

CDM과 리파토프 정리를 이용한 구간 플랜트의 목적다항식 설계

論 文

50D-1-1

Target Polynomial Design for Interval Plant Using Lipatov Theorem and CDM

吳學俊** · 鄭太鎮** · 李振奎* · 鄭讚壽***

(Hak-Joon Oh · Tae-Jin Chung · Jin-Kyu Lee · Chan-Soo Chung)

Abstract - For a parametric uncertain system, there are many results on stability analysis, but only a few synthesis methods. In this paper, we proposed a new target polynomial decision method for the parametric uncertain system to stabilize the closed loop system with maximal parametric l_2 stability margin. To this, we used both Lipatov Theorem and coefficient diagram method(CDM). To show the effectiveness of the proposed method, we designed a robust controller for the inverted pendulum system with parametric uncertainties using fixed order pole assignment(FOPA) method and its performance was compared with that of the μ synthesis methods.

Key Words : FOPA, Target Polynomial, Lipatov Theorem, Coefficient Design Method, Parametric l_2 stability margin

1. 서 론

구간플랜트의 안정도 분석에 대한 결과는 상당히 많이 발표되었으나[1][2], 제어기 설계방법에 대한 연구결과는 그리 많지 않다. 지금까지 제안된 방법의 대부분은 구간을 갖는 계수 불확실성을 구조적 불확실성으로 표현하고 강인제어 설계법을 이용하는 것이다[3][8]. 구조적 불확실성으로 표현하기 위해서는 $2 \times n$ 의 크기를 갖는 불확실성 블록이 필요하다. 하지만 카르티노프 정리를 이용하면 크기가 4인 불확실성 블록으로 표현할 수가 있다[5][6]. [3]에서는 구간 시스템을 표현하는 4개의 카르티노프식에 대해서 각각 구조적 불확실성을 정하고, μ 설계법을 이용해서 제어기를 설계하였다. [9]에서는 계수의 구간변화를 임의로 발생시켜 구하고 이를 포함하는 가중함수를 도입함으로써 크기가 1인 불확실성 블록으로 표현하였다. 하지만 기존의 강인 제어 기법으로 설계할 경우, 제어기가 고차의 구조를 갖게된다. 이러한 고차 제어기는 정확하게 구현하기가 상당히 어려울 뿐만 아니라, 구현과정의 오차가 전체성능에 민감한 반응을 보일 때도 있다. 최근 기존의 강인 제어기 설계방법으로 설계된 제어기가 제어기 계수의 섭동에 대하여 상당히 작은 안정도 여유를 갖는 것이 발표됐다[1][2].

저차의 강인제어기를 설계하는 알고리즘이 최근에 많이 연

구되었고, 그 중에 한 방법으로서 고정차수 극배치 방법을 들 수 있다[6]. 이 방법은 원하는 목적 다항식을 정하고, 주어진 차수의 제어기와 플랜트의 특성방정식이 목적 다항식과 같아 지도록 제어기의 계수를 설계하는 방법이다. 이 방법을 확장하면 구간 플랜트에서, 설계자가 원하는 구간 특성을 갖는 목적 다항식의 집합을 정하고 페루프 시스템의 구간 특성다항식이 정해진 목적 다항식의 집합에 포함되도록 하는 제어기 계수들의 구간을 구할 수 있다. 이때, 구해진 제어기의 계수 공간에서 임의의 한 제어기를 선택하면 그 제어기는 구간 플랜트를 안정화하고 설계자가 원하는 페루프의 특성을 만족하게 한다. 하지만 구간 플랜트가 주어졌을 때 설계자의 요구 조건을 만족하는 목적 다항식의 집합을 어떻게 설정할 지에 대한 방법은 아직 알려지지 않았다.

본 논문에서는 제어기의 계수적 안정도 여유를 확보하고 설계자의 설계사양을 만족하는 저차의 제어기를 설계하기 위하여 CDM(Coefficient Diagram Method) 과 리파토프 정리를 사용하여 설계 명세를 만족하는 구간을 갖는 목적 다항식을 결정하는 방법을 제안한다. CDM은 페루프 시스템의 안정성, 시간응답 및 강인성을 고려한 제어기를 쉽게 설계하는 방법이며[7][10], [10]에서는 파라미터의 불확실성을 갖는 구간 플랜트에서 안정성을 보장하는 리파토프 안정도 충분조건을 제안하였다. 이 두 방법을 이용하면 안정하고 설계자가 원하는 시간응답을 만족하는 페루프 특성다항식의 구간을 설정할 수 있고, FOPA를 이용하여 제어기의 계수를 구할 수 있다. 이 때 제어기의 계수는 계수공간에서 선행부동조건으로 표현이 된다[6]. 즉, 선행부동조건을 만족하는 임의의 한 제어기는 설계자가 원하는 특성의 제어기가 된다. 여기서 구해진 선행부동조건을 만족하는 제어기 중에서 가장 좋은 성능을 가지는 제어기를 선택할 수 있을 것이다. 본 논문에서는 「좋은

* 準 會 員 : 崇 實 大 電 氣 工 學 科 碩 士 課 程

** 正 會 員 : 崇 實 大 電 氣 工 學 科 博 士 課 程

*** 正 會 員 : 崇 實 大 電 氣 工 學 科 教 授 · 工 博

接 受 日 字 : 2000年 4月 10日

最 終 完 了 : 2000年 12月 28日

성능』의 지표로서 페루프 특성 다항식의 계수적 l_2 안정도 여유를 사용한다. 마지막으로, 제안된 방법으로 구한 제어기와 기존의 강인 제어기법으로 구한 제어기의 성능을 비교해 봄으로서, 제안한 방법으로 구한 제어기의 우수성을 보인다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2장에서는 고정 차수 극배치법에 관한 간단한 설명과, 3장에서는 설계명세를 만족하는 구간 목적 다항식을 찾는 과정을 제안한다. 4장에서는 설계된 구간을 갖는 목적 다항식을 만족하면서 계수적 l_2 안정도 여유를 최대화하는 제어기를 구한다. 5장에서 간단한 제어예를 보이고 기존의 강인제어 기법과의 성능 비교를 하고 6장에서 결론을 맺는다.

2. 고정차수 극배치법

구간 플랜트의 안정도 분석에 관한 연구결과는 많이 발표되었지만 제어기 설계에 관한 연구결과는 많이 없다. 구간 플랜트를 안정화하기 위해서 [8]에서는 카리토노프 이론을 이용해서 구간 불확실성을 표현하고, μ 제어방법을 이용해서 제어기를 설계하였다. [3]에서는 계수의 구간 불확실성의 특성을 포함하는 구조적 불확실성으로 표현하고 기존의 강인제어 기법으로 제어기를 설계했다. 하지만 이런 제어방법으로 구한 제어기는 고차이고 제어기의 계수변화에 대한 페루프 시스템의 l_2 안정도 여유가 매우 작게 나타났다. 이는 설계된 제어기를 구현할 때 발생할 수 있는 오차가 시스템의 성능을 저하시키거나 심지어는 불안정하게 할 수 있음을 나타낸다. 따라서 저차의 제어기로 구간 플랜트를 안정화시키는 설계방법이 필요하다. 저차의 제어기를 설계하는 방법 중의 하나인 고정차수 극배치법(FOPA)을 확장하면 구간 플랜트를 안정화하는 제어기를 설계하는데 이용할 수 있다[4][5]. 이 방법은 우선 안정한 구간을 갖는 목적 다항식을 식(1)과 같이 정해놓고 주어진 구간플랜트 $P(s)$ 와 고정차수 제어기 $C(s)$ 의 페루프 특성다항식의 계수들이 구간에 포함되도록 하는 제어기의 계수를 구하는 방법이다.

$$\delta_T(s) = \delta_{n+r}^T s^{n+r} + \delta_{n+r-1}^T s^{n+r-1} + \dots + \delta_0^T \quad (1)$$

$$\delta_i^{T-} \leq \delta_i^T \leq \delta_i^{T+}, \quad \forall i$$

$$\left(\begin{array}{l} n : \text{구간플랜트의 차수} \\ r : \text{제어기의 차수} \end{array} \right)$$

페루프 특성다항식이 주어진 목적다항식의 구간에 포함되는 조건은 다음과 같은 선형부등식 조건으로 표현된다[6].

$$\delta_i^{T-} \leq \delta_i(X, P_v) \leq \delta_i^{T+}, \quad \forall i \quad (2)$$

일반적으로, FOPA를 사용함에 있어 두가지 어려운 점이 있다. 그 하나는 $r \geq n-1$ 인 경우에는 페루프 특성다항식을 임의의 목적 다항식의 구간에 포함시키는 제어기를 구할 수 있으나, $r < n-1$ 인 경우에는 목적 다항식의 구간에 포함되게 하는 제어기가 존재하지 않을 수도 있다. 만일 주어진 선형 부등조건을 만족하는 제어기의 계수공간이 존재하지 않을 경우에는 제어기의 구조를 동일 차수에서 변화시키든지 차수를 높여서, 만족하는 계수공간을 찾아야 한다. 그 다음, 선형부등식 조건을 만족하는 제어기 집합 중에서 좀더 좋은 성능을 가지는 제어기를 선택할 수 있을 것이다. 또 다른 하

나의 어려운 점은 목적 구간 다항식을 정하는 문제이다. 이 문제는 전체 페루프 시스템의 동특성과 밀접한 관련이 있기 때문에 설계자는 플랜트에 대한 어느 정도의 사전정보가 요구되며, 그 방법에 대한 연구결과가 아직 발표된 바 없다. 이에 본 논문에서는 제어대상 플랜트에 관한 어느 정도의 사전 정보와 설계명세가 주어졌을 때 구간 목적다항식을 구하는 방법을 다음장에서 제안한다.

3. 구간을 가지는 목적다항식의 유도

CDM[7]의 장점은 페루프 시스템의 안정성, 시간응답 및 강인성을 함께 고려하면서 저차의 제어기를 쉽게 설계할 수 있다는 것이다. 특성 다항식의 계수들을 새롭게 정의된 안정도 지수 γ_i 와 등가시정수 τ 의 함수로 표현하고, 이들 특정 파라미터가 시스템의 페루프 응답특성, 안정도, 강인성과 관련성을 갖는데 착안하여 설계하게 된다. 그 방식이 간단하고, 특히 시간 응답특성에 부여되는 설계조건을 만족시키는 제어기의 설계에 매우 용이하게 적용될 수 있다.

만약 특성 다항식 $\delta(s)$ 가 다음과 같이 주어진다면

$$\delta(s) = \delta_n s^n + \dots + \delta_1 s + \delta_0 \quad (3)$$

그 때 안정도 지수 γ_i , 등가 시정수 τ 는 다음과 같이 정의한다.[7]

$$\gamma_i = \frac{\delta_i^2}{\delta_{i+1} \cdot \delta_{i-1}} \quad i=1 \sim n-1 \quad (4)$$

$$\tau = \frac{\delta_1}{\delta_0} = \frac{t_s}{2.5 \sim 3} \quad (5)$$

(5)에서 t_s 는 정정시간을 의미한다. 위 계수들을 이용하여 식(3)를 다시 쓰면 다음과 같고,

$$\delta(s) = \delta_0 \left[\left\{ \sum_{i=2}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\gamma_{i-j}} \right) (\tau s)^i \right\} + (\tau s) + 1 \right] \quad (6)$$

식 (3),(4),(5),(6)을 이용해 계수 δ_i 를 γ_i 와 τ 에 관한 식으로 변환하면 다음과 같다.

$$\delta_i = \delta_{i+1} \frac{\sum_{k=1}^i \gamma_k}{\tau} \quad (i \leq n-1, \delta_n = 1, \delta_0 = \frac{\delta_1}{\tau}) \quad (7)$$

식(7)의 관계식을 사용해서 미리 정해진 명세에 따른 안정도 지수와 등가시정수의 값을 만족하는 특성다항식을 결정할 수 있다. 등가시정수 τ 는 시스템의 특성에 맞게 사용자가 설정해 줄 수 있다. 안정도 지수 γ_i 도 설계자가 지정하여 설정할 수도 있지만 일반적으로 버터워스 표준형, ITAE 표준형[7]등에 의해서 미리 지정된 값을 사용한다. 이 중에서 [7]에서 지정한 표준 안정도 지수값들을 이용하면 Type 1 시스템에서 오버슈트가 발생하지 않고 모든 차수의 다항식에서 동일한 시간응답을 갖는 특성다항식의 계수를 설계할 수 있다. 그러나, CDM을 이용해서 구한 특성 다항식은 시스템의 파라미터가 정해졌을 때 안정성이 보장되지만 구간플랜트에 대해서는 안정성이 보장되지 않는다. 그런데, [9]에서는 구간 다항식이 주어졌을 때 카리토노프 이론과 리파토프 안정도 충분조건을 이용하여 구간 다항식이 안정할 충분조건을 제시하였다. 우선 정의 1과 같이 강인 안정도 계수를 정의했을

때, 정리 1은 구간 다항식이 안정할 충분조건이다.

정의 1[9] 구간 다항식의 계수가

$$a_i \in [a_i^{\min}, a_i^{\max}], (i=1, \dots, n-1)$$

로 주어졌을 때, 강인도 계수, γ_i^* 는 다음과 같이 정의된다.

$$\gamma_i^* = \min \left\{ \frac{(\delta_i^{\min})^2}{\delta_{i+1}^{\min} \delta_{i-1}^{\max}}, \frac{(\delta_i^{\max})^2}{\delta_{i+1}^{\max} \delta_{i-1}^{\min}} \right\}, (i=1, \dots, n-1) \quad (8)$$

정리 1[7](리파토프 안정도 충분조건) 구간 특성다항식의 강인도 계수 $\gamma_i^* (i=1, \dots, n-1)$ 가 다음의 조건을 만족하면 구간 특성다항식은 Hurwitz 안정하다.

$$\sqrt{\gamma_{i-1}^* \gamma_i^*} > 1.4656 \quad (9)$$

위의 결과를 종합하면

1. CDM은 주어진 플랜트에 대해서 주어진 설계명세(정정시간)를 만족시키는 특성다항식을 구할 수 있다.
2. 리파토프 안정도 충분조건은 구간플랜트에 대해서 강인성을 보장하는 특성다항식을 구할 수 있다.
3. 위 둘을 결합하면 주어진 설계명세(정정시간)를 만족시키면서 구간플랜트에 대해 강인성을 보장하는 특성다항식을 구할 수 있다.

그래서, 위에서 설명한 CDM과 정리 1의 결과를 이용하여 목적다항식을 유도하는 과정을 다음과 같이 제안한다. 우선 안정도를 위해 안정도 지수를 결정하고, 원하는 페루프 시스템의 정정시간에 따라서 등가시정수를 설정한다. 이때, 구간 플랜트의 페루프 특성다항식도 구간 다항식이 되므로 안정도 지수나 등가시정수의 값에 대한 구간을 설정함으로 구간을 가지는 다항식이 유도된다. 이렇게 구한 구간 다항식이 안정하게 위해 정리 1의 조건을 적용하여 최종적으로 안정하고 설계자의 설계명세를 만족하는 구간 목적 다항식을 구한다. 이와 같은 구간 목적 다항식의 설계단계를 다음과 같이 요약·정리하였다.

구간 목적 다항식 설계단계

1. 안정도 지수 γ_i 를 결정한다.
2. 원하는 정정시간을 만족할 만한 등가시정수의 구간, $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ 을 정한다.
3. $\delta_i^{\min(1)}, \delta_i^{\max(1)}$ 를 설정된 γ_i 와 τ_{\max}, τ_{\min} 로써 계산한다.
4. 리파토프 안정도 충분조건을 만족하도록 $\delta_i^{\min(2)}, \delta_i^{\max(2)}$ 을 구한다.[9]
5. 구간 $\delta_i^{\min(1)}, \delta_i^{\max(1)}$ 와 구간 $\delta_i^{\min(2)}, \delta_i^{\max(2)}$ 의 교집합을 구간으로 하는 δ_i 를 목적 다항식의 구간으로 결정한다.

$$\delta_i^{T-} = \max[\delta_i^{\min(1)}, \delta_i^{\min(2)}]$$

$$\delta_i^{T+} = \min[\delta_i^{\max(1)}, \delta_i^{\max(2)}]$$

4. 제어기 설계

앞 절에서 제안한 방법으로 구간 목적 다항식을 구하면 식

(1)의 형태로 표현이 된다. 이때, 식(1)의 각 계수는 제어기 계수와 플랜트 계수와 선형결합으로 표현된다. 이렇게 구한 목적다항식을 이용하여 구간불확실성을 갖는 플랜트에 대하여 제어기를 설계함으로써 제안한 목적다항식 유도과정의 타당성을 입증하고자 한다. 카리토노프 이론[5]은 다항식의 특성이 4개의 카리토노프 다항식으로 표현될 수 있음을 보이고, 이 카리토노프 다항식은 각 계수 구간의 최소, 최대값으로 표현되기 때문에 구간 다항식이 아니므로 제어기 설계에 쉽게 이용될 수 있다. 따라서 구간 플랜트를 카리토노프 다항식으로 표현하고, 정해진 구조와 미지의 계수를 갖는 제어기로 페루프를 구성한다. 페루프 특성다항식의 계수들이 제어기의 계수에 대한 선형함수로 표현되므로 식 (2)의 선형 제약조건을 만족하면 된다.

$$\delta_i^{T-} \leq \delta_i(X, P_v) \leq \delta_i^{T+}, \quad \forall i \quad (2)$$

여기서

$$\left(\begin{array}{l} X = \text{미지의 제어기의 계수공간} \\ P_v = \text{플랜트의 각 계수 구간의 최대, 최소값} \end{array} \right)$$

즉, 식(2)로 표현된 선형 제약조건을 만족하는 제어기의 계수공간, X 에서 하나의 제어기계수를 선택하여 제어기를 구성했을 때, 페루프 시스템은 주어진 구간 플랜트를 안정화하고 설계자의 설계사양을 만족하는 제어기라고 볼 수 있다. 하지만 이렇게 구해진 제어기의 계수공간에서 설계자가 원하는 또 다른 설계사양을 최대로 만족시키는 제어기의 계수를 찾아낸다면, 좀더 효과적인 제어기를 설계할 수 있을 것이다. 하지만 일반적으로 설계자의 설계사양 - 예를 들면, H_{∞} 혹은 H_2 노음, 계수적 l_2 안정도 여유 등 - 들은 제어기의 계수에 대해서 상당히 복잡한 비선형함수로 표현되기 때문에 식(2)을 제약조건으로 하는 최적화문제는 매우 풀기 어려워진다. 구조가 정해진 제어기의 계수공간에서 이러한 설계사양을 최적화하는 기법은 연구 중에 있으며, 본 논문에서는 제어기의 계수공간이 정해지면, 이 공간의 각 점에서 원하는 조건을 각각 계산하고 이를 최적화하는 한 점을 전역 탐색법을 이용하여 찾아내는 방법을 사용한다.

본 논문에서는 계수적 l_2 안정도 여유 등을 최대화하는 제어기를 찾는다. 계수적 l_2 안정도 여유는 Keel[5]의 결과에서 제어기의 계수변화에 따른 페루프의 안정도 분석에서 이용한 지수이다. 즉, 계수적 l_2 안정도 여유값이 작으면 제어기의 계수변화에 페루프 시스템의 강인성이 작고, 여유값이 크면 강인성이 크다는 것을 의미한다. 하지만, 앞에서 언급한 바와 같이 계수적 l_2 안정도 여유에 관한 식은 제어기의 계수에 대해서 상당히 복잡한 비선형함수로 표현되기 때문에 선형프로그래밍의 목적함수로 사용하기에는 어렵다. 따라서, 이 값을 최적화하기 위해서 선형제약조건을 만족하는 제어기의 계수 집합을 일정한 간격으로 분해하고 각 지점에서의 l_2 안정도 여유를 계산하여 그 값이 최대일 때의 계수를 선택하는 방법을 사용하였다. 그림 1은 지금까지 설명한 제어기의 설계과정을 요약한 개념도이다.

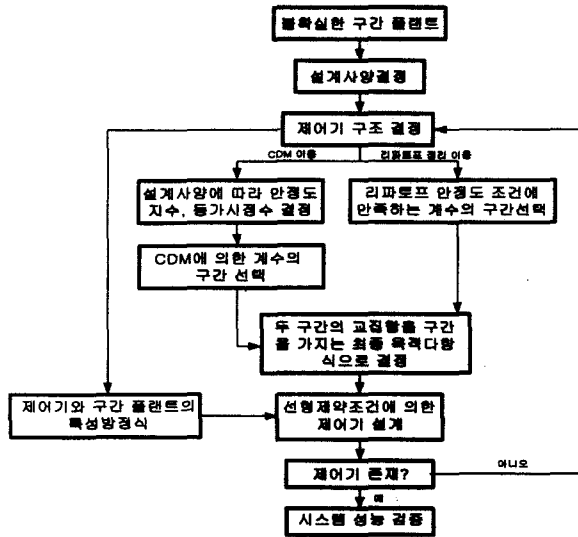


그림 1 불확실한 구간 시스템에서 강인 제어기 설계과정
Figure 1 Block Diagram of Robust Controller Design for Uncertain Interval Plants

5. 모의실험

5장에서는 3장에서 유도한 목적다항식을 이용하여 FOPA 기법으로 간단한 불확실성을 갖는 구간 플랜트에서의 강인제어기를 설계하여, 기존의 강인제어 기법으로 설계된 제어기와 성능을 비교함으로써 유도한 목적다항식의 유용성을 확인하고자 한다. 설계예제에서 사용한 플랜트로서 식(10) 과 같이 표현되는 독립진자 시스템을 생각한다[8].

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{a}s}{s^3 + \frac{b(I+ml^2)}{a}s^2 - \frac{(M+m)mgl}{a}s - \frac{bmgl}{a}}$$

(10)

$$a = [(M+m)(I+ml^2) - (ml)^2]$$

여기서, 각 계수는

M : Cart의 무게 (0.5 Kg)

m : 진자의 무게 (0.2 Kg)

b : Cart와 지표면의 마찰계수 (0.1 m/s²)

l : 진자의 무게중심까지의 길이 (0.3 M)

I : 진자의 관성모멘트 (0.006 kg·m²)

이다.

위 계수들 중 관성계수 I 와 마찰계수 b 는 모형화할 때 정확한 값을 찾아내기 쉽지 않다. 따라서, 측정값의 10%의 불확실성을 주었다. 이러한 불확실한 플랜트를 계산한 값은 식(11)과 같은 구간 플랜트로 표현되고, 공칭모델은 식(12)과 같다.

$$P(s) = \frac{\beta_1 s}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{11}$$

$$\beta_1 \in [4.4053 \quad 4.6948], \quad a_2 \in [0.16256 \quad 0.20141],$$

$$a_1 \in [-32.207 \quad -30.220], \quad a_0 \in [-5.0610 \quad -3.8855]$$

$$P_0(s) = \frac{4.5455s}{s^3 + 0.18182s^2 - 31.182s - 4.4544} \tag{12}$$

5.1. 기존의 강인제어 기법을 사용한 제어기 설계

비교대상 제어기를 설계하기 위해 편의상 [8]의 설계방법을 이용하고 「기존의 알고리즘」이라 칭하기로 한다. 우선, 구간 플랜트에서 각 계수가 변하면서 오는 섭동을 모두 고려할 수 있는 제어기 가중함수를 설정해야 한다. 이 가중함수를 설정하기 위해서 식(11)의 구간 불확실 모형의 특성에서 식(12)로 표현된 공칭 모형의 특성을 구간플랜트의 크기를 뺀 만큼의 섭동을 그림 1과 같이 구하고 이 특성을 모두 포함하는 가중함수를 설정함으로써 구간 불확실성을 구조적 불확실성으로 근사화할 수 있다.

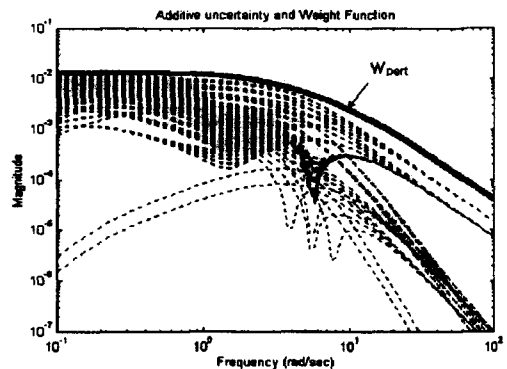


그림 2 구간 불확실성과 덧셈형 불확실성의 가중함수 W_{pert}
Figure 2 Additive uncertainty and Weight Function W_{pert}

그림 2는 공칭모델과 불확실모델의 차이이므로 이 특성을 모두 표현할 수 있는 가중함수 W_{pert} 구하여 식(13)와 같은 덧셈형 불확실 시스템 $P_1(s)$ 으로 다시 표현하면 $P_1(s)$ 은 $P(s)$ 를 근사화한 불확실 시스템이라고 볼 수 있다.

$$P_1(s) = P_0(s) + \Delta \cdot W_{pert} \tag{13}$$

여기에서 $|\Delta| < 1$ 이고 W_{pert} 는 식(14)로 표현된다.

$$W_{pert} = \frac{0.4}{s^2 + 15s + 30} \tag{14}$$

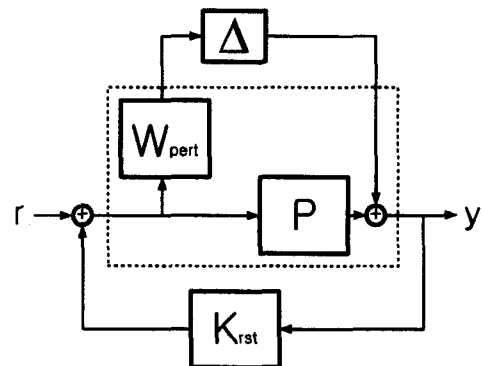


그림 3 강인제어기 설계를 위한 개념도
Figure 3 Block Diagram for Robust Controller Design

그림 3은 주어진 플랜트에 대해 강인제어 기법으로 제어기를 설계하기 위하여 앞에서 설정한 가중함수를 포함하는 개념도이다. 설계방법은 μ 설계법을 이용하여 외란에서 출력까지의 전달함수의 μ 값이 1보다 작아지도록 설계하였다. 설계된 제어기는 5차이고 식(15)와 같이 표현된다.

$$K_{rst}(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad (15)$$

여기서 분자·분모 다항식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_1(s) &= -5.2305e^{-6}s^5 + 3.5854e7s^4 + 6.1022e8s^3 \\ &\quad + 1.4406e9s^2 - 8.6449e9s - 2.1634e10 \\ D_1(s) &= s^5 + 4.5061e3s^4 + 6.8853e5s^3 \\ &\quad - 1.1497e8s^2 - 1.9193e9s - 3.9081e9 \end{aligned}$$

5.2. 저차제어기 PID제어기 설계

3장에서 유도한 목적다항식을 사용하여 4장의 방법으로 설계한 제어기를 「제안한 알고리즘」이라 칭하기로 한다. 제어기 설계에 필수적이면서 그 성능에 중요한 역할을 하는 목적다항식을 유도하는 과정을 우리가 제안한 방법으로 하였으므로 이후의 과정은 다른 저차의 기법을 원용했다라도 이렇게 부를 수 있을 것이다.

원하는 제어기 명세는 식(11)로 표현된 플랜트를 안정화하고, 페루프 시스템의 정정시간이 1.2초 미만이 되도록 하는 제어기라고 가정한다. 또 제어기의 구조는 산업현장에서 많이 사용하고 있는 PID 제어기의 구조를 갖도록 한다.

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (16)$$

우선, 안정도지수는 S. Manabe가 제안한 CDM 표준 안정도 지수로 선택하였다. 그 값은 다음과 같다.

$$\gamma_i = [2.5, 2, 2, \dots] \quad (17)$$

페루프시스템의 등가시정수를 다음과 같이 정한다.

$$\tau = [0.2, 0.3] \quad (18)$$

안정도 지수와 등가시정수의 값을 식(17),(18)과 같이 정했을 때, CDM과 리파토프 안정도 충분조건을 이용하여 각각 구간을 갖는 목적 다항식을 설정하고, 각 계수에 대해서 이들의 교집합을 구해보면 표 1과 같은 결과를 얻을 수 있다.

표 1 구간 목적다항식의 계수 결정
Table 1 Coefficient of Interval Target Polynomial

	CDM (A)		리파토프 (B)		최종목적다항식 (C = A ∩ B)		δ_i
	min	max	min	max	min	max	
δ_3	1	1	1	1	1	1	1
δ_2	16.67	25	16.67	25	16.67	25	$K_D\beta_0 + \alpha_2$
δ_1	138.9	312.5	138.9	189.5	138.9	189.5	$K_P\beta_0 + \alpha_1$
δ_0	463.0	1562.5	463.0	526.5	463.0	526.5	$K_I\beta_0 + \alpha_0$

【 여기서 구한 최종 목적다항식의 구간에서의 최대의 τ 는

$$\tau = \frac{189.5}{463.0} \text{ 이 되고, 이에 따라 페루프 시스템의 정정시}$$

간은 최대 $t_s \approx 1.23 \{t_s = (2.5 \sim 3)\tau\}$ 가 되고 이에 따라 원하는 설계명세를 만족함을 알 수 있다.】

즉, 표 1에서 마지막 행으로 표현된 제어기와 플랜트의 계수의 선형결합이 최종구간으로 표현된 계수구간의 최소·최대값 사이에 존재해야 함으로 식(18)와 같은 선형제약으로 표현할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 16.67 \\ 138.9 \\ 463.0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_D\beta_1 + \alpha_2 \\ K_P\beta_1 + \alpha_1 \\ K_I\beta_1 + \alpha_0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 25 \\ 189.5 \\ 526.5 \end{pmatrix} \quad (19)$$

그림 4는 최종적으로 정해진 구간 목적다항식의 극점의 위치를 그린 것이다.

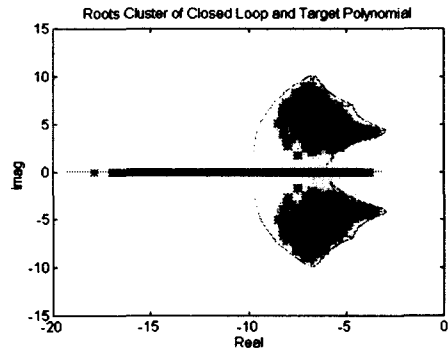


그림 4 최종 목적 구간다항식의 극점
Figure 4 Root Cluster of Target Polynomial

이러한 특성을 만족하는 제어기의 구간을 구해보면 다음과 같다. 식(19)의 조건을 만족하는 제어기의 계수의 구간을 구하기 위해서는 (11)의 구간 시스템에서 분모와 분자의 다항식을 각각 4개의 카리토노프 다항식으로 표현하고, 전체 16개의 카리토노프 시스템에 대해서 제어기의 구간을 구한 뒤에 그 교집합을 구하면 된다. 구해진 제어기 계수의 구간은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 38.839 \\ 106.24 \\ 3.7464 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} K_P \\ K_I \\ K_D \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 46.807 \\ 112.97 \\ 5.2821 \end{pmatrix} \quad (20)$$

이렇게 표현된 제어기 계수의 공간 내에 존재하는 모든 제어기는 앞서 설정한 설계사양을 만족하는 제어기가 된다. 따라서 구간 시스템을 안정화하는 강인 PID 제어기를 설계할 수 있다. 하지만 좀더 나아가서, 구간으로 표현된 제어기 공간에서 좀더 나은 성능을 가진 제어기를 선택할 수 있을 것이다. 성능에 대한 선택사항을 여러 가지가 있을 수 있지만, 여기서는 제어기의 계수적 l_2 안정도 여유를 최대화하는 K_P, K_I, K_D 를 구한다. 앞서 언급한 바와 같이 선형제약조건에서 계수적 l_2 안정도 여유를 최적화하는 알고리즘은 아직 연구되지 않았기 때문에, 전체 제어기의 계수공간에 대해서 계수적 l_2 안정도 여유를 계산하고 이 중에서 최대가 되는 한 점을 선택하였다. 그림 5은 이러한 제어기 계수공간에서 계수적 l_2 안정도 여유를 나타낸 그림이다. 그림에서 보는 바와 같이 $K_P=39.0, K_I=106.24, K_D=5.2821$ 에

서 가장 큰 안정도 여유를 갖는다는 것을 알 수 있다. 따라서 이 때의 제어기를 최종 제어기로 선택하였다.

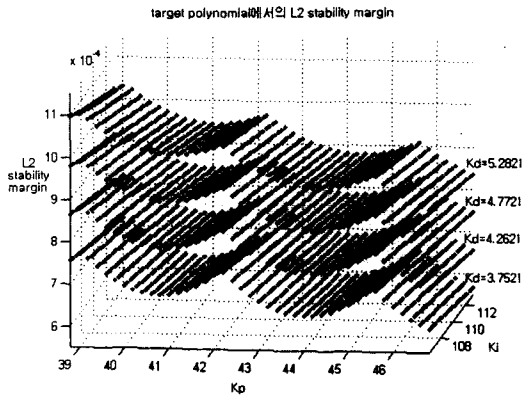


그림 5 구해진 제어기의 계수공간에서의 계수적 l_2 안정도 여유

Figure 5 l_2 Stability Margin in Parametric Space of Controller

5.3. 두 제어기의 비교

본 절에서는 앞서 구한 두 개의 제어기를 비교 분석한다. 우선 μ 값과 제어기의 l_2 안정도 여유를 비교해 보았다. μ 값은 강인제어기 설계알고리즘이 제안한 알고리즘에 비해서 더 우수한 값을 보였고 제어기의 l_2 안정도 여유는 제안한 알고리즘이 더 우수한 값을 보였다. 제어기의 l_2 안정도 여유값은 제안한 알고리즘이 1.1018×10^{-3} 으로 기존의 강인제어 기법으로 설계된 제어기의 안정도 여유보다 약 2.4621×10^5 만큼의 향상이 있음을 알 수 있다. 이러한 향상은 기존의 강인제어 기법은 제어기의 l_2 안정도 여유를 고려한 제어기를 설계하는 방법을 가지고 있지 않기 때문이며, 제안한 알고리즘의 장점으로 생각할 수 있다. μ 값에서의 차이점은 플랜트의 불확실성을 표현하는 방식의 차이점에서 기인한 결과라고 생각된다. 즉, 기존의 강인제어기의 설계에서는 구간 불확실특성을 가중함수 W_{pert} 를 이용하여 표현하였는데, 이는 주파수의 함수이므로 모든 주파수 영역에서 강인안정도 조건을 만족시키는 제어기를 구하게 된다. 결국 구해진 제어기는 제안한 제어기 보다 보수적(conservative)이라고 생각할 수 있다. 이와 반대로 제안한 방식에서는 구간 플랜트의 특성을 그대로 제어기 설계에 이용하였으므로 더 향상된 결과를 기대할 수 있다.

표 2 μ 와 제어기 계수의 l_2 안정도여유 비교

Table 2 Comparing of μ and l_2 Stability Margin of Controller's Coefficient

	기존의 알고리즘	제안한 알고리즘
μ	0.4026	0.5258
제어기의 l_2 안정도 여유	4.4751×10^{-9}	1.1018×10^{-3}

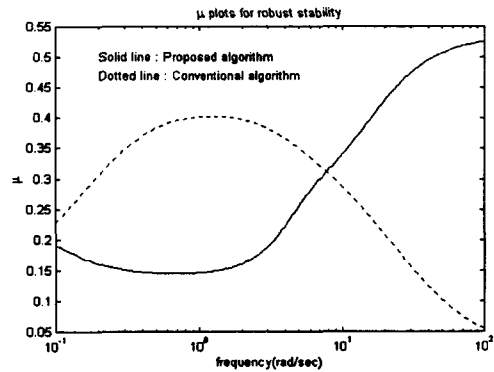


그림 6 강인 안정도의 μ

Figure 6 μ of Robust Stability

다음은 제어기의 l_2 안정도 여유를 확인해 보기 위해 구해진 제어기의 계수에 섭동을 주었을 때, 임펄스 응답을 비교해 보았다. 기존의 방법으로 구한 제어기의 경우, 약 $\pm 6\%$ 의 섭동을 주었을 때, 그림 7과같이 거의 발산할 수도 있음을 알 수 있다. 반면에 제안한 알고리즘으로 설계된 제어기의 경우 같은 양의 섭동에도 성능이 거의 변하지 않음을 알 수 있다. 따라서 제안한 알고리즘이 구간 플랜트의 강인제어기 설계에 매우 유용함을 알 수 있다.

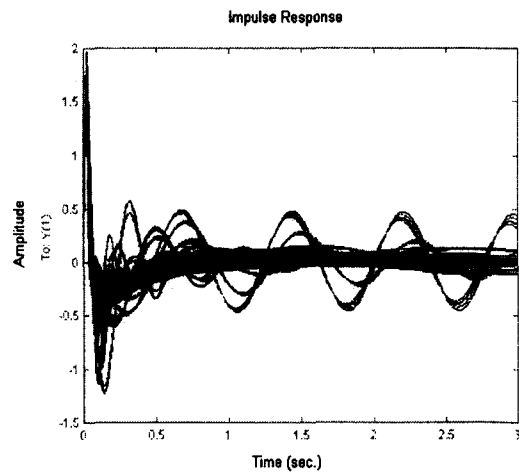


그림 7 기존의 알고리즘으로 설계된 제어기에 6%의 섭동을 주었을 경우의 충격응답

Figure 7 Impulse Response for Controller's Perturbation of 6% using Classical Algorithm

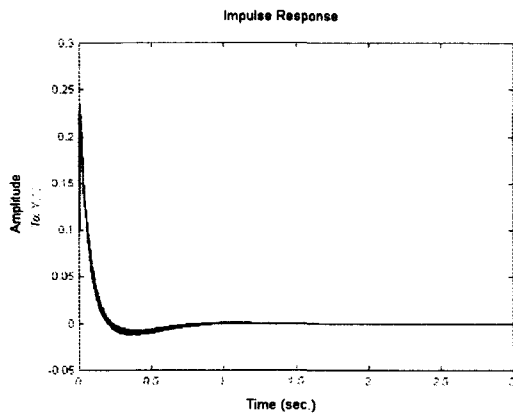


그림 8 제안한 알고리즘으로 설계된 제어기에 6%의 섭동을 주었을 경우의 충격응답

Figure 8 Impulse Response for Controller's Perturbation of 6% using Proposal Algorithm

6. 결 론

본 논문에서는 구간 플랜트의 강인한 제어기를 설계하기 위해 중요한 목적다항식을 유도하는 방법을 제안하였다. 제안한 방법은 고정차수 극배치방법의 확장을 이용하였으며, 구간 목적 다항식을 CDM과 리파토프 안정도 충분조건을 이용하여 설정하였다. 이와 같이 설정된 목적다항식으로 설계된 제어기는 선형제약조건으로 표현된 집합으로 구할 수 있었고, 이 집합의 모든 제어기는 불확실한 구간 플랜트를 안정화하고 시간영역에서의 제약조건을 만족하였다. 또, 이 집합에서 제어기의 계수적 l_2 안정도 여유를 최대화하는 제어기를 찾아낼 수 있었고, 안정도 여유면에서 기존의 강인 제어기법으로 설계한 제어기보다 우수함으로 보였다. 이런 설계방법은 구간 플랜트에서의 강인 제어기 설계방향과 고정된 구조를 갖는 제어기의 새로운 설계방향을 제안할 수 있다는 점에서 이와 관련된 연구 분야에 도움이 될 것이라고 생각된다. 마지막으로, 제안한 방법의 효용성을 검증하기 위해 불확실한 구간을 갖는 간단한 도립진자 시스템에 대해서 PID 제어기를 설계해 보았다.

참 고 문 헌

[1] L.H. Keel, S.P. Bhattachayya, "Robust, Fragile, or Optimal", IEEE Trans, Automatic Control. Vol42, p1098~1105 1997
 [2] L.H. Keel, S.P. Bhattachayya, "Stability Margin and Digital Implementation of Controllers", Proceedings of the ACC June 1998 p2852~2856
 [3] S.S. Ahmad, J.S. Lew, and L.H. Keel, "Robust Control of Flexible structures against structural Damage" Proc. of the ACC, p2460~2464, June 1998
 [4] L.H.Keel, S.P.Battachayya "Robust stability and performance with fixed-order controller" Automatica 35(1999) 1717~1724
 [5] S.P. Bhattachayya, H.Chapellat, L.H. Keel "Robust Control:The Parametric Approach. Upper Saddle River, NJ:Prentice Hall, 1995
 [6] S.P. Bhattachayya, L.H. Keel, M. Ikeda "New Approach to Feedback Design" International Workshop 충북대학교,

July 1999

[7] S. Manabe, "Coefficient Diagram Method", 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, p199~210, Aug 1998
 [8] 차영호, 정태진, 원용규, 정찬수, "도립진자 시스템에서의 제어기 안정도 향상" Proceedings of the 14th KACC, Oct 14~16 1999
 [9] 주성준, 박영배, "리파토프 정리를 이용한 강인한 제어기 설계", Proceedings of the 13th KACC, Oct 1999
 [10] 이진규, 차영호, 정태진, 박용식, 정찬수 "리파토프 정리를 이용한 구간 플랜트의 제어기 설계" 대한 전기학회 추계 학술대회 479~481, 1999

저 자 소 개

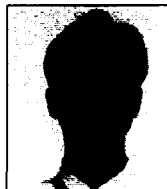


오 학 준 (吳學俊)

1967년 3월 14일 생. 1993년 숭실대 전기공학과 졸업. 1995년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 동 대학원 전기공학과 박사과정

Tel : 02-817-0004

E-mail : ohhakjoon@hanmail.net



정 태 진 (鄭太鎭)

1971년 3월 일 생. 1994년 숭실대 전기공학과 졸업. 1996년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 2001년 동 대학원 전기공학과 박사학위 수여예정

Tel : 02-817-0004

E-mail : tarzan@ee.ssu.ac.kr



이 진 규 (李振奎)

1973년 8월 22일 생. 1999년 숭실대 전기공학과 졸업. 2001년 동 대학원 전기공학과 석사학위 수여예정

Tel : 02-817-0004

E-mail : mrblues@hanmail.net



정 찬 수 (鄭讚壽)

1949년 8월 10일 생. 1972년 서울대 전기공학과 졸업. 1980년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1987년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박). 현재 숭실대 전기공학과 교수

Tel : 02-817-0004, Fax : 02-817-7961

E-mail : jacob@ee.ssu.ac.kr