

Dynamic Compensation Method for State Delayed Control Systems with Input Saturation

朴 鍾 久*
(Jong-Koo Park)

Abstract - A dynamic anti-windup method for state delayed control systems with input saturation is considered. Under the assumption that a linear controller has been designed for a state delayed control system based on the existing design technique which shows desirable nominal performance, an additional compensator is incorporated to provide a graceful performance degradation despite of input saturation. By regarding the difference of the controller states in the absence and presence of input saturation as an objective function, the dynamic compensator which minimizes it is determined explicitly. The proposed dynamic compensator is the closed form of plant and controller parameters. The proposed method not only provides graceful performance degradation, but it also guarantees the total stability of resulting systems. An illustrative example is provided to show the effectiveness of the proposed method.

Key Words : Saturation, state-delay, anti-windup, dynamic compensation

1. 서 론

제어입력신호가 그것의 제한치에 도달하는 경우, 애초의 페루프 시스템의 동특성은 왜곡되거나 소실되어 오버 슈트가 커지거나 정상 상태 도달 시간이 길어지는 등의 와인드업(windup) 현상이 일어난다. 입력제한 현상은 제어시스템에서 흔히 접하게 되는 일반적인 현상으로, 여러 연구자들에 의하여 최근까지 이의 효과적인 대처방법에 대한 많은 진전이 있었다[3],[6],[7]-[9].

발전된 제어이론을 실제로 대상 시스템에 적용하려할 때, 입력제한현상을 고려하지 않을 경우 예기치 못했던 상황에 직면할 수 있다. 제어가 설계 시 입력제한현상을 고려하는 두 가지 접근방법이 존재한다. 하나는 제어가 설계의 첫 단계에서부터 제어입력의 제한치를 고려하여 제어를 구성하는 방법이고, 다른 한 방법은 제어입력의 상한치를 고려하지 않고 제어를 설계한 후, 그로 인한 부정적인 영향을 감소시키는 적절한 와인드업방지(anti-windup) 보상기를 추가로 도입하는 방법이다.

대부분의 와인드업방지에 대한 연구결과를 보면 시스템에 존재하는 비선형은 오직 입력제한현상만이 존재한다는 가정 아래 문제해결을 도모하였다. 그러나 실제 제어환경에는 다양한 비선형 요소가 내재하기 마련이다. 비선형의 종류는 무수히 많은데 그 가운데서 또다른 대표적인 비선형으로서 시간지연(time-delay) 현상을 들 수 있다.

시스템 내에 존재하는 시간지연현상은 여러 가지로 모델링할

수 있는데, 단순히 제어입력신호가 지연되어 있는 경우에는 입력 변수에 시간지연 항을 도입하면 된다. 시간지연요소가 그와 같이 모델링될 수 없는 경우에는, 상태공간 표현식에서 상태시간지연으로 모델링하는 경우가 있다[1],[2],[4]. 제어입력신호의 포화현상과 입력시간지연현상이 동시에 존재할 경우의 와인드업 방지법에 대해서는 본 저자에 의하여 연구가 수행된 바 있다[9].

본 논문에서는 시간지연을 모델링하는 또다른 형태인 상태지연 시스템에 대한 와인드업 방지법에 대해 다룰 것이다. 그와 같은 시스템에 대한 연구방법으로서 표준적인 와인드업방지법을 적용하도록 한다. 즉 상태시간지연 만을 포함한 시스템에 대하여 기존의 제어가 설계기법으로 만족할 만한 응답을 주는 시스템이 구성되어 있다는 가정 하에, 입력제한 현상으로 인한 시스템의 안정도 훼손을 방지하고 성능저하를 완화해 주는 추가적인 동적 와인드업방지 보상기를 설계하는데 초점이 맞추어져 있다.

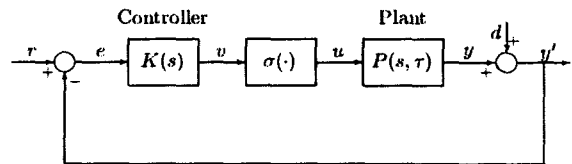


그림 1. 입력제한요소가 존재하는 상태지연 제어시스템.
Fig. 1. State-delayed control systems with input saturation.

2. 입력제한이 존재하는 상태지연 제어시스템 및 문제의 설정

그림 1에 입력제한이 존재하는 상태지연 제어시스템을 도시하였다. 여기서 플랜트와 제어기는 다음과 같은 최소의

* 正 會 員 : 成均館大 電氣電子 및 컴퓨터工學部 副敎授 · 工博
接受日字 : 2000年 9月 18日
最終完了 : 2001年 6月 25日

(minimal) 상태방정식으로 나타낼 수 있다.

(가) 플랜트 $P(s, \tau)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + A_d x_p(t-\tau) + Bu(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Cx_p(t) + Du(t), \quad (2)$$

$$u(t) = \sigma(v(t)), \quad \sigma(v(t)) \in \Psi_{R^n}. \quad (3)$$

(나) 제어기 $K(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_c(t) = Fx_c(t) + Ge(t), \quad (4)$$

$$v(t) = Hx_c(t) + Le(t), \quad (5)$$

$$e(t) = r(t) - y(t) - d(t). \quad (6)$$

여기서 τ 는 상태지연시간을 나타내며 알고있다고 가정한다. $r(t) \in R^n$ 는 기준입력, $u(t) \in R^m$ 는 제어입력, $y(t) \in R^n$ 는 출력, $v(t) \in R^m$ 는 제어기의 출력, $d(t) \in R^n$ 는 외부교란, $x_p(t) \in R^p$ 는 플랜트의 상태변수, 그리고 $x_c(t) \in R^q$ 는 제어기의 상태변수이다. 상태방정식을 구성하는 상수행렬들은 입출력 및 상태변수에 상응하는 차수를 갖는다. Ψ_{R^n} 은 R^n 공간상의 유한한 부분공간(bounded subspace of R^n space)으로서 그 기하학적인 모양은 다면체, 타원체 형태, 또는 그 외에 임의의 형태를 취할 수 있으며, $\sigma(\cdot): R^m \rightarrow \Psi_{R^m}$ 는 연속대응(continuous mapping)이다. 만약 $v(t) \in \Psi_{R^m}$ 이면, $\sigma(v(t)) = v(t)$ 이다. 그러나 $v(t) \notin \Psi_{R^m}$ 이면, $\sigma(v(t))$ 의 일부 요소는 Ψ_{R^m} 의 경계값을 가지고 그 나머지 원소는 내부값을 가지거나, 모든 원소들이 경계값을 가질 수 있다. 이러한 함수의 대표적인 것으로는 구동기의 포화 현상이다.

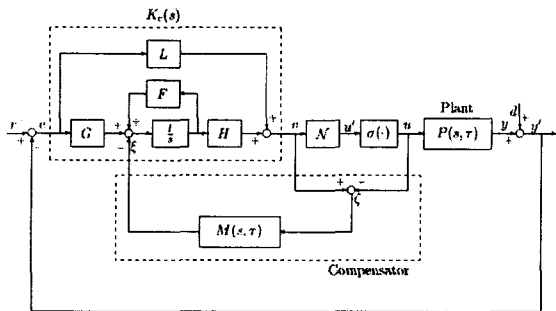


그림 2. 입력제한요소가 존재하는 상태지연 제어시스템의 동적보상.

Fig. 2. Dynamic compensation of state-delayed control systems with input saturation.

와인드업방지 구조를 적용한 보상된 제어기의 구조는 그림 2에 도시하였다. 그림 2에서 포화 비선형은 플랜트의 일부이기 때문에 포화 비선형의 출력 $u(t)$ 는 센서를 통해 측정하거나 수학적 모델링을 통해 예측하는 등의 방법을 사용하여 얻을 수 있다. 그림 2는 이와 같은 의미를 내포한다. 블록 N 은 대상 시스템이 다변수 시스템일 경우 제어 입력신호의 방향성 보상을 위해 도입한 것으로서, 제어 입력 신호 중에 어느 하나가 포화되었을 때 그 방향성을 유지하면서 신호의 크기를 조정하는 기능을 하는데[8], 본 논문에서 제시하는 방법과 함께 사용하는 것이 바람직하다. 블록 N 을 도입하

라도, $u(t)$ 에서 $u(t)$ 까지는 또다른 포화함수이므로 본 논문에서 설계하려는 보상기에 영향을 주지 않는다. 여기서 보상된 제어기들의 동특성은 다음과 같다.

(다) 보상된 제어기 $K_c(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_c(t) = Fx_c(t) + Ge(t) - \xi(t), \quad (7)$$

$$v(t) = Hx_c(t) + Le(t), \quad (8)$$

$$e(t) = r(t) - y(t) - d(t). \quad (9)$$

여기서 $\xi(t) \in R^q$ 는 보상 신호로서 그것의 동특성은 다음과 같다.

(라) 동적 보상기 $M(s, \tau)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_d(t) = \Phi(t, \tau)x_d(t) + \Gamma(t, \tau)\xi(t), \quad (10)$$

$$\xi(t) = \Sigma(t, \tau)x_d(t) + \Lambda(t, \tau)\xi(t), \quad (11)$$

$$\xi(t) = v(t) - u(t). \quad (12)$$

여기서 $\Phi(t, \tau)$, $\Gamma(t, \tau)$, $\Sigma(t, \tau)$, 그리고 $\Lambda(t, \tau)$ 등은 설계변수로서 포화 현상시 전체 시스템이 잘 동작하도록 적절히 선정되어야 한다. 논문전개의 편의상, 앞으로는 단순히 Φ , Γ , Σ , Λ 등의 기호를 사용하기로 한다.

설계목적은 동적 보상기의 설계변수를 적절히 선정하여 구동기가 포화되었을 때의 응답특성을 포화요소가 존재하지 않았을 때의 시스템이 보이는 응답특성에 가능한 한 비슷하게 유지시키는 것이다. 동적 보상기의 설계는 시스템의 성능에 직접적인 영향을 미치므로 적절한 설계 방법이 요구된다. 다음 장에서는 이에 관해 다룬다.

3. 동적 와인드업방지 보상기의 설계

포화현상이 일어났을 때 시스템의 투우프는 실질적으로 끊어지는 상태가 되기 때문에 제어기의 출력특성은 플랜트에 전혀 전달되지 않는다. 따라서 제어기는 자체의 개루우프 동특성에 따라 작동하게 됨으로서, 전체적인 시스템의 유기적인 특성과 유리된다. 이러한 유리된 제어기의 동특성은 포화상태에서 벗어난 후에 플랜트에 연결될 때 부적절한 제어신호를 발생시키고, 결국 페루우프 시스템의 성능을 저하시키는 요인이 된다.

이러한 고찰에 의거하여 Park과 Choi[7]-[9]는 포화현상이 존재하는 경우와 존재하지 않는 경우의 시간에 따른 시스템의 상태변수 차이를 성능평가의 척도로 삼아 효율적인 와인드업방지 방법을 제시한 바 있다.

본 논문에서는 이러한 개념을 확장하여 그림 2의 와인드업방지 구조에서 동적 보상기 $M(s, \tau)$ 를 설계한다. $x_c(t)$ 를 포화 요소가 없는, 그리고 $\tilde{x}_c(t)$ 를 포화 요소가 있는 경우의 제어기의 상태라 하자. 그러면 성능평가척도는 다음과 같이 고려할 수 있다.

$$\min_{M(s, \tau)} J = \int_0^{\infty} \|x_c(t) - \tilde{x}_c(t)\|^2 dt, \quad (13)$$

여기서 $\|\cdot\|$ 는 유클리디안 노름(Euclidean norm)이다. 포화 요소가 존재하는 경우 $x_c(t)$ 는 실제 존재하는 변수가 아니라 이상적인 제어기의 상태를 의미한다. 이 성능평가척도의 의미는 포화 요소가 존재할 때의 제어기의 상태인 $\tilde{x}_c(t)$ 를 이상적인 제어기의 상태 $x_c(t)$ 에 가능한한 근접하게 유지시키는 것이다.

위의 (13)을 최적화 하는 동적 보상기를 구하기 위해서 사

전 작업으로서 플랜트의 동특성 (1)과 보상 제어기의 동특성 (7)을 포화 비선형의 동작여부에 따라 주파수 영역에서 다시 기술한다. 참고로 본 논문에서 사용되는 기호 약속을 한다. 시간영역에서의 임의의 변수 $x(t)$ 에 대하여, $x(s)$ 는 해당변수의 라플라스 변환, 즉 주파수 영역에서의 변수를 의미한다고 가정한다.

포화요소가 존재하지 않을 때의 페루우프 시스템의 동특성은, 앞의 (1)-(3), (7), (9), 그리고 $u(t) = v(t)$ 와 라플라스 변환에 의하여 다음 식이 유도된다.

$$s\hat{x}(s) = A(s, \tau)x(s) + B[\hat{r}(s) - d(s)] + x(0), \quad (14)$$

여기서 $x_c(t) := (x_c^T(t), x_p^T(t))^T$, 그리고

$$A(s, \tau) := \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} T \\ U \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$P := F - GD(I + LD)^{-1}H, \quad (16)$$

$$Q := -G[I - D(I + LD)^{-1}L]C, \quad (17)$$

$$R := B(I + LD)^{-1}H, \quad (18)$$

$$S := (A + e^{-s\tau}A_d) - B(I + LD)^{-1}LC, \quad (19)$$

$$T := G[I - D(I + LD)^{-1}L], \quad (20)$$

$$U := B(I + LD)^{-1}L \quad (21)$$

이며 $s, s = \sigma + j\omega$,는 복소변수, $x(0)$ 는 초기상태이다.

포화요소가 존재할 때의 페루우프 시스템의 동특성은, 앞서 기술된 (1)-(3), (7)-(12)와 이의 라플라스변환으로부터 다음 식을 얻는다.

$$s\hat{x}_n(s) = A_n(s, \tau)x_n(s) + B_{nl,1}\hat{\sigma}(\hat{v}) + B_{nl,2}[\hat{r}(s) - d(s)] + x_n(0), \quad (22)$$

여기서 $x_n(t) := (\tilde{x}_c^T(t), \tilde{x}_d^T(t), \tilde{x}_p^T(t))^T$, 그리고

$$A_n(s, \tau) := \begin{bmatrix} F - \Lambda H & -\Sigma & -(G - \Lambda L)C \\ \Gamma H & \Phi & -\Gamma LC \\ 0 & 0 & A + e^{-s\tau}A_d \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$B_{nl,1} := \begin{bmatrix} \Lambda(I + LD) - GD \\ -\Gamma(I + LD) \\ B \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$B_{nl,2} := \begin{bmatrix} G - \Lambda L \\ \Gamma L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

이며, $x_n(0)$ 는 초기상태, $\hat{\sigma}(\hat{v})$ 는 $\sigma(\hat{v})$ 신호의 라플라스 변환을 의미한다. 포화함수 $\sigma(\cdot)$ 가 선형영역에서 동작하는 경우 (22)는 (14)로 된다.

$M(t, \tau)$ 를 (10)과 (11)에 기술된 동적 보상기에서, $\xi(t)$ 로부터 $\hat{\xi}(t)$ 로의 임펄스 응답행렬이라 하자. 즉

$$M(t, \tau) := L^{-1}\{M(s, \tau)\} = L^{-1}\{\Lambda + \Sigma[sI - \Phi]^{-1}\Gamma\} \quad (26)$$

이라 하자, 여기서 L^{-1} 는 라플라스 역변환을 의미한다. 그러면 (7)은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}_c(t) = Fx_c(t) + Ge(t) - M(t, \tau) * (v(t) - u(t)), \quad (27)$$

여기서 "*"는 컨볼루션 연산(convolution operator)을 의미한다.

따라서 (1)-(3), (8), (9)와 (27)로부터, 포화요소가 존재할 때의 페루우프 시스템의 라플라스 변환은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$s\hat{x}_{aw}(s) = A_{aw}(s, \tau)x_{aw}(s) + B_{aw,1}\hat{\sigma}(\hat{v}) + B_{aw,2}[\hat{r}(s) - d(s)] + x_{aw}(0), \quad (28)$$

여기서 $x_{aw}(t) := (\tilde{x}_c^T(t), \tilde{x}_p^T(t))^T$, 그리고

$$A_{aw}(s, \tau) := \begin{bmatrix} F - M(s, \tau)H & -[G - M(s, \tau)L]C \\ 0 & A + e^{-s\tau}A_d \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$B_{aw,1} := \begin{bmatrix} M(s, \tau)(I + LD) - GD \\ B \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$B_{aw,2} := \begin{bmatrix} G - M(s, \tau)L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

이다.

그림 2에서 플랜트 $P(s)$ 가 불안정한 시스템이라면, 포화요소를 가진 제어 시스템을 결코 광역적(global)으로 안정화시킬 수 없다. 왜냐 하면 제어입력의 제한 때문에 목적하는 위치에 상태변수를 근접시킬 수 없는 그러한 상태 값이 항상 존재하기 때문이며, 이는 제어입력이 포화되었을 때 페루우프가 사실상 끊어지는 상태가 된다는 것을 고려한다면 쉽게 이해할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 개루우프적으로 안정한 플랜트만을 다룬다. 이를 포함하여 보상행렬을 설계하는 데 필요한 가정을 다음과 같이 한다.

(A1) 플랜트 $P(s)$ 는 안정하다. 즉 (1)에서 시스템 행렬

$A + e^{-s\tau}A_d$ 는 안정한 고유치를 갖는다.

(A2) 입력제한요소가 없다고 가정된 상태에서 설계된 선형

제어기 $K(s)$ 는 알려져 있는 상태시간지연을 포함한 시스템에 대하여 성능과 안정도 면에서 만족할 만한 특성을 보인다.

(A3) 입력제한요소가 없는 시스템에서의 페루우프 플랜트

의 시스템 행렬 $S = (A + e^{-s\tau}A_d) - B(I + LD)^{-1}$

LC 는 안정한 고유치를 갖는다.

가정 (A1)과 (A2)는 와인드업방지 문제에서 표준적인 것이다. 행렬 $A + e^{-s\tau}A_d$ 의 고유치란 $|sI - (A + e^{-s\tau}A_d)| = 0$ 을 만족하는 s 값을 의미하며, 이를 확인할 수 있는 손쉬운 방법으로는 $e^{-s\tau}$ 에 대한 Pade 근사치를 이용하는 것이다.

가정 (A3)은 기술적인 이유에서 필요한 것으로서, 동적 보상기를 설계하기 전에 이 조건을 확인할 수 있다. 가정 (A3)는 다음과 같은 상황과 동일한 의미이다. 즉 그림 1에서 제어기 $K(s)$ 대신 그것의 직접전달행렬 L 만으로 대치된 경우를 상정하였을 때, 그와 같은 시스템이 안정해야 된다는 것이다. 이러한 상황은 제어기의 동특성 부분(dynamic part)이 어떤 이유에서건 순간적으로 작용하지 않을 경우라도 전체 페루우프 시스템이 안정해야 된다는 의미로서, 실제 제어 환경이라면 당연히 충족되어야 할 조건이며 또 대부분의 제어시스템은 이 조건을 만족한다. 가정 (A3)에 관계된 제어기의 매개변수는 L 뿐이다. 따라서 시스템이 이 조건을 만족시키지 않는다면 L 을 조정하거나, 제어기를 재 설계하면 된다. 이제 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 1: 그림 2와 같은 동적 되먹임 와인드업방지 구조에서 시스템이 가정 (A1)-(A3)을 만족시킨다 하자. 그러면 성능평가함수 (13)을 최소화시키는 동적 보상기 $M^*(s, \tau)$ 는 다음과 같이 유일하게 결정된다.

$$M^*(s, \tau) = GD(I + LD)^{-1} + G[I - D(I + LD)^{-1}L]C \times \{sI - [A + e^{-s\tau}A_d - B(I + LD)^{-1}LC]\}^{-1} \times B(I + LD)^{-1}. \quad (32)$$

즉

$$\Phi^* = A + e^{-sr}A_d - B(I+LD)^{-1}LC, \quad (33)$$

$$\Gamma^* = B(I+LD)^{-1}, \quad (34)$$

$$\Sigma^* = G[I-D(I+LD)^{-1}]C, \quad (35)$$

$$\Lambda^* = GD(I+LD)^{-1} \quad (36)$$

이다. 이의 상태공간 표현식은 다음과 같다.

$$\dot{x}_d(t) = [A - B(I+LD)^{-1}LC]x_d(t) + B(I+LD)^{-1}\zeta(t), \quad (37)$$

$$\xi(t) = G[I-D(I+LD)^{-1}]Cx_d(t) + GD(I+LD)^{-1}\zeta(t). \quad (38)$$

또한, $M^*(s, \tau)$ 를 적용하는 경우 $J=0$, 즉 $\tilde{x}_c(t) = x_c(t)$, $\forall t$ 이다.

증명: Parseval의 정리에 의하여 성능평가함수 J 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \|x_c(s) - \tilde{x}_c(s)\|^2 ds. \quad (39)$$

위의 (14), (28)의 라플라스 변환식에 분할된 행렬의 역행렬 보조정리[5]를 적용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$x_c(s) - \tilde{x}_c(s) = \mathcal{E}_1(s)[\gamma(s) - d(s)] + \mathcal{E}_2(s)\hat{\sigma}(\tilde{v}) + \mathcal{E}_3(s)x_c(0) + \mathcal{E}_4(s)x_p(0), \quad (40)$$

여기서 $(x_c^T(0), x_p^T(0))^T = (\tilde{x}_c^T(0), \tilde{x}_p^T(0))^T$ 라는 사실이 적용되었으며,

$$\mathcal{E}_1(s) := -X(s)(T + Q(sI - S)^{-1}U) - \{sI - [F - M(s, \tau)H]\}^{-1} \times (G - M(s, \tau)L) \quad (41)$$

$$\mathcal{E}_2(s) := \{sI - [F - M(s, \tau)H]\}^{-1} \times \{(G - M(s, \tau)L) \times [C(sI - A - e^{-sr}A_d)^{-1}B + D] - M(s, \tau)\}, \quad (42)$$

$$\mathcal{E}_3(s) := -X(s) - \{sI - [F - M(s, \tau)H]\}^{-1}, \quad (43)$$

$$\mathcal{E}_4(s) := -X(s)Q(sI - S)^{-1} + \{sI - [F - M(s, \tau)H]\}^{-1} \times [G - M(s, \tau)L]C(sI - A)^{-1} \quad (44)$$

$$X(s) := -[(sI - P) - Q(sI - S)^{-1}R]^{-1}, \quad (45)$$

$$W(s) := -(sI - S)^{-1} + (sI - S)^{-1}RX(s)Q(sI - S)^{-1} \quad (46)$$

와 같이 정의되며, P, Q, R, S, T , 그리고 U 는 (16)-(21)에 기술되어 있다.

$\mathcal{E}_2(s)=0$ 이 되는 $M_i(s, \tau)$ 를 구하여 보자. 그러면

$$(G - M_i(s, \tau)L)[C(sI - A - e^{-sr}A_d)^{-1}B + D] - M_i(s, \tau) = 0 \quad (47)$$

이 성립해야 하며, 이를 만족시키는 $M_i(s, \tau)$ 는

$$M_i(s, \tau) = G[C(sI - A - e^{-sr}A_d)^{-1}B + D] \times [(I + LD) + LC(sI - A - e^{-sr}A_d)^{-1}B]^{-1} \quad (48)$$

를 얻는다. 위의 (48)에 역행렬 보조정리[5]와 다음의 항등식

$$\begin{aligned} & [I + C(sI - A - e^{-sr}A_d)^{-1}B(I + LD)^{-1}L]^{-1} \\ & \times C(sI - A - e^{-sr}A_d)^{-1} \\ & = C(sI - A - e^{-sr}A_d)^{-1}[I + B(I + LD)^{-1}LC] \\ & \times (sI - A - e^{-sr}A_d)^{-1}]^{-1} \\ & = C\{sI - [A + e^{-sr}A_d - B(I + LD)^{-1}LC]\}^{-1} \end{aligned} \quad (49)$$

을 대입하여 정리하면

$$M_i(s, \tau) = GD(I + LD)^{-1} + G[I - D(I + LD)^{-1}]C \times \{sI - [A + e^{-sr}A_d - B(I + LD)^{-1}LC]\}^{-1} \times B(I + LD)^{-1} \quad (50)$$

를 얻는다. 위의 (50)을 (41), (43), (44)의 $M(s, \tau)$ 자리에 대입하면 $\mathcal{E}_1(s)=0$, $\mathcal{E}_3(s)=0$, $\mathcal{E}_4(s)=0$ 을 얻는다. 따라서

(50)은 $J=0$ 으로 성능평가함수를 최소화시킨다. 즉 $M_i(s, \tau)$ 는 J 를 최소화시키는 해 $M^*(s, \tau)$ 이다. $\Phi, \Gamma, \Sigma, \Lambda$ 를 (10), (11)로 정의할 때, 위의 (50)과 비교하면 정리의 결과를 얻으며, 이를 대입하여 시간영역으로 옮기면 정리의 (37), (38)을 유도할 수 있다. □

제시된 동적 되먹임 보상기를 가진 와이드오픈방지 구조는, 포화되었을 때의 제어기의 상태변수를 포화요소가 없었을 때 발전해 나갈 제어기의 상태변수값에 유지시켜주는 역할을 한다. 이는 제어기의 입출력 특성을 포화요소가 없는 시스템에서의 그것에 유지시킨다는 의미는 아니다. 제시된 와이드오픈방지 구조는 제어기의 상태변수를 보정할 뿐이다. 제시된 동적 보상방법으로 제어기의 상태변수는 포화현상으로 인한 영향을 받지 않지만, 제어기의 고주파 이득행렬 L 은 포화현상의 영향을 제어기의 입출력에 반영한다.

4. 보상된 전체 시스템의 안정도

포화요소를 가진 제어 시스템에서의 안정도 문제란, 포화되었을 때 되먹임 루우프가 끊어지는 상태가 되기 때문에, 제어기가 개루우프적으로 불안정한 경우 (예를 들어 PI 제어기) 그것의 상태변수들이 임의로 크게 발산해 버릴 수 있다는 것에 초점이 맞추어져 있다. 따라서 포화요소를 포함한 제어 시스템의 안정도를 다룰 때에는 플랜트 출력의 안정도 보다 다소 강한 조건인 시스템 내부의 상태변수의 안정도 문제를 다루는 것이 일반적이다[7]-[9]. 본 논문에서도 전체적 안정도(total stability)[5]에 관해 언급한다. 전체적으로 안정된 시스템은, 제한된 에너지를 갖는 입력이 인가될 경우, 출력뿐만 아니라 모든 상태변수들이 제한된 에너지를 갖는다는 개념으로, 다른 말로 하면 BIBS(bounded-input bounded-state) 안정도에 해당된다.

앞의 (14)와 (22)의 상태변수 방정식은 전혀 다른 시스템을 기술한 것이 아니라, 그림 2의 ARW 구조에서 포화요소의 동작양식에 따라 같은 대상 시스템을 다르게 표현한 것에 불과하다. 실제로 (22)는 포화요소가 선형영역에서 동작하는 경우 (14)로 된다. 따라서 대상 시스템의 안정도 문제는 (22)로 표현된 상태변수 방정식이 안정할 것인가 하는 문제에 귀결된다. 여기서 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 2: 그림 2와 같은 포화요소를 가진 제어 시스템이 아래 조건을 만족시킨다 하자.

1. 포화요소가 존재하지 않을 때, 알려진 상태시간지연을 포함한 제어 시스템이 가정 (A1)-(A3)을 만족시킨다.
2. 동적 보상기가 (37), (38)로 설계되었다.

그러면 이 제어 시스템은 전체적으로 안정(totally stable)하다.

증명: 그림 2에 기술된 전체 시스템의 상태 방정식은 식 (22)에 주어졌다. 이 식에서 $\sigma(\cdot)$ 가 유계 함수이므로 $Re\{\lambda_i(A_n)\} < 0, \forall i$, 이면 전체 시스템이 전체적으로 안정하다는 것을 알 수 있다.

먼저 Φ^* 는 동적 보상기의 시스템 행렬로서, 이는 포화요소가 없을 때의 페루우프 플랜트의 시스템 행렬에 해당하고, 가정 (A3)에 의하여 안정행렬이므로, 동적 보상기 자체는 개루우프적으로 안정하다. 앞의 (33)-(36)을 (23)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$A_n(s, \tau) = \begin{bmatrix} F - \Lambda^* H & -\Sigma^* & \vdots & -(G - \Lambda^* L)C \\ \Gamma^* H & \Phi^* & \vdots & -\Gamma^* LC \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & A + e^{-s\tau} A_d \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(s, \tau) & \vdots & \vdots & -(G - \Lambda^* L)C \\ \dots & \dots & \dots & -\Gamma^* LC \\ 0 & 0 & \vdots & A + e^{-s\tau} A_d \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$= \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

여기서 $A(s, \tau)$ 는 (15)에 주어져 있다. 위의 (51)로부터 제시된 동적 보상기를 채택하는 경우 $A_n(s, \tau)$ 의 고유치는 $A(s, \tau)$ 와 $A + e^{-s\tau} A_d$ 의 고유치로 구성되어 있음을 알 수 있는데, 가정 (A1)과 (A2)에 의하여 $A(s, \tau)$ 와 $A + e^{-s\tau} A_d$ 는 각각 안정한 고유치를 가지므로, $A_n(s, \tau)$ 은 안정행렬이다. □

구동기가 포화되었을 경우 되먹임 루우프는 실질적으로 끊어지게 되어, 시스템의 개루우프적인 응답 특성이 그대로 드러난다. 따라서 제어기 자체가 불안정한 시스템인 경우, 포화 현상이 발생하면, 상태변수들이 임의로 발산해 버릴 수 있다. 그러나 제시된 보상방법이 채택되는 경우, 대부분의 대상 제어 시스템이 만족시키는 가정 (A1)-(A3)을 충족시키기만 하면, 제어기의 상태변수는 항상 유한하다는 것을 의미한다.

시스템의 안정상태에서의 출력성능은 플랜트 상태의 안정상태값에 의하여 좌우되므로, 제시된 보상방법을 사용했을 경우에 전체 시스템의 안정상태특성에 어떠한 영향을 미치는지 해석하도록 하자. $(\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T)^T := \lim_{t \rightarrow \infty} (x_c^T(t), x_p^T(t))^T = \lim_{s \rightarrow 0} (s \hat{x}_c^T(s), s \hat{x}_p^T(s))^T$ 를 (14)에 기술된 시스템의 평형상태, $(\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T)^T := \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}_c^T(t), \hat{x}_p^T(t))^T = \lim_{s \rightarrow 0} (s \hat{\hat{x}}_c^T(s), s \hat{\hat{x}}_p^T(s))^T$ 를 (28)에 기술된 시스템의 평형상태라 하자. 마찬가지로 어떤 변수의 안정상태값을 해당변수 위에 ‘ $\bar{}$ ’로 표현하자. 정리 1에 의하여 제시된 보상방법이 사용되는 경우, $\hat{x}_c(t) = x_c(t), \forall t$, 이다. 이때 제어기 $K(s)$ 가 L 항이 없다면, 당연히 $\hat{v}(t) = v(t), \forall t$, 이다. 따라서 이 경우에는 제시된 보상방법을 사용한 입력제한 시스템의 안정상태($\bar{\hat{x}}_p$)는 애초에 의도했던 평형상태(\bar{x}_p)에 도달하게 된다. 그러나 제어기에 L 항이 존재하는 일반적인 경우 $\hat{v}(t) \neq v(t)$ 이므로 안정상태 해석이 수월치는 않다. 이때 플랜트 상태의 안정상태값에 대해서 다음과 같이 언급할 수 있다.

정리 3: 그림 2와 같은 입력제한이 존재하는 상태지연 시스템의 보상구조에서, 동적 보상기가 정리 1에 제시된 대로 설계되어 있다고 가정한다. 이때 $\bar{v} \in \Psi_{R^*}$ 이면, $(\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T)^T = (\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T)^T$ 가 성립하며, 결과적으로 $\bar{v} \in \Psi_{R^*}$ 이어야 한다.

증명: 입력제한요소가 없는 시스템의 플랜트 상태는 (14)로부터

$$x_p(s) = \{(sI - S)^{-1}U - (sI - S)^{-1}RX(s) \times (T + Q(sI - S)^{-1}U)\}(r(s) - d(s)) - (sI - S)^{-1}RX(s)x_c(0) - W(s)x_p(0) \quad (52)$$

이며, 따라서 안정상태값은

$$\bar{x}_p = [-\bar{S}^{-1}U + \bar{S}^{-1}R\bar{X}(T - Q\bar{S}^{-1}U)](r - d) \quad (53)$$

이다. 여기서

$$\bar{S} = A + A_d - B(I + LD)^{-1}LC, \\ \bar{X} = (P - Q\bar{S}^{-1}R)^{-1}$$

이다.

제시된 동적보상기 $M^*(s, \tau)$ 를 선택하는 경우, (28)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{x}_p(s) = [sI - (A + e^{-s\tau}A_d)]^{-1}B\hat{\sigma}(\tilde{v}) + [sI - (A + e^{-s\tau}A_d)]^{-1}\tilde{x}_p(0) \quad (54)$$

이의 안정상태값은

$$\bar{\tilde{x}}_p = -(A + A_d)^{-1}B\sigma(\bar{\tilde{v}}) \quad (55)$$

이다. 이때 $\sigma^c(\bar{\tilde{v}}) = \bar{\tilde{v}} - \sigma(\bar{\tilde{v}})$ 라 하자. 그러면 $\bar{\tilde{v}}$ 는 다음과 같이 분해할 수 있다.

$$\bar{\tilde{v}} = \sigma(\bar{\tilde{v}}) + \sigma^c(\bar{\tilde{v}}), \quad \sigma(\bar{\tilde{v}}) \in \Psi_{R^*} \quad (56)$$

(8)로부터

$$\bar{\tilde{v}} = H\bar{\tilde{x}}_c + L(r - d) - LC\bar{\tilde{x}}_p - LD\sigma(\bar{\tilde{v}}) \quad (57)$$

이며, 정리 1에서 $\hat{x}_c(t) = x_c(t), \forall t$, 이므로, $\bar{\tilde{x}}_c = \bar{x}_c$ 가 성립한다. 따라서 (28)로부터

$$\bar{x}_c = \bar{\tilde{x}}_c = -\bar{X}(T - Q\bar{S}^{-1}U)(r - d) \quad (58)$$

이다. 위의 (56)-(58)을 (55)와 결합하면 다음 식이 성립한다.

$$\bar{\tilde{x}}_p = [-\bar{S}^{-1}U + \bar{S}^{-1}R\bar{X}(T - Q\bar{S}^{-1}U)](r - d) + \bar{S}^{-1}B(I + LD)^{-1}\sigma^c(\bar{\tilde{v}}) \quad (59)$$

(53)과 (59)로부터

$$\bar{x}_p - \bar{\tilde{x}}_p = -\bar{S}^{-1}B(I + LD)^{-1}\sigma^c(\bar{\tilde{v}}) \quad (60)$$

이며, 이로부터 $\bar{\tilde{v}} \in \Psi_{R^*}$ 라면 $\sigma^c(\bar{\tilde{v}}) = 0$ 이고, 이는 위식으로부터 $\bar{\tilde{x}}_p$ 와 \bar{x}_p 가 동일함을 의미한다. 종합하면 $(\bar{\tilde{x}}_c^T, \bar{\tilde{x}}_p^T)^T = (\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T)^T$ 이 성립한다. 이 사실을 이용하여 (57)을 재정돈하면

$$\bar{\tilde{v}} = (I + LD)^{-1}(H\bar{x}_c - LC\bar{x}_p + L(r - d)) \quad (61)$$

인데, 이 식의 오른쪽 부분식은 (5)로부터 얻을 수 있는 \bar{v} 의 표현식에 해당한다. 즉 $\bar{\tilde{v}} = \bar{v}$ 이 성립한다. 이는 $\bar{v} \in \Psi_{R^*}$ 이어야함을 의미한다. □

만약 제어기 출력의 안정상태값 \bar{v} 가 Ψ_{R^*} 에 속하지 않는다면, 시스템 출력(output)의 안정상태값은 목표로 하는 설정치에 도달시키지 못할 것이다. 이와 같은 상황은 바람직하지 않기 때문에 입력제한요소가 존재하지 않는다고 가정된 상태에서 상태지연 시스템에 대한 제어기를 설계시 $\bar{v} \in \Psi_{R^*}$ 가 만족되도록 하여야 한다.

5. 시뮬레이션 예제

본 절에서는 시뮬레이션을 통하여 제시된 와이드오프방지 방법의 유용성을 살펴도록 한다. 그림 2와 같은 구조에서 다음의 상태방정식으로 표현되는 플랜트 $P(s, \tau)$, $\tau=1$ (sec), 를 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 0.05 & 0.1 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} x_p(t-1) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_p(t). \end{aligned}$$

이러한 플랜트에 대하여 상태시간 지연요소의 영향을 고려하여 다음과 같은 선형 제어기 $K(s)$ 가 설계되어 있다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} e(t), \\ e(t) &= r(t) - y(t). \end{aligned}$$

이와 같은 시스템에서 제어 입력의 상한이 ± 1 로 제한되어 있다고 가정하며, 기준 입력은 $r(t) = (0.8, 0.6)^T$, $t \geq 0$ 라 한다. 그림 3에 각각 포화 비선형이 없다고 가정한 상태시간지연 시스템의 출력 $y(t)$ 와 플랜트에 인가되는 제어 입력 $u(t)$ 를 실선으로 도시하였는데 그림에서 알 수 있듯이 응답 특성은 기준 입력을 잘 추종한다. 그런데 포화 비선형이 존재한다면 제어 입력이 포화 상한값을 넘으므로 포화 현상이 발생되어 시스템의 성능을 저하시키게 되며, 이를 그림 4에 도시하였다.

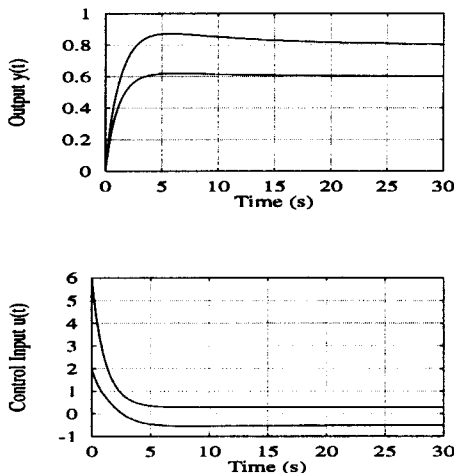


그림 3. 입력제한이 없는 상태지연시스템.
Fig. 3. State-delayed system without input saturation.

이제 이러한 시스템에 제시된 방법을 적용해 보자. 동적 보상기 $M^*(s, \tau)$ 의 상태공간 표현식은

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= (A - BLC)x_d(t) + A x_d(t-1) + B\zeta(t) \\ &= \begin{bmatrix} -1.1 & 0 \\ 0 & -1.1 \end{bmatrix} x_d(t) + \begin{bmatrix} 0.05 & 0.1 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} x_d(t-1) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \zeta(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi(t) &= GCx_d(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_d(t), \\ \zeta(t) &= v(t) - u(t) = v(t) - \sigma(v(t)) \end{aligned}$$

이며, 이는 그림 2와 같이 구성할 수 있다. 주어진 시스템은 가정 (A1)-(A3)을 만족하므로 정리 2에 의하여 보상된 시스템은 전체적으로 안정하며, 보상된 시스템의 응답 특성은 그림 5에서 확인할 수 있는 바와 같이 설계된 시스템의 응답 특성을 보다 근접하게 추종한다.

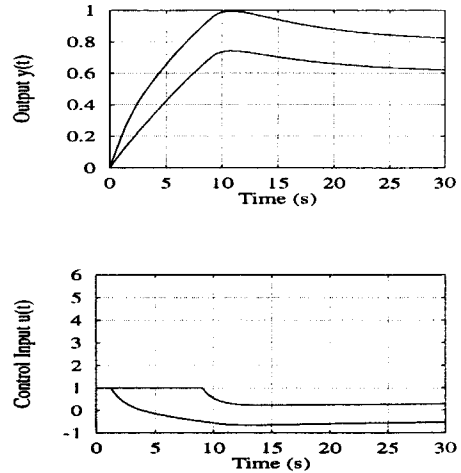


그림 4. 입력제한이 있는 상태지연시스템.
Fig. 4. State-delayed system with input saturation.

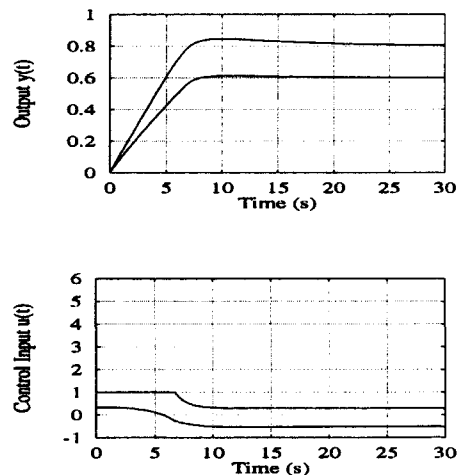


그림 5. 제시된 보상방법을 적용한 입력제한이 있는 상태지연시스템.
Fig. 5. State-delayed system with input saturation adopting proposed compensation method.

6. 결 론

본 논문은 상태지연요소가 내재된 입력제한 시스템에 대한 효과적인 동적 와이드오프 방지방법을 제안하였다. 입력제한요소의 존재 여부에 따른 상태공간 표현을 기초로 동적보상기의 구성요소를 명확히 구하였다. 제시된 동적보상기는 기준입력이나 외부교란 그리고 입력 제한치 등에 무관하게 결정되며,

제어기와 플랜트의 매개변수들로서 명확히 표현된 닫힌 형태 (closed form)를 갖기 때문에, 와인드업 기법 적용시 선형 제어기가 미리 설계되어 있지만 하면 직접 쉽게 구할 수 있다. 제시된 보상방법의 역할은 포화현상시 제어기의 상태변수를 포화요소가 없었을 때의 제어기가 가질 상태변수에 그대로 유지시키는 것이다. 제시된 동적보상방법은 전체적 안정도를 보장해 줄 뿐만 아니라 대상 시스템의 성능향상이 기대되는 보상방법이다.

참 고 문 헌

[1] H. H. Choi and M. J. Chung, "Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and control," *Automatica*, Vol. 31, No. 6, pp. 917-919, 1995.

[2] H. H. Choi and M. J. Chung, "Observer-based H_∞ controller design for state delayed linear systems," *Automatica*, Vol. 32, No. 7, pp. 1073-1075, 1996.

[3] R. Hanus, M. Kinnaert, and J. L. Henrotte, "Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method," *Automatica*, Vol. 23, No. 6, pp. 729-739, 1987.

[4] J. H. Lee, S. W. Kim, and W. H. Kwon, "Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 39, pp. 159-162, 1994.

[5] T. Kailath, *Linear systems*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1980.

[6] M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari, and C. N. Nett, "A unified framework for the study of anti-windup designs," *Automatica*, Vol. 30, No. 12, pp. 1869-1883, 1994.

[7] J.-K. Park and C.-H. Choi, "Dynamic compensation method for multivariable control systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 40, No. 9, pp. 1635-1640, 1995.

[8] J.-K. Park and C.-H. Choi, "Dynamical anti-reset windup method for discrete-time saturating systems," *Automatica*, Vol. 33, No. 6, pp. 1055-1072, 1997.

[9] J.-K. Park, C.-H. Choi, and H. Choo, "Dynamic anti-windup method for a class of time-delay control systems with input saturation," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 10, pp. 457-488, 2000.

저 자 소 개



박 종 구 (朴 鍾 久)

1987년 서울대 제어계측공학과 졸업. 동 대학원 석사(1989). 동 대학원 박사(1993). 1995-현재 성균관대 전기전자 및 컴퓨터공학부 부교수. 관심분야는 제어이론 및 응용, 컴퓨터 응용 제어 시스템, 추정이론, 가상현실 및 게임응용.

Tel : 031-290-7138

E-mail : pjg@yurim.skku.ac.kr