

기계적 진동에 대한 MRS 및 MRS의 응용

Maxima Response Spectrum for each Mechanical Vibration and its Application

ABSTRACT

This paper considers the Maximum Response Spectrum for the random vibration, sinusoidal vibration, linear sweep vibration. The random vibration quality levels and the sinusoidal vibration quality level are compared using MRS. And the severity between the vibration test specification and real environments using Maximum Response Spectrum are also compared using it.

Key Words : Maximum Response Spectrum, Random Vibration, Sinusoidal Vibration, Linear Sweep Vibration, Random Vibration Quality Level, Sinusoidal Vibration Quality Level

기호설명

a : threshold value
 f_0 : 특성주파수
 $G_z(f)$: PSD of $z(t)$
 k : spring coefficient of system
 m : mass of system
 n_a^+ : number of a crossing per unit time
 N_a^+ : number of a crossing during time T
 n_o : mean number of zero crossings per unit time
 n_p^+ : mean number of relative maxima of $z(t)$ per unit time

$p(z)$: probability density function
 Q : transfer function of the system
 R : maxima response spetrum
 r : irregularity coefficient
 T : time
 u_m : response of system
 $z(t)$: amplitude(relative displacement)
 z_m : max displcaement of system
 z_r : rms value of max $z(t)$
 Γ : Gamma function
 ξ : dampong coefficient
 σ : response stress level
 σ_p : peak response stress level
 σ_r : rms value of σ
 σ_x : rms speed
 σ_{xz} : rms acceleration

* 국방과학연구소
** 충남대학교 기계공학과

1. 서 론

오늘날 모든 구조물이나 시스템은 기계적, 전기적 성능이 독자적으로 혹은 서로 유기적으로 조합되어 고유의 기능을 발휘하게 되는데 첨단 장비나 고가 장비일 수록 전자 부품이 차지하는 비중이 더욱 커져 가고 있다. 시스템에서 전자 부품이 차지하는 비중이 가격이나 기능에서 모두 증가함에 따라 시스템은 여러 가지 발전된 기능을 수행할 수 있게 되었으나 상대적으로 시스템에 대한 신뢰도는 함께 증가하지 못하고 있다. 이는 시스템의 부품이 전자화 되고 복잡해짐에 따라 여러 가지 이유로 인해 부품에 이상이 발생할 확률이 점점 커지기 때문이다.

그리고 시스템의 신뢰도를 저하시키는 큰 이유는 시스템에 가해지는 진동과 충격 하중으로서 시스템에 치명적인 손상을 주는 주요인이 된다. 때문에 오늘날 대부분의 시스템은 완성 전부터 단품별로 진동/충격 시험을 거쳐 내구 성능을 확인하고 조립 후에도 마찬가지로 진동/충격시험을 수행하여 시스템의 내구성을 검증하는 절차가 수반된다. 이는 진동/충격시험을 통하여 각종 시스템의 내구성을 정확하고 합리적으로 시험, 분석함으로써 시스템의 신뢰도를 향상시킬 뿐 아니라 시스템 개발시 적절한 내구성을 유지시키기 위한 최적의 설계가 가능하게 할 수 있기 때문이다. 본 논문에서는 진동 특성에 대한 MRS와 이를 이용하여 진동환경과 진동규격을 비교해보고자 한다.

2. Maximum Response Spectrum

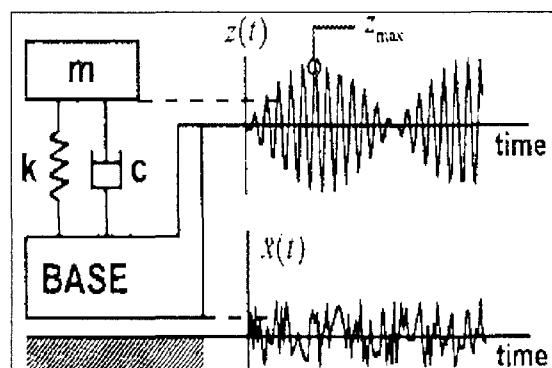
2.1 개 요

외력에 의한 기계적 구조물의 운동을 보통 구조물

의 응답이라고 한다. 또한, 이 구조물에 가해지는 외부의 힘을 가진력(exiting force)이라고 하는데 기계적 구조물에서 질량(mass), 강성(stiffness), 감쇠계수(Damping coefficient) 등을 알고 있으면, 외력이나 응답중 한 개만 알아도 나머지는 계산으로 구할 수 있다. 따라서 이제 설명할 것은 먼저 가진력을 알아낸 후에 이를 바탕으로 응답을 구하고, 이 응답으로부터 최대 변위에 의한 최대 응력을 계산해 내는 일련의 과정이다. 이와 같은 절차의 첫번째 단계는 관련 장비가 운용되는 위치에서 측정한 진동 가속도 자료로부터 두요소중 하나인 가진력을 구하는 것이다.

시스템에 대한 가진력은 시스템의 운용환경으로부터 계측한 자료를 분석하여 얻을 수 있다. 이것은 시스템에 가해지는 외력으로 간주되어 시스템의 응답을 구하고, 또한 이를 이용하여 시스템의 최대 응력과 파괴 정도를 정량적으로 비교, 분석한다.

위와 같이 응답 스펙트럼을 이용하여 비교, 분석하고 진동 시험 수준을 결정하기 위해서는 제품이나 장비의 기계적인 동적 거동(Mechanical Dynamic Behavior)을 고려하여, 각 장비들이 견딜 수 있는 극한치에 의한 손상 정도를 파악해야 한다. 그러나 대부분의 복잡한 제품이나 장비의 경우에는 필요한 자료



[그림 1] SDOF System

를 수치적으로 얻기가 매우 어렵기 때문에 이와 같은 변수들을 구하기 위해 아래 그림 1과 같은 기계적 기본 모델을 가정해야 한다.

모델은 선형 시스템(Linear System)으로써, Mass-Spring-Damper를 각각 1개씩 갖는 SDOF(Single Degree of Freedom) System으로 가정하고 시스템의 고유 주파수는 계속적으로 변한다고 생각한다.

가진력 스펙트럼을 이 모델에 적용시키면 질량이 가진(Excitation)되는 효과를 나타내게 되고, 이는 모델에 변위를 유발시키므로 변위에 해당하는 Amplitude를 구할 수 있게 된다. 또한 선형계를 가정하였으므로 이 변위가 비례적으로 파생시키는 응력까지 알 수 있다.

그리고 최대 응답 스펙트럼(Maximum Response Spectrum)은 변수 R을 사용하여 아래와 같이 정의하였다.

$$R = \left(\frac{k}{m}\right)z_m \quad (1)$$

이때, z_m 는 시스템의 최대변위이다.

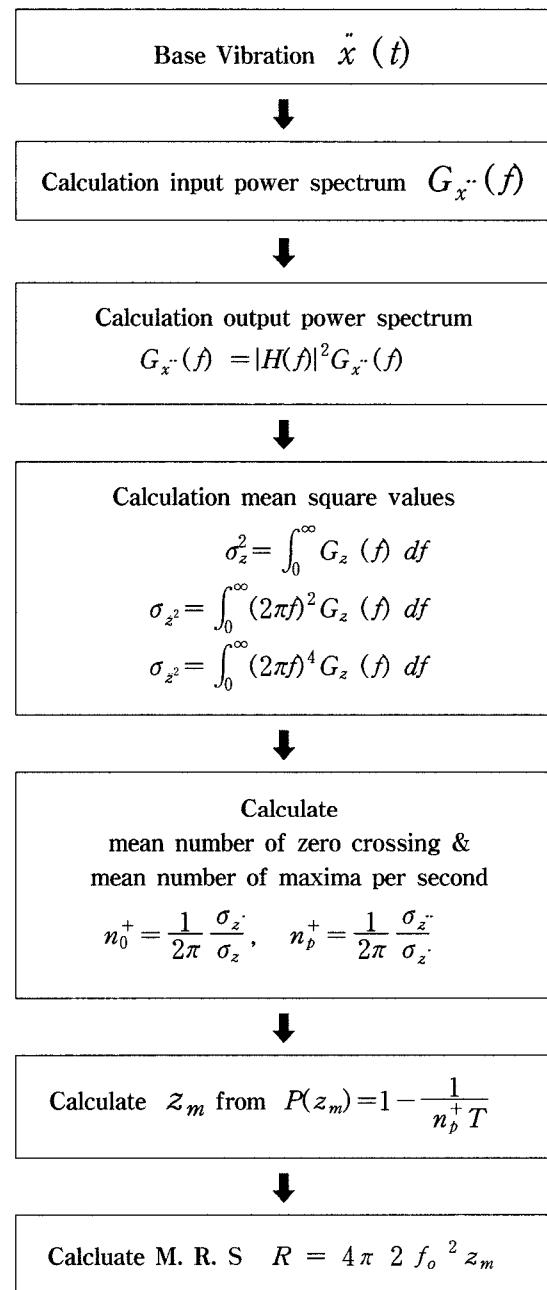
즉, 단위 무게당 작용하는 응력이라고 할 수 있다. 이때, 시스템의 고유 진동수를 f_o 라고 하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$f_o = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} \quad (2)$$

$$\frac{k}{m} = (2\pi f_o)^2 = 4\pi^2 f_o^2 \quad (3)$$

이 되며 식(3)을 식(1)에 대입하면 다음 식(4)와 같다.

$$R = 4\pi^2 f_o^2 z_m \quad (4)$$



[그림 2] MRS를 구하는 흐름도

식(4)와 같이 임의의 감쇠(ξ)에 대하여 주파수(f_o)에 대한 $4\pi^2 f_o^2 z_m$ 양의 변화를 나타내는 곡선을 최대 응답 스펙트럼이라 한다.

2.2 임의 진동(Random Vibrations)에 대한 MRS 수학적으로 SDOF의 약한 감쇠계(Lightly Damped System)에서 난진동(Random Vibration)의 반응(Response)이 정규 분포(Normal Distribution)를 따른다고 가정하면 이에 의한 최대변위는 Rayleigh 분포(Rayleigh Distribution)를 따른다. Rayleigh 분포는 표준 정규 분포를 따르는 변수(Normal Random Variable), 즉 $N(0,1)$ 인 변수들의 제곱의 합인 χ^2 (chi square)분포를 square root한 χ 분포 중에서 2nd DOF에 해당하는 경우를 말하는 것이다. 그러므로 Rayleigh 분포를 따르는 변수 u 를 정의하면 아래와 같다.

$$p(u) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2(1-r^2)}} + \frac{ur}{2} e^{-\frac{u^2}{2}} (1 + Erf(\frac{ur}{\sqrt{2(1-r^2)}})) \quad .(5)$$

이때,

$u = \frac{z_p}{Z_{eff}} = \frac{\sigma_p}{\sigma_{eff}}$ 이고, σ_p 는 응답응력($\sigma(t)$)의 최대이며, σ_{rms} 는 응답응력 rms값이다. 그리고 $r = \frac{n_0}{2n_p^+}$ 이고, $n_0 = 2n_p^+$ 는 상대변위 $z(t)$ 가 단위시간당 0값을 통과할 평균이고, n_p^+ 는 단위시간당 상대변위($z(t)$)의 피크값을 나타내는 횟수이며, z , z_p 는 상대변위($z(t)$)의 r.m.s 값이다.

그리고,

$$N_0 = \frac{1}{\pi} \frac{\dot{\sigma}_r}{\sigma_r} \quad .(6)$$

$$n_0^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\dot{\sigma}_r}{\sigma_r} \quad .(7)$$

$$n_p^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\ddot{\sigma}_r}{\dot{\sigma}_r} \quad .(8)$$

이며, σ_x , σ_{x^-} , σ_{x^+} 는 아래 식과 같이 상대변위($z(t)$)의 스펙트럼 밀도(Spectral Density)로부터 구해진다.

$$\sigma_x = \int_0^\infty G_z(f) df \quad .(9)$$

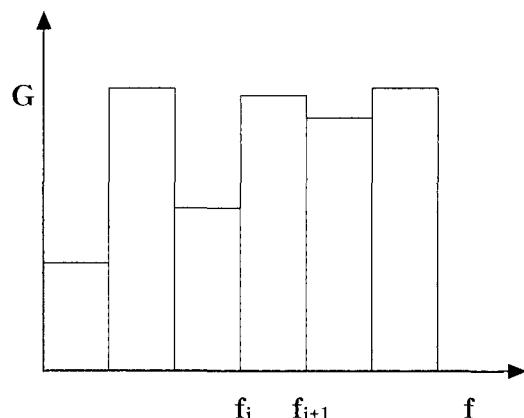
$$\sigma_{x^-} = (2\pi)^2 \int_0^\infty f^2 G_z(f) df \quad .(10)$$

$$\sigma_{x^+} = (2\pi)^4 \int_0^\infty f^4 G_z(f) df \quad .(11)$$

이며, $G_z(f)$ 는 아래 그림 3과 같이 상대변위($z(t)$)의 PSD이다.

그리고, 상대변위($z(t)$)가 협대역 특성(Narrow Band)특성을 갖는다면, 단위시간동안 상대변위($z(t)$)가 threshold 값인 a 를 넘을 횟수(n_a^+)는 다음과 같이 정의되므로,

$$n_a^+ = n_0^+ \exp(-\frac{a^2}{2\sigma_z^2}) \quad .(12)$$



[그림 3] 주파수별 PSD

일정시간 T 동안 상대변위($z(t)$)가 threshold값인 a 를 넘을 횟수는 위식(19)로부터

$$N_a^+ = n_a^+ T = n_0^+ T \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad (13)$$

$N=1$ 일 때의 u_m 값을 구함으로써 최대 변위인 z_m 값도 구할 수 있다.

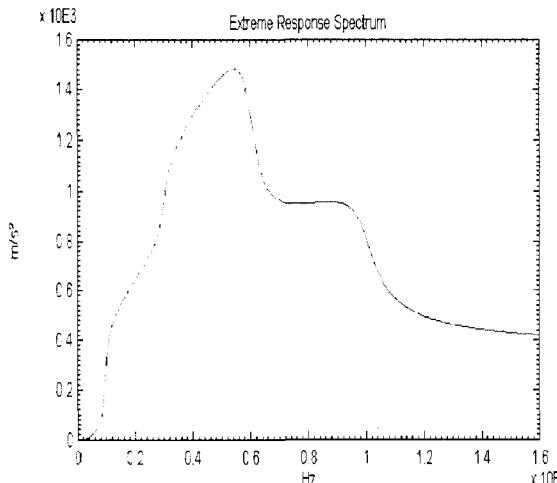
$$z_m = u_m \sigma_z = \sigma_z \sqrt{(2 \ln f_0 T)} \quad (14)$$

N_a^+ 가 단 한번($N_a^+ = 1$)이 되는 a 값이 시간 T 동안 발생할 수 있는 상대변위의 최대값 z_{max} 이며 아래식과 같다.

$$z_{max} = \sigma_z \sqrt{2 \ln(n_0^+ T)} \quad (15)$$

따라서 최대 랜덤진동에 대한 응답스펙트럼(R)은 식(15)을 식(4)에 대입하면 다음과 같이 구해진다.

$$R = 4\pi^2 f_0^2 \sigma_z \sqrt{(2 \ln n_0^+ T)} \quad (16)$$



[그림 4] 임의 진동에 대한 MRS

2.3 정현파 진동에 대한 MRS

그림 1과 같은 1자유도 시스템에 대한 운동방정식은

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \ddot{x}_m \sin \omega t \quad (17)$$

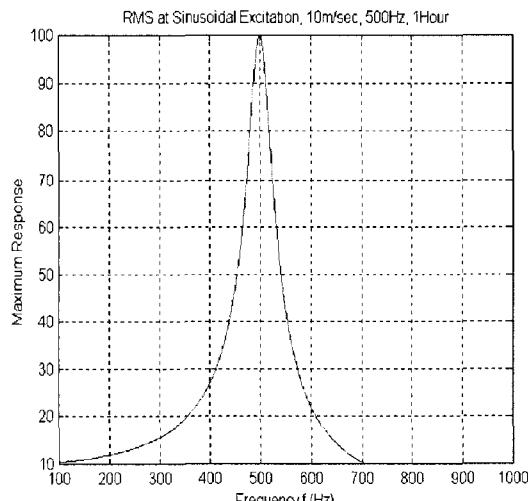
이며 식(17)의 상대변위 $z(t)$ 는

$$z(t) = \frac{-\ddot{x}(t)}{\omega_0^2 [[1 - (\frac{f}{f_0})^2]^2 + 4\xi^2(\frac{f}{f_0})^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (18)$$

이때, $\omega_0 = 2\pi f_0$ 이다.

임의의 주파수 f 와 f_0 에 대하여 $\ddot{x}(t) = \ddot{x}_m$ 일 때 상대변위 $z(t)$ 가 최대이므로 식(4)에 식(18)을 대입하면

$$R = \omega_0^2 z_m = \frac{\ddot{x}_m}{[[1 - (\frac{f}{f_0})^2]^2 + 4\xi^2(\frac{f}{f_0})^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (19)$$



[그림 5] 정현파 진동에 대한 MRS

이때 positive 스펙트럼과 negative 스펙트럼은 대칭(symmetric)하며, positive 스펙트럼은 분모가 최소 일 때 최대이다. 즉,

$$2[1 - (\frac{f}{f_0})^2][\frac{-2f}{f_0}][-\frac{f}{f_0}] + \frac{1}{Q^2} 2 \frac{f}{f_0}^2 = 0$$

이고, $Q = \frac{1}{2\xi}$ 일 때

$$f_0 = f \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}} + \frac{f}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad (20)$$

이고

$$R = \frac{Qx_m''}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{x_m''}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (21)$$

2.4 정현 Linear Sweep에 대한 MRS
swept 주기(interval) 주파수 f_1, f_2 내에서 계의
응답은

$$U_m = Ql_m \quad (22)$$

이며, 이때 l_m 은 generalized maximum excitation 이고 Q 는 계의 전달함수이다. 그리고, swept 가진 주파수 밖의 주파수에 대한 응답중 $f_0 \leq f_1$ 에 대한 응답은

$$U_m = \frac{l_m}{\sqrt{[1 - (\frac{f_1}{f_2})^2]^2 + \frac{f_1^2}{Q^2 f_0^2}}} \quad (23)$$

$f_0 \geq f_2$ 에 대한 응답은

$$U_m = \frac{l_m}{\sqrt{[1 - (\frac{f_2}{f_0})^2]^2 + \frac{f_2^2}{Q^2 f_0^2}}} \quad (24)$$

특히 가속도가 일정한 상태에서의 가진의 경우에는

$$|l_m| = \frac{x_m''}{\omega_0^2} \quad (25)$$

이고, $U_m = z_m$ 이므로

f_1, f_2 사이에서의 최대응답스펙트럼은

$$R = \omega_0^2 Z_m = Qx_m'' \quad (26)$$

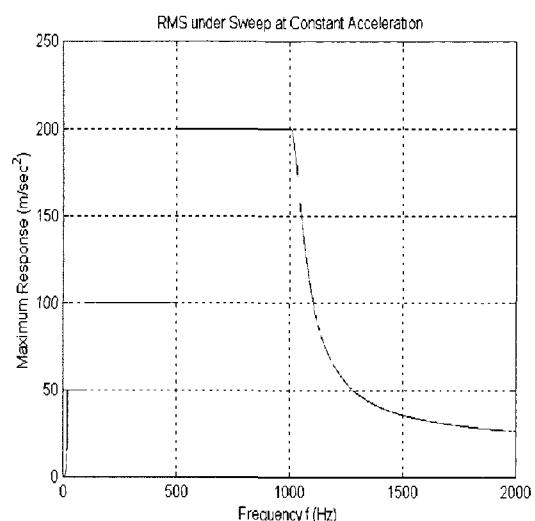
이고, $f_0 \leq f_1$ 에 대한 최대응답스펙트럼은

$$R = \omega_0^2 Z_m = \frac{x_m''}{\sqrt{[1 - (\frac{f_1}{f_0})^2]^2 + \frac{f_1^2}{Q^2 f_0^2}}} \quad (27)$$

이고, $f_0 \geq f_2$ 에 대한 최대응답스펙트럼은

$$R = \omega_0^2 Z_m = \frac{x_m''}{\sqrt{[1 - (\frac{f_2}{f_0})^2]^2 + \frac{f_2^2}{Q^2 f_0^2}}} \quad (28)$$

임을 알 수 있다.



[그림 6] 변위가 일정한 선형 Sweep 가진에 대한 MRS

그리고, 속도가 일정한 상태에서의 가진의 경우에는

$$|I_m| = \frac{\omega \ddot{x}_m}{\omega_0^2} \quad (29)$$

이므로, f_1, f_2 사이에서의 최대응답스펙트럼은

$$R = \omega_0^2 Z_m = Q \omega \ddot{x}_m \quad (30)$$

이고, $f_0 \leq f_1$ 에 대한 최대응답스펙트럼은

$$R = \omega_0^2 Z_m = \frac{\omega \ddot{x}_m}{\sqrt{[1 - (\frac{f_1}{f_0})^2]^2 + \frac{f_1^2}{Q^2 f_0^2}}} \quad (31)$$

이고, $f_0 \geq f_2$ 에 대한 최대응답스펙트럼은

$$R = \omega_0^2 Z_m = \frac{\omega \ddot{x}_m}{\sqrt{[1 - (\frac{f_2}{f_0})^2]^2 + \frac{f_2^2}{Q^2 f_0^2}}} \quad (32)$$

이며, 변위가 일정한 상태에서의 가진의 경우에는

$$|I_m| = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} x_m \quad (33)$$

이므로, f_1, f_2 사이에서의 최대응답스펙트럼은

$$R = \omega_0^2 Z_m = Q \omega^2 x_m \quad (34)$$

이고, $f_0 \leq f_1$ 에 대한 최대응답스펙트럼은

$$R = \omega_0^2 Z_m = \frac{\omega^2 x_m}{\sqrt{[1 - (\frac{f_1}{f_0})^2]^2 + \frac{f_1^2}{Q^2 f_0^2}}} \quad (35)$$

이고, $f_0 \geq f_2$ 에 대한 최대응답스펙트럼은

$$R = \omega_0^2 Z_m = \frac{\omega^2 x_m}{\sqrt{[1 - (\frac{f_2}{f_0})^2]^2 + \frac{f_2^2}{Q^2 f_0^2}}} \quad (36)$$

3. MRS를 이용한 진동규격 비교

전장에서 여러 진동에 대하여 유도한 MRS는 진동 환경중 시스템에 가해지는 응력을 파악할 수 있을뿐 아니라 실제 환경의 가속도, 실제환경과 진동시험 규격, 다른 형태로 제시된 진동시험 규격들의 가속도를 비교하는데 사용할 수 있다. 다음 예는 MRS를 이용하여 서로 다른 형태로 제시된 진동시험 규격의 가속도를 비교해보고, 또한 실제운용환경과 진동시험규격의 가속도를 비교해보자 한다.

3.1 진동규격 비교

3.1.1 정현진동과 임의진동 규격의 비교

동일장비가 다른 시스템에 장착되어 운용되는 경우가 있는데, 각 시스템의 진동규격이 서로 다른 형태로 규정되어지는 경우가 있다.

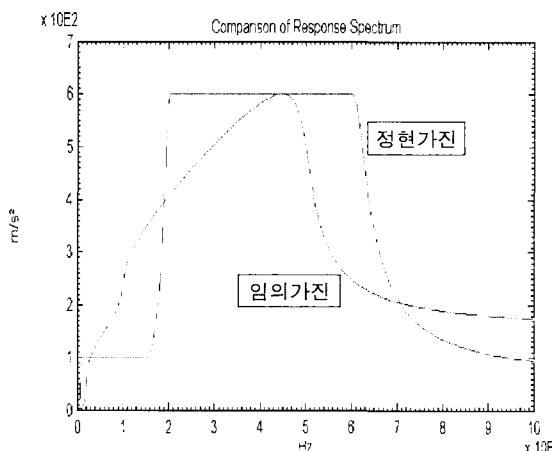
[표 1] 정현가진과 임의가진 규격

구 분	주파수(Hz)	PSD	가진시간
정현가진	10~200	10 m/sec ²	3h
	200~600	60 m/sec ²	
임의가진	20~100	1 (m/sec2) ²	1h
	100~500	2(m/sec2) ²	

이러한 경우 직접적인 규격의 비교는 매우 어려우나 MRS를 이용하면 규격의 상대적인 가혹도를 쉽게 비교할 수 있다. 다음의 예는 두 시스템의 진동 규격이 임의진동과 정현진동으로 주어진 경우에 대한 진동규격의 가혹도를 비교해본 경우이다.

3.1.2 정현진동과 임의진동 규격의 비교 결과

전절 표 1의 정현진동과 임의진동 규격의 가혹도를 비교하기 위하여 각각에 대한 MRS를 구하면 아래 그림과 같은 각각의 MRS를 구할 수 있다. 아래 그림에서 알 수 있듯이 3시간 동안 정현가진을 가하는 경우는 1시간동안 임의진동을 가진하는 경우보다 200Hz 이하에서는 상대적으로 가진되는 에너지가 적고, 200~600Hz영역에서는 전부파수 대역에서 상대적으로 많은 에너지가 전달된다. 그러나 700 Hz이상의 영역에서는 적은 에너지가 전달됨을 알 수 있다. 따라서 상기 예의 임의가진 입력 기준자료가 실제 운용환경에서 획득된 자료로부터 작성되었다면, 정현가진을 적용하는 경우보다 상대적으로 파이설계를 방지할 수 있는 효과적인 기준이라 할 수 있겠다.



[그림 7] 정현가진과 임의가진에 대한 MRS

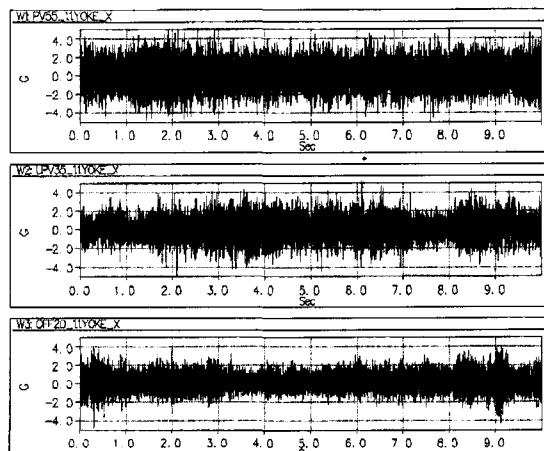
3.2 진동규격과 실제 환경의 비교

일반적으로 시스템이 운용중에 받는 진동 하중을 측정하여 이를 바탕으로 시험 시간을 고려하여 진동 수준을 높여 주어 진동 시험 시간 4~5시간 정도로 시스템이 전체 운용순기동안 겪게 될 파괴(Damage)를 가하여 시스템의 내구성을 입증한다. 이번에는 실제로 한국형 단거리 지대공유도탄의 개발시 적용한 진동규격^{13, 14)}과 실제 운용환경에 대하여 계측한 진동 자료로부터 구한 PSD의 가혹도를 비교하였다.

3.3 계측결과 및 Maximum Response Spectrum

3.3.1 도로별 궤도차량 진동 계측 결과

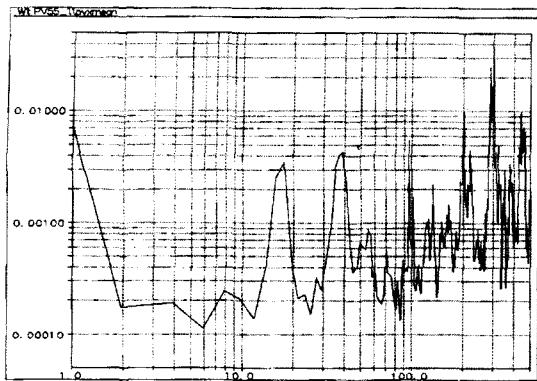
아래 그림 8은 한국형 단거리 지대공 유도무기체계가 포장도로, 비포장도로 및 야지 주행시 유도탄에 가해지는 진동자료를 계측한 결과^{13,14)}이다.



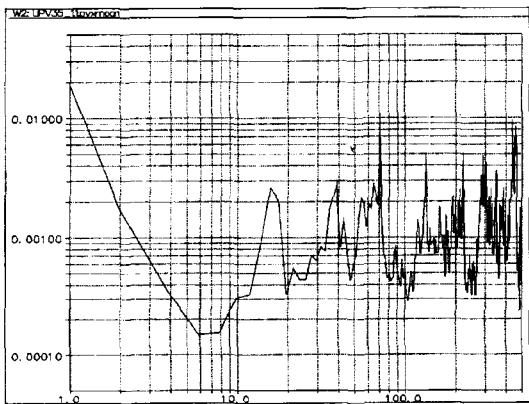
[그림 8] 궤도차량의 도로별 X 방향 진동

3.3.2 도로별 유도탄의 PSD

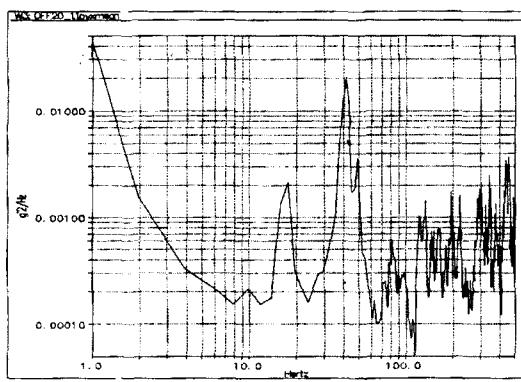
다음 그림 9는 전절의 진동자료로부터 구한 한국형 단거리지대공유도무기체계의 유도탄에대한 각 도로별 X방향 Power Spectral Density이다.



[그림 9-1] 케도차량의 X 방향 PSD(포장도로)



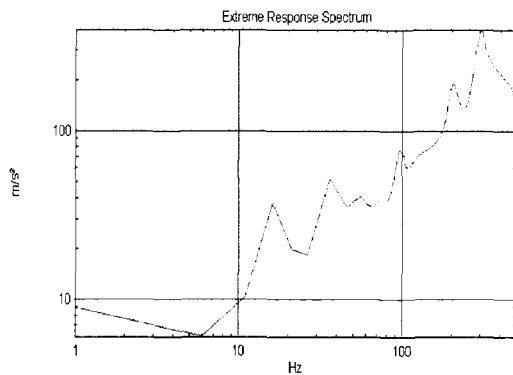
[그림 9-2] 케도차량의 X 방향 PSD(비포장도로)



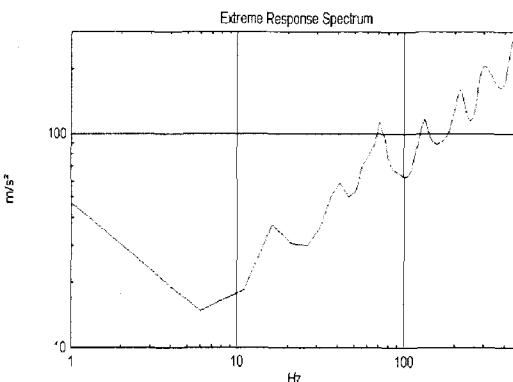
[그림 9-3] 케도차량의 X 방향 PSD(야지)

3.3.3 도로별 케도차량의 MRS

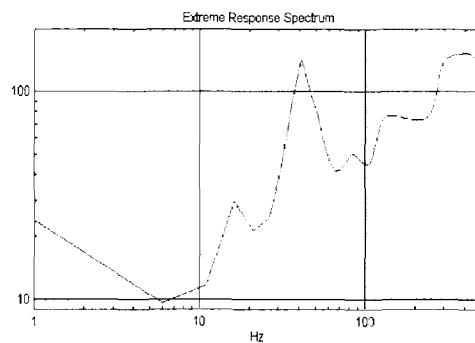
다음 그림은 전절의 PSD로부터 전장의 (16)식에 의하여 구한 각 도로별 X방향의 Maximum Response Spectrum이다.



[그림 10-1] X방향 포장도로 주행 진동에 대한 MRS



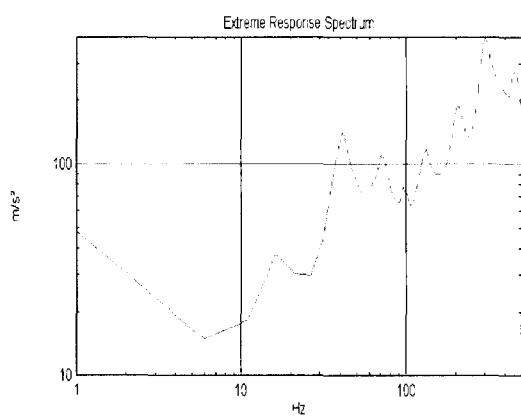
[그림 10-2] X방향 비포장도로 주행 진동에 대한 MRS



[그림 10-3] X방향 야지 주행 진동에 대한 MRS

3.3.4 Extreme Stress Level Curve Envelope

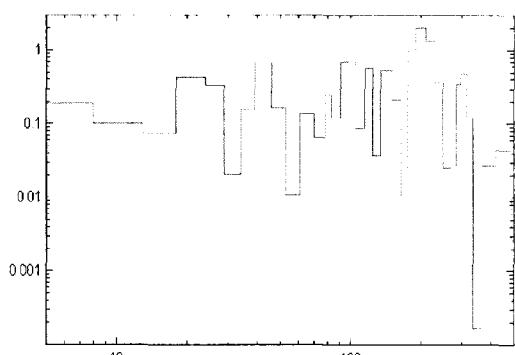
3.3절에서 구한 각각의 Extreme Stress Level Curve들로부터 Envelope를 구한다. 이 절차는 시스템이 겪을 각각의 진동 주파수 대역에서의 Maximum Stress(Max. Disp.) 값을 알아내는 것이다. 그림 11은 X방향의 각 도로별 MRS로부터 구한 Extreme Stress Level Curve의 Envelope이다.



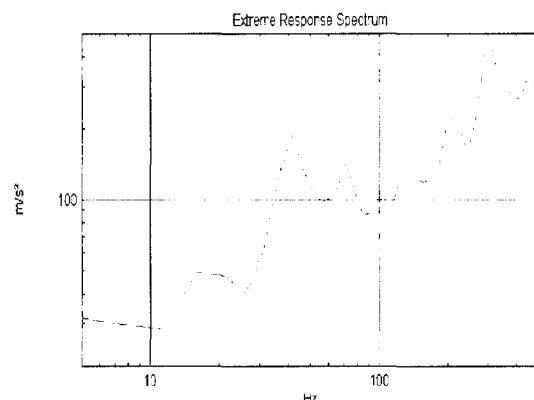
[그림 11] X방향의 Extreme Stress Level Curve의 Envelope

3.3.5 Provisional V.Q.L.

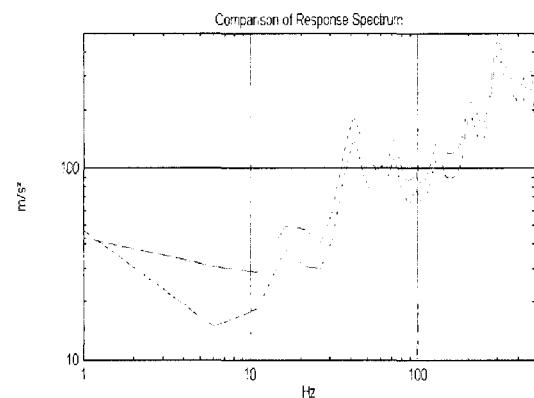
아래 그림 12는 한국형 단거리 지대공 유도무기체의 유도탄 진동시험 예비 규격^{13,14)}이며, 그림 13은 이로부터 구한 MRS이다.



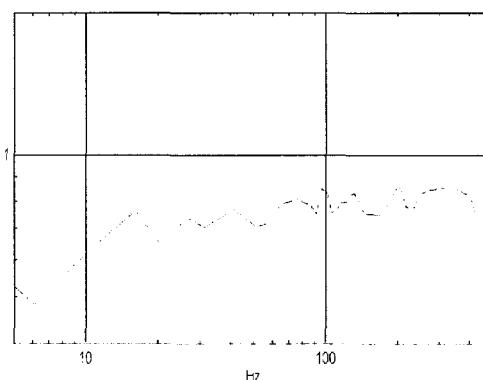
[그림 12] X방향의 Provisional VQL(4h)



[그림 13] X방향의 Provisional VQL의 Extreme Stress Level



[그림 14] X방향 Extreme Stress Level과 Provisional의 VQL의 Envelope Curve(4h)



[그림 15] X방향 Extreme Stress Level과 Provisional의 VQL의 Envelope Curve(4h)의 비교

위 그림 14, 15에서 4시간동안 가진하도록 작성한 진동시험 규격이 실제운용환경에서 구한 MRS와 유사함을 알 수 있다. 따라서 한국형 단거리 지대공 유도무기체계의 유도탄 진동시험 규격^{13,14)}은 진동시험 시간과 수준이 적절하다고 할 수 있겠다.

3.4 결과 및 분석

천마 유도탄이 실제 운용환경중 겪는 진동 하중을 바탕으로 하여 기계적 응답 스펙트럼에 의한 여러 가지 진동에 대하여 해석해 보았다.

또한, MRS를 이용하여 실제환경과 진동시험 규격, 시스템의 진동 규격이 임의진동과 정현진동으로 주어진 경우에 대한 진동규격의 가혹도를 비교해보았다.

실제로 본 논문과 같은 방법으로 동특성 자료를 바탕으로 MRS와 FDS을 이용하여 진동시험 규격^{13,14)}을 작성하여 한국형 단거리 지대공 유도무기 개발시 적용하여 내구도 시험^{15,16)}과 진동시험¹⁷⁾을 통하여 결과의 타당성을 검증한 바 있다.

4. 결 론

천마 유도탄이 실제 운용환경중 겪는 진동 하중을 바탕으로 하여 기계적 응답 스펙트럼에 의한 여러 가지 진동에 대하여 해석해 보았다.

또한, MRS를 이용하여 실제환경과 진동시험 규격, 시스템의 진동 규격이 임의진동과 정현진동으로 주어진 경우에 대한 진동규격의 가혹도를 비교해보았다.

실제로 본논문과 같은 방법으로 동특성 자료를 바탕으로 MRS와 FDS을 이용하여 진동시험 규격을 작성^{10, 11, 12)}하여 한국형 단거리 지대공 유도무기 개발시 적용하여 진동시험¹⁷⁾과 내구도 시험^{15, 16)}을 통하여

결과의 타당성을 검증한 바 있다.

참 고 문 헌

1. C. Lalanne, "Maximax Response and Fatigue Damage Spectra - Part I", The journal of environmental sciences, July /August, pp.35~40, 1984
2. C. Lalanne, "Maximax Response and Fatigue Damage Spectra - Part II", The journal of environmental sciences, September/October, pp.40~44, 1984,
3. D.E. Newland, "An Introduction to Random vibrations and spectral analysis", Longman
4. Paul H. Wirsching, Thomas L. Paez and Keith Ortiz, "Random Vibrations Theory and Practice", Wiley- Interscience Publication, 1995
5. "Development of Laboratory vibration test schedules", International Test Operations Procedure (ITOP) 1-1-050
6. "Environmental Test Methods and Engineering Guidelines(MIL-STD-810D)", David L. Earls
7. Jack Robinson, "The Changing Vibration for Military Ground Vehicles", Shock and Vibration Bulletines, June, pp.113~124, 1984
8. Pulgrano. L. J. and Ablowitz M. "The Response of Mechanical Systems to Bands of Random Excitation", The shock and Vibration Bulletin, No.39, Part 3, pp.73~86, 1968

9. Stephen H. Crandall and William D. Mark, "Random Vibration in Mechanical System", ACADEMIC PRESS, 1973
10. 김재하 외 3명, MSDC-416-940055, "천마 유도탄 진동 규격 작성 및 결과", 국방과학연구소, 1994. 1
11. 최병민 외 5명, MSDC-516-950240, "천마체계 진동시험 규격 작성", 국방과학연구소, 1995. 3
12. 김재하 외 2명, MSDC-416-950846, "한국형 단거리 유도탄 진동시험 규격에 관한 연구", 국방과학연구소, 1995. 11
13. 김재하 외 2명, 한국군사과학기술학회지 제3권 제1호, "Fatigue Damage Spectrum을 이용한 궤도차량의 진동환경 비교", 2000년 7월
14. 김재하 외 4명, MSDC-516-980966, "천마체계 동특성 시험결과 분석보고서", 국방과학연구소, 1998. 2
15. 김재하 외 3명, MSDC-516-961228, "천마유도탄 내구도시험결과 보고서(I)", 국방과학연구소, 1996. 12
16. 김재하 외 3명, MSDC-516-961229, "천마유도탄 내구도시험 결과 보고서(II)", 국방과학연구소, 1996. 12
17. 김재하 외 6명, MSDC-316-980669, "천마장입유도탄 환경시험 보고서(3-1차)(고온/저온/습도/진동 시험)", 국방과학연구소, 1998. 4