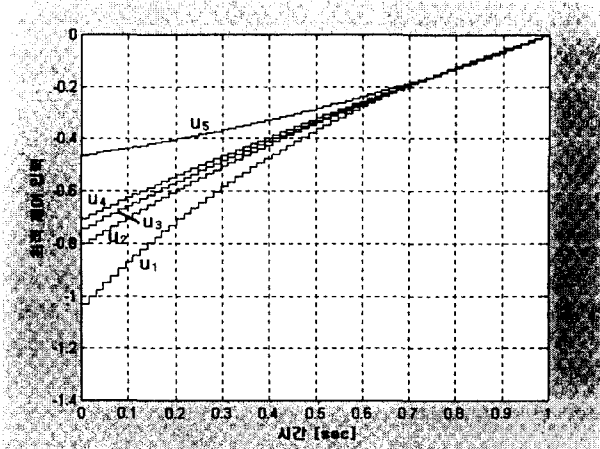


그림 5.2 최적 제어 입력(2 차원)
Fig. 5.2 Optimal Control Input(2D)

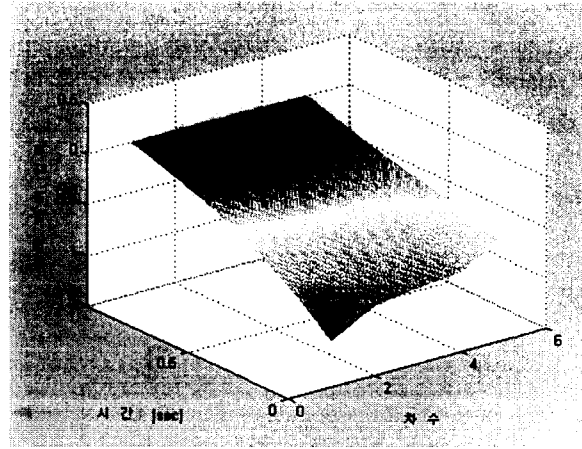


그림 5.5 최적 제어 입력(3 차원)
Fig. 5.5 Optimal Control Input(3D)

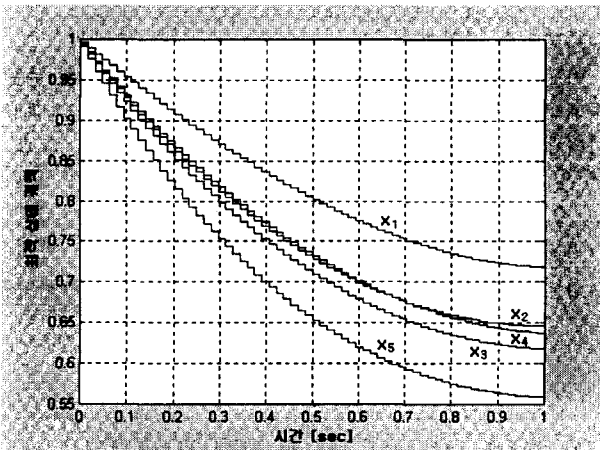


그림 5.3 최적 상태 궤적(2차원)
Fig. 5.3 Optimal State Trajectory(2D)

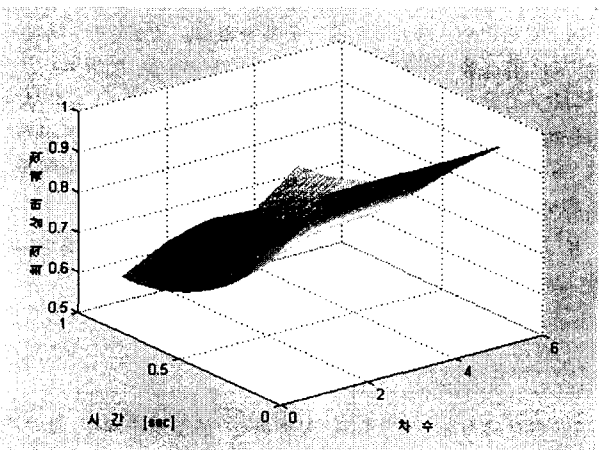


그림 5.4 최적 상태 궤적(3차원)
Fig. 5.4 Optimal State Trajectory(3D)

표 6.1 오차의 수렴정도

Table 6.1 Convergence of Error ($e(t) \leq 10^{-8}$)

| 전개 항수 반복 횟수 | m=16 | m=32 | m=64 |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | .168463E-01 | .842933E-02 | .421544E-02 |
| 2 | .523788E-02 | .261893E-02 | .130945E-02 |
| 3 | .317020E-03 | .157699E-03 | .787484E-04 |
| 4 | .302051E-04 | .148406E-04 | .738783E-05 |
| 5 | .952208E-06 | .457518E-06 | .226478E-06 |
| 6 | .303200E-07 | .140695E-07 | .000000E-00 |
| 7 | .000000E-00 | .000000E-00 | |

- (1) 다른 직교 함수(월쉬 함수 단일항 전개 방법 등)는 세부 구간 수만큼의 시스템차수에 해당되는 수많은 역행렬의 계산을 필요로 하나, 본 연구방법에서 제시한 펠리베열 고속 월쉬 변환 기법을 사용하면 이러한 역행렬의 연산이 필요 없다.
- (2) 펠리베열 고속 월쉬 변환과 Picard의 반복연산법에 의한 단순한 가·감산처리에 의하여, 분포정수계를 집중정수계로 모델링할 경우, 시스템 차수의 증가에 따른 연산량의 증가에 무관하게 시스템의 해석 및 최적제어를 수행할 수 있다.
- (3) 월쉬 함수를 도입할 때 수반되는 고차의 펠리베열 적분 연산행렬이 많은 0 요소를 포함하는데 착안하여 고차 적분연산행렬을 직접 이용하지 않고 대응되는 요소만을 이용함으로써 리카티 방정식의 해 및 시스템의 해를 보다 간편하게 결정할 수 있다.

위에서 언급한 결론을 통하여 모델링된 분포정수계의 최적제어를 수행함에 있어 기존의 분산형 제어나 계층별 제어 등의 기법을 사용하지 않고도 우수한 결과를 얻을 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] Seidman, T.I., Approximation Methods for Distributed Parameter Systems, Distributed Parameter Systems, Pergamon Press, Elmsford, NY, pp273, 1983
- [2] Kitamura, s., Y.Taniguchi, "Parameter Estimation of One and Two-Dimentional Heat Conduction Processes using a Microcomputer", Int. J. of Control, Vol.34, pp955, 1981
- [3] K. Watanabe, M. Iwasaki, "A Fast Computational Approach in Optimal Distributed Parameter State Estimation", Trans.of Asme, Vol.105, pp1-10, 1983
- [4] D.J. Cooper, "Comparition of linear distributed parameter filters to lumped approximants", AICHE J., Vol.32, pp.186-194, 1986
- [5] T.J. Godon, "Simple method for design of Lyapunov functional in distributed parameter systems", Int. J. Control, Vol.46, pp.709-717, 1987
- [6] 안두수, 직교함수와 응용, 복두출판사, 1997
- [7] Ronald R.Mohler, Nonlinear Systems, vol.1, Prentice Hall, 1991
- [8] K.G.Beauchamp, Applications of Walsh and Related Functions, Academic Press, 1984
- [9] Koda, M., "Finite Difference Implementation of Distributed Parameter Filters", Automatica, Vol.15, pp.687, 1979
- [10] P. A. Orner, "Least square simulation of distributed parameter systems", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.20, pp.75-83, 1975
- [11] S. G. Tzafestas, "Design of distributed parameter optimal controllers and filters via Walsh-Galerkin expansions", Control System Lab. Uni. of Patras, Greece, pp.201-217, 1978
- [12] A.P. Sage, Optimal system control, Prentice-Hall, N. J., 1977
- [13] M.L.Wang, R.Y.Chang, "Optimal Control of Linear Distributed Parameter Systems by Shifted Legendre Polynomials", Trans.of ASME, Vol.105, pp.222-226, 1983
- [14] 안두수, 이명규, "분포정수계의 분산형 최적제어에 관한 연구", 대한전기학회 논문지, Vol 39, No.10, pp.1075-1085, 1990
- [15] 안두수, 이승 "Walsh 함수에 의한 분포정수계의 최적 제어입력 결정", 대한전기학회 논문지, 42권 8호, pp.114-123, 1993.
- [16] 이한석, 월쉬 함수를 이용한 비선형 대규모 시스템의 3계층 최적제어, 성균관대학교 박사 학위 논문, 1996.

저 자 소 개



김 태 훈 (金 泰 勳)

1971년 2월 1일 생. 1995년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1997년 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 1999년~현재 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 박사과정

Tel : 0331-290-7167

E-mail : taihoon@netsgo.com



이 명 규 (李 明 珪)

1960년 12월 15일 생. 1982년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1984년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1990년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박). 1991~현재 경성대 전기전자 및 컴퓨터공학부 교수

Tel : 051-620-4772

E-mail : mklee@star.kyungsung.ac.kr



안 두 수 (安 斗 守)

1937년 6월 9일 생. 1960년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1964년 서울대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1982년 중앙대 대학원 전기공학과 졸업(공학박). 1971~현재 성균관대 전기전자 및 컴퓨터공학부 교수

Tel : 0331-290-7101

E-mail : dsahn@ece.skku.ac.kr