Historia Mathematica Vol. 14, No. 2, 2001, 77-92

디랙과 수학적 아름다움

고려대학교 **이상하**

Abstract

P. Dirac's contribution to the advent of the modern quantum mechanics is undeniable. His main research guideline is the principle of mathematical beauty. What is this principle on the earth? Are there distinctive features between pure mathematician's mind and theoretical physicist' mind about the mathematical beauty? These problems will be analyzed with respect to Dirac's case which can reflect a historical interrelationship between science and philosophy.

0. 서론

슈뢰딩거(E. Schrödinger)와 함께 1933년 노벨 물리학상을 수상한 디랙(P. Dirac, 1902-1984)은 20세기 양자역학의 토대를 닦은 천재 중 한 명이다. 그의 공헌을 들자면, 첫째 수학식으로 다른 형태를 띤 하이젠베르크(W. Heisenberg)의 행렬방정식(matrix equation)과 슈뢰딩거의 파동방정식(wave equation)이 등가임을 보였고, 둘째 반물질(anti-material)의 가정하에 양자역학과 상대성이론 사이의 모순 관계를 어느 정도 해결했으며, 그 과정에서 양자전기학(quantum-electrodynamics)의 기초를 확립했다. 여기서 우리는 하나의 딜레마를 살펴볼 것이다. 그 딜레마란 디랙 자신이 표면적으로 어떠한 철학 토론에 뛰어들기를 거부한 반면, 그의 이론 자체가 아주 형이상학적인 측면을 강하게 띠고있다는 점이다. 이 딜레마를 풀기 위해 우선 어떻게 디랙이 반물질, 특히 양전자를 가정하게 되었는지를 좀 더 구체적으로 살펴볼 필요가 있다. 둘째 그의 연구과정에서 단순히 수학 자체의 아름다움이 아니라 자연에 각인된 수학적 미라는 개념이 지침서 역할을 했음을 살펴볼 것이다. 셋째 그럼에도 불구하고 철학 전반에 걸친 그의 회의주의적 태도의 원인과 배경을 분석함에 의해, 한 개인으로서 과학자에게 직접 의식되지 않는 과학과 철학의 상호작용을 강조할 것이다.

논의에 앞서 디랙 자신이 별로 철학에 관심도 없었으며 또한 특별한 철학훈련을 받지 않았다는 사실을 언급할 필요가 있다. 그가 18살의 나이로 브리스톨에서 참가한 유일한 철학

강의란 브로드(C.D. Broad)의 상대성이론에 관한 철학적 고찰이었다. 이 강의 덕에 디랙은 상대성이론에 매료되었고, 에딩턴(A.C. Eddington)의 **공간, 시간 그리고 중력**(Space, Time and Gravitation)을 읽게 되었다.[1] 그 이후 그가 읽은 철학 책은 칸트와 달리 수학적 지식이 후천적인 경험에 근거하여 얻어질 수 있다는 밀(J.S. Mill)의 **논리체계**(A System of Logic)의 일부가 전부였다. 밀을 읽은 이후 디랙은 철학이 물리학의 진보에 어떠한 공헌도 할 수 없다고 결론지었다.[2]

> "나는 철학이 결코 어떠한 중요한 발견도 유도할 수 없다고 느낀다. 철학이란 단지 이미 만들어진 발견에 대해 말하는 하나의 방식일 뿐이다."

디랙의 업적이 수학적 미와 같은 몇 가지 형이상학적 개념에 의해 이끌렸음을 보게될 때 이러한 인용이 우리를 헷갈리게 하는 것이다. 이에 대해 **디랙, 과학적 전기**(Dirac, A Scientific Biography)의 저자인 크라그(H. Kragh)는 주장하기를, 디랙의 과학으로부터 철학을 완전히 제거할 수 있음을 뜻하는 것이 아니라, 그의 과학이 철학에 관한 그 자신의 어떠한 언급에 의해 분석될 수 없다는 것이다.[3]

그러나 크라그의 대답은 만족스럽지 못하다. 좀 더 명확한 대답을 찾기 위해선 위의 인용에서 뜻하는 철학이 무엇인가를 따져 보아야한다. 우선 디랙이 관측과 실험을 중요시하지 않았다는 사실로부터, 수학적 지식을 후천적인 경험으로부터 이끌어내려고 했던 밀의 시도를 그가 본능적으로 거부했을 가능성이 있다. 만약 밀의 시도가 온당한 것으로 여겨진다면, 자연 자체에 아름다운 수학적 구조가 각인되어있고 그 구조를 실험에 호소하지 않고 발견할 수 있다는 디랙의 관점이 유지될 수 없기 때문이다.

또 다른 대답이 있는데, 이를 살펴보기 위해 넓은 의미의 철학과 좁은 의미의 철학으로 나눌 필요가 있다. 전자는 특정 전통 속에서 암묵적으로 전문가 집단에 의해 인정되는 사상으로서, 서구과학과 관련해 자연은 수학적으로 표현될 수 있다와 같은 것을 들 수 있다. 후자는 특정 철학자의 이론체계를 뜻한다. 인용문의 철학이 좁은 의미의 철학을 뜻한다면, 디랙이 철학 자체에 대해 호감을 가질 수 없음이 어느 정도 분명해진다. 18세기부터 특정 철학자의 이론체계가 직접적으로 현장 물리학자를 자극한 경우가 드물기 때문이다. 실례로 헤겔은 **법철학**(Philosophie des Rechtes) 서문에서 철학을 황혼이 되어야 나는 미네르바(Minerva)의 올빼미에 비유하는데, 이는 철학이란 과학이 성숙한 후에 그것에 대해 고찰하는 학문이지 결코 과학 발견에 공헌하는 것이 아님을 뜻한다. 디랙은 헤겔과 유사하게 생각한 것이다.

그러나 좁은 의미의 철학에 대한 무관심이 맞바로 넓은 의미의 철학이 부정되어야함을 함

1) Helge Kragh, *Dirac, A Scientific Biography*, Cambridge University 1990, p. 6.
2) *Dirac Interview*, 1963. *Dirac, A Scientific Biography*, p. 260.
3) *Dirac, A Scientific Biography*, p. 261.

축하지 않는다. 특정 구체적 철학이론에 대한 디랙의 배타적인 태도가 서구과학 전통에서 확립된 보존량, 단순성, 수학적 아름다움과 같은 넓은 의미의 철학적 개념에 대한 부정적 태도로 이어질 필요가 없다. 그렇지만 이 점은 왜 그가 그 당시 어떠한 철학 토론에 뛰어들기를 거부했는가에 대한 충분한 이유를 제공할 수 없다. 그러한 이유를 알아보기 위해 도입부에 명시한데로 우선 디랙의 양전자 가설을 알아보자.

1. 디랙의 바다

양전자 가설과 관련된 디랙의 바다(Dirac's Sea)가 무엇을 의미하는지 간략히 알기 위해 디랙이 양자역학과 상대성이론을 통합하려고 노력했던 1926년 시점으로 거슬러 올라가자. 그 당시 가우스트와 울렌벡에 의해 전자스핀이 규명되었다. 전자스핀을 만들어낼 수 있는 자기장이 너무나 커서 전자의 각운동이 광속보다 빨라야 한다는 문제로 모두 고민하던 시기였다. 그 때 자기장과 같은 것에 의해 방해받지 않는 자유입자에 대한 슈뢰딩거 파동방정식은 다음과 같다.

$$i\hbar(\partial\Psi/\partial t) = -(\hbar^2/2m)\Delta\Psi$$

($\hbar$는 프랑크 상수를 2π로 나눈 양자량이고, Δ은 ∇^2을 뜻하며, m은 입자의 질량임)

위 방정식은 분명히 고전역학의 운동에너지 E와 운동량 p 사이의 관계를 나타내는 방정식 $E=p^2/2m$과 유사하다. 다시 말해 E는 $i\hbar(\partial/\partial t)$로, p는 $(\hbar/i)\nabla$로 변환시키면, 슈뢰딩거 파동방정식으로부터 고전역학의 방정식을 얻을 수 있다. 바로 이러한 보어의 대응원리에 착안해, 클라인과 고든은 다음과 같은 슈뢰딩거 방정식에 대한 상대성이론의 결과를 끄집어 내었다.[4]

$$-\hbar^2(\partial^2\Psi/\partial t^2) = -\hbar^2c^2\Delta\Psi + m^2c^4\Psi$$

(c는 빛의 속도)

그러나 클라인 고든 방정식이 전혀 전자스핀 문제에 대해 해결책을 제공하지 못했다. 보어의 대응원리를 고수한 채 하이젠베르크 및 조단(P. Jordan) 등이 다른 방법으로 그 문제를 해결하려고 했으나, 결과는 만족스러운 것이 아니었다. 디랙은 슈뢰딩거 파동방정식이 1차 편미분 형식을 띠고 있는 반면에, 클라인 고든 방정식은 2차 도함수라는 사실에 주목했다. 더욱이 아인슈타인의 시공간이 서로 독립적이지 않다는 논제에 의해 파동방정식이 시간 및 공간 좌표계 모두에 걸쳐 1차 도함수 형태를 띠는 반면에, 슈뢰딩거 파동방정식은 그렇

4) A. Messiah, *Quantenmechanik, Band1*, Berlin: Walter de Gruyter 1976, pp. 67-67.

지 못하다. 슈뢰딩거 방정식이 기본적으로 고전역학으로부터 도출되었고, 고전역학에서 파동방정식은 시간과 공간에 대해 등차의 형식을 갖지 못하기 때문이다. 디랙은 그가 한 때 매료되었던 상대성이론에 맞게 양자역학을 수정하기 위해 클라인 고든 방정식을 1차 편미분 선형방정식으로 고치려고 했다. 그 결과 1927년에 얻어진 다음 1차 도함수 파동방정식에 의해 전자스핀의 문제가 완전히 풀리게 된다.[5]

$$i\hbar(\partial\Psi/\partial t)=(\alpha_1 p_1 c+\alpha_2 p_2 c+\alpha_3 p_3 c+\alpha_4 m_0 c^2)\Psi$$

(α_i는 클라인 고든 방정식을 1차 도함수로 바꾸기 위해 도입된 적절한 행렬계수들이고, m_0은 정지질량을 의미한다.)

여기서 디랙의 방정식이 유도되는 과정을 자세히 알 필요는 없다. 중요한 것은 그 방정식이 전혀 관측 및 실험사실에 호소하지 않고 얻어졌다는 점과 그것이 함축하는 결과이다. 위의 선형 1차 도함수형의 디랙 방정식이 완전해(complete solutions)를 갖기 위해선 그것은 4개의 행렬계수에 의해 4개의 독립적인 파동방정식 Ψ_i(i=1, 2, 3, 4)로 분해될 수 있어야 한다. 그 중 두 개는 실제 1/2와 −1/2의 두 전자스핀을 설명하는 것으로서 양의 에너지 $E=c\sqrt{(m_0^2c^2+p^2)}$와 관련된다. 반면에 다른 두 개는 음의 에너지 $E=-c\sqrt{(m_0^2c^2+p^2)}$에 관련된다. 이는 디랙이 전통적으로 물리적 의미가 없다고 여겨진 음에너지를 도입해야 한다는 부담을 안게되었음을 뜻하는 것이다.

사실 상대성이론이 완전히 대칭적이려면, 자유운동 중인 입자에 대한 그것의 에너지 $E^2=m_0^2c^4+p^2c^2$는 양과 음의 해를 가져야한다. 디랙 방정식에 의해 음의 해 곧 음에너지가 의미있는 것으로 취급될 때 보어에 의해 양자화된 수소원자의 구조가 붕괴한다는 문제가 발생한다. 가장 낮은 전자궤도 또한 양의 준위를 띠고 있으므로, 음에너지 가정은 그것보다 더 낮은 음의 준위를 띤 전자궤도를 허용하기 때문이다. 이러한 난제를 해결하기 위해 탄생한 것이 디랙의 바다인 것이다.

음에너지의 전자로 꽉 채워진 디랙의 바다란 관측을 통해 측정할 수 없는 영역이다. 실제 측정 가능한 물리량, 특히 양의 질량을 가진 것은 디랙의 바다 속에 임의의 공백 혹은 구멍(holes)에 해당한다. 따라서 수소원자의 가장 낮은 궤도의 전자가 에너지를 방출하면서 디랙의 바다로 떨어지는 경우 순간적으로 그 에너지의 양만큼의 구멍이 생긴다는 것이다. 그 구멍이 실제 관측가능한 양에너지 세계의 물질 같이 나타나는 것이고, 그래서 방출된 에너지 손실을 막는다는 것이다. 원래 디랙은 그러한 구멍의 후보로서 양성자(proton)를 가정하였다.[6]

5) P. Dirac, "The Quantum Theory of Electron," *Proceedings of the Royal Society of London*, 1928, pp. 610-24.
6) P. Dirac, "A Theory of Electrons and Protons," *Proceedings of the Royal Society of London*, 1930, pp. 360-65.

그러나 양성자는 전자에 비해 훨씬 큰 질량을 갖고 있다. 그렇다면 아인슈타인의 에너지와 질량의 등가원리에 의해 에너지보존 법칙 자체가 위협받는다. 더욱이 힐베르트의 제자인 바일(H. Weyl)이 군론(theory of groups)에 근거해 양자역학을 수학적으로 형식화하는 과정에서 디랙의 바다 속의 구멍은 전자와 같은 질량을 가져야한다고 제안했다. 1931년 디랙은 양성자 가설을 완전히 포기하게된다. 디랙의 바다 속의 구멍 자체가 전자, 곧 양의 질량을 갖고 음전하를 띠는 것이다. 따라서 원래 그 바다를 구성하는 음에너지의 전자들은 역으로 양전하를 띠고 음의 질량을 갖는 소위 양전자들이 된다. 이렇게 양전자 가설이 태어났다.

성층권의 우주선(cosmic ray)을 연구하던 미국의 앤더슨(C.D. Anderson)의 연구 결과에 의해 양전자가 공인 받는 분위기가 조성되었다.[7] 그렇지만 양전자의 존재가 인정되었다고 해서 디랙의 음에너지 혹은 반물질 가설이 인정된 것은 아니며, 지금 반입자(anti-particles)를 인정하는 거의 다수의 물리학자들 또한 음에너지 존재를 인정하지 않는다. 다수의 물리학자는 여전히 반입자를 구성하는 물질이 보통 물질이며, 단지 반입자는 대응되는 입자의 반대 전하만을 띨 뿐이라고 여긴다. 디랙에 의해 원초적으로 관측 불가능한 것으로 가정된 반물질이 있다면, 그것은 중력장에서 아래가 아니라 위로 날라 가야한다. 불행히도 반물질이 물질과 접촉하는 순간 둘 다 소멸하므로, 반물질 혹은 음에너지의 존재는 영원히 실험적으로 검증되지 않을 것이다.

디랙의 바다와 관련된 또 하나의 심각한 문제란 상대성이론에 의해 사장된 에터와 유사한 개념의 재등장이다. 실제 관측 가능한 물리량이 디랙의 바다 속에 생기는 구멍과 같은 것이라면, 그러한 구멍 사이는 수학적으로 점전하로 취급되는 양전자로 채워져 있기 때문이다. 1938년 이후부터 디랙은 상대성이론에 모순되지 않도록 에터를 다시 도입하는 데 주력한다.[8] 그러면서 점점 수학적 미를 강조하며, 그것이 자신의 연구에 지침서 역할을 했음을 강조한다. 디랙이 생각하는 수학적 미란 무엇인가? 수학적 미란 과학자와 수학자들 사이에 전통적으로 사용된 개념이지만, 그것만큼 애매 모호한 개념도 없을 것이다.

디랙이 생각하는 수학적 미란 케플러 혹은 갈릴레이가 생각했던 것에 대응하는 것 같다. 즉 물질세계 속에 담긴 수학적 구조(mathematical structure)가 아름답다는 것이다. 디랙에 있어서 그 구조의 특징으로서 많이 여겨진 단순성은 오히려 거부되었고, 그 대신 대칭성과 통일성이 강조된 것 같다. 그러한 특징을 갖는 자연의 구조로서 수학적 미가 보존량이라는 개념과 함께 디랙의 사유발달에 전제되어 있다면, 그가 말하는 수학적 미라는 철학적 지침서는 단순히 도구적 의미의 수학적 방법론과 구별되어야한다. 수학적 방법론이란 디랙에 있어서 오히려 실용적(pragmatic)인 의미를 띤다는 것을 보게될 것이다.

7) C.D. Anderson, "The Positive Electron," *Physical Review 43*, 1933, pp. 491-94.
8) *Dirac, A Scientific Biography*, Ch. 9: *Electrons and Ether*.

2. 대칭성, 보편법칙과 수학적 미

대칭성에 관한 직관적 의미는 1952년 바일의 **대칭성**(Symmetry)의 첫째 강의 도입부에 잘 나타나있다.[9)]

"내가 알기로는 대칭성이라는 말은 일상생활에서 두 가지 의미로 사용되고 있다. 첫째 그것은 조화로운 비례, 잘 균형이 맞는 것 그리고 전체를 구성할 수 있게끔 잘 짜여진 부분들의 일치성(concordance)을 의미한다. 대칭성과 미는 서로 분리될 수 없다. … 균형이라는 상징은 근대적 의미의 대칭성 개념, 곧 대칭성의 둘째 의미와 직접 연관된다. 동물의 몸, 특히 인간 몸에서 두드러지게 나타나는 양면의 혹은 좌우 대칭이 그것이다. 이제 좌우 대칭은 엄격히 기하학적 의미를 가지며, 그러한 대칭성은 첫째 의미처럼 모호하지 않고 정확한 개념이 된다."

바일이 언급한 대칭성의 첫째 의미를 조화로 해석한다면, 중세 때 이미 그것들은 미의 중요 구성요소로 간주되었다. 실례로 아퀴나스의 진술 "*ad pulchritudinem tria requiruntur: integritas, consonantia, claritas*"은 **율리시스**의 저자 제임스 조이스(James Joyce)에 의해 "미를 위해 세 가지가 요구되는데, 통일성, 조화 그리고 찬란함이 그것이다."로 번역된 사실을 들 수 있다.[10)] 서구문화에서 대칭성은 일찍부터 조화와 관련해 미의 중요 성질로 자리잡은 것이다.

바일은 그 다음 근대적 의미의 기하학적 대칭성 개념을 언급하고 있는데, 이는 조화라는 개념이 근대, 특히 과학혁명기의 16-17세기 이후 수학적으로 다루어질 수 있게끔 되었음을 뜻한다. 대칭성의 가장 원초적인 수학적 특히 기하학적 의미는 회전(rotation)중의 형태보존이며, 가장 추상적인 대칭성의 표현은 바일에 의해 그 기초가 마련된 군론(group theory)에 의한 양자역학의 형식주의(quantum formalism)이다.[11)] 디랙이 생각하는 수학적 미가 무엇인지 파악하기 위해, 대칭성에 대해 중요한 두 문제가 다루어져야 한다. 첫째 대칭성이 어떠한 식으로 디랙의 이론 전개과정에 영향을 미쳤는가? 둘째 대칭성이 물리법칙과 관련하여 어떠한 의미를 지니는가?

물리학에 있어서 회전중의 기하학적인 좌우 대칭성은 좌표계(coordinates)의 변환(transformation) 속에서 보존의 의미로 정착된다. 실례로 갈릴레이 변환과 로렌츠 변환에 의한 운동량 보존 등을 들 수 있다.[12)] 이러한 변환에 의해 단순한 기하학적 형태가 아니라

9) H. Weyl, *Symmetry*, Princeton University, 1952.
10) James Joyce, *Portrait of the Artist as a Young Man*, Ch. 5.
11) H. Weyl, "Quantenemchanik und Gruppentheorie," *Zeitschrift für Physik 46*, 1927, pp. 1-46. 그러나 이미 푸앵카레는 갈릴레이 변환과 같은 것이 군론에 의해 표현 가능함을 간파하고 있었다.
12) H. Lorentz, *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*, Leiden 1895.

어떤 추상적인 구조가 보존됨을 보일 수 있다. 대표적인 그러한 구조가 해밀턴 방정식이다.

$dq_i/dt = \partial H/\partial p_i$, $dp_i/dt = -\partial H/\partial q_i$, $1 \leq i \leq 3$
(H는 관련된 물리계의 총 에너지를 나타내고, q_i는 관련된 공간 좌표계의 한 좌표축을 나타낸다.)

해밀턴 방정식은 단순히 상상 가능한 어떤 기하학적 형태가 아니라 결정론(determinism)으로 대표되는 추상적인 구조를 표현한다.[13] 주어진 시간점에서 정확히 어떤 물체의 운동량과 위치 두 요소로 대표되는 초기조건이 정해지면, 임의의 과거 혹은 미래에 대해 그 물체의 운동량과 위치가 해밀턴 방정식에 따라 정해지게 된다. 물리적 대칭성을 나타내는 대표적인 해밀턴 방정식을 아름답게 본 디랙은 하이젠베르크의 행렬방정식을 그 방정식의 형태에 맞아 들어가게 변환했고, 부수적으로 행렬방정식과 슈뢰딩거의 파동방정식이 등가임이 얻어진 것이다.

그러나 해밀턴 방정식의 결정론적인 구조는 공간 좌표계와 시간 좌표계에 대해 등가는 아니다. 다시 말해 그 구조가 공간 좌표계 속에서 보존되는 방식과 시간 좌표계 속에서 보존되는 방식이 다르다. 실례로 속도의 변화율인 가속도는 위치와 관련해 시간의 이계 도함수($\partial^2 q_i/\partial t^2$) 형태로 표현되는 반면에, 힘은 위치에너지와 관련해 위치의 일계 도함수($\partial V/\partial q_i$) 형태로 나타난다. 그 이유는 고전역학에서 시간과 공간이 서로 독립된 것으로 취급되었기 때문이다.

1926년 전후로 상대성이론에 매혹되어 있던 디랙은 바로 클라인 고든 방정식이 여전히 시공간에 대한 비대칭성을 함축하고 있음을 발견한 것이다. 그 방정식이 로렌츠 변환을 만족하게끔 1차 도함수로 수정함에 의해, 디랙은 전자스핀 문제를 해결할 수 있었다. 대칭성이 디랙에게 있어서 연구지침서 역할을 한 것은 분명하다. 이 점만을 가지고 그가 대칭성을 자연에 숨겨진 수학적 구조로서 미의 성질로 보았다고 아직 충분히 주장할 수 없다. 이를 위해선 물리법칙과 관련된 대칭성의 의미를 좀 더 고찰해보아야 한다.

좌표계 변환에 의해 어떤 수학적인 구조가 보존된다는 것의 물리적 의미는 무엇인가? 그것은 다름 아니라, 그러한 수학적 구조와 관련된 물리법칙이 보편적(universal)이라는 것이다. 사실 코페르니쿠스에 의해 중심 없는 우주관이 정착된 이후 우주 어느 곳에서나 등질적으로 적용될 수 있는 보편법칙만이 자연법칙으로 취급되게 된다. 그러한 보편법칙이 수학적 구조로 표현될 수 있다면, 그 구조는 우주 어느 곳에서나 동일해야한다. 다른 말로 그 구조는 좌표계 변환 속에서도 변하지 말아야한다. 대칭성이란 법칙이 보편적인가를 평가하는 수학적 기준이다.

13) 결정론에 대한 일반적인 정의에 대해선 다음을 참조하라. 최종덕, **부분의 합은 전체인가**, 소나무 1995, pp. 43-49.

신이 창조 때 사용한 설계도의 본질은 모든 변화 속에서도 불변하지 말아야한다는 16, 17세기 과학혁명기의 종교적인 세계관은 대칭성 개념의 기원이 된다. 그러한 본질이 수학적 형태로 표현되었을 때 그것의 대칭성을 좌표계 변환에 의해 보이는 것이 바로 그 본질의 보편성을 증명하는 것이기 때문이다. 이러한 맥락에서 좌표계 변환의 아버지라고 할 수 있는 갈릴레이가 신은 기하학자라고 외친 것이 쉽게 이해될 수 있다.

보편법칙과 관련된 대칭성이 아름답다는 점에 대해선 크게 두 가지 전통이 있다. 첫째 전지전능하고 아주 현명한 신이 이 세상에 각인시킨 설계도를 나타내기 때문이라는 것이다. 둘째 대칭성과 같은 것들이 바로 아름다움을 형성하는 내적 성질이라는 것이다. 어떠한 경우에도 대칭성은 미의 정의의 본질적인 요소가 된다. 이러한 경향의 미 개념은 18세기에 정착한 취미론과 반대된다. 취미론이 미 자체의 본질적인 정의문제를 포기하고 주관적인 취미 혹은 태도로서 미학을 접근하기 때문이다. 취미론의 득세에도 불구하고 객관적인 미의 개념 혹은 자연 속의 조화로서 미의 개념은 자연미학의 이름으로 수학과 자연과학의 전통 속에서 그 명맥을 이어갔다.

19세기 **자연의 미적 형태**(Kunstformen der Natur)를 집필한 발생학자인 에른스트 헤켈(Ernst Häckel)은 생명체에서 나타나는 기하학적 패턴들을 단순히 자연선택에 의한 우연의 결과가 아니라 특정 구조의 재생산과 관련지었다.[14] 그래야 서로 상이한 종류에서 발견되는 조직형태상의 유사성을 설명할 수 있다는 것이다. 현대 과학에서 당연히 부정될 것 같은 이러한 헤켈의 관점은 20세기 생물학자인 웬트워스(D'Arcy Wentworth) 및 제임스 타일러 본너(James Tyler Bonner) 등에게도 영향을 미쳤다. 그들은 생명체의 형태가 특정 기하학 및 수열의 법칙을 따르며, 특히 진화상 친척관계에 있는 종류의 형태들은 서로 변환 가능함을 보여주었다.

이론 물리학자가 일반적으로 인정하는 법칙, 실례로 에너지 보존법칙과 운동량 보존법칙이 대칭성과 관련된 좌표계 변환에 의해 보편법칙임이 확인될 때 그러한 법칙은 아름다운 것이다. 그 아름다움의 근거는 대칭성이 자연에 담긴 수학적 구조의 한 필수 요소이고, 그러한 구조는 아름다운 것이다. 이러한 디랙의 신념은 로렌츠 변환에 대한 그의 칭송에서 잘 드러난다.[15]

> "로렌츠 변환은 수학적 관점에서 볼 때 아름다운 것이다. 아인슈타인은 아름다운 것이란 근본적으로 물리학을 서술하는데 아주 가치가 있다는 사실을 우리에게 알려주었다. … 근본적인 물리학의 이론을 기술하는 수학적 방정식 속에서 아름다움을 찾을 수 있다는 우리

14) 헤켈의 자연미학적 관점에 대한 소개와 그것이 현대 생물학에 미친 영향에 대해선 다음을 참조하라. Ernst Florey, "Was kann das Leben?" in E. P. Fischer & K. Mainzer(Ed.), *Die Frage nach dem Leben*, München, Piper, 1990, pp. 185-232.

15) P. Dirac, "Why We Believe in the Einstein Theory" in B. Gruber and R. S. Millmann(Ed.), *Symmetries in Science*, Plenum, New York, 1980, p. 6.

의 확신은 그 누구보다도 아인슈타인에게 빚지고 있다."

사실 위의 디랙의 말과 달리 자연이 어떤 수학적 구조에 의해 건설되어 있다는 신념은 아주 오래된 것이다. 그 신념은 케플러의 **세상의 조화**(Harmonies of the World)에 이미 잘 드러나 있다.[16] 그러나 아인슈타인에게 있어서 수학적 미란 절대적인 연구 지침서는 아니었다. 그에게 실험 및 측정의 역할이 또한 중요한 요소로 간주된다면, 디랙에게 있어서는 그렇지 않다. 수학적 미를 거의 유일한 연구 지침서로 택할 때 그것을 담고 있는 수학적 구조의 발견이란 실험에 제한되지 않는다. 따라서 그 구조는 자연에서 추상화되어 순수한 수학적 사유의 대상이 될 수 있다.

자연의 수학적 구조가 순수하게 수학적인 방법론에 의거해 다루어질 수 있다고 할 때 물리학자가 수학 자체에 대해 취할 수 있는 입장은 무엇인가? 디랙의 경우 종종 수학을 단순한 도구와 같이 이용한다. 이 점은 그가 수학적 미를 추구한다는 사실과 모순되는 것처럼 여겨졌다.[17] 그러나 디랙의 관심은 자연의 수학적 구조이지 결코 수학적 방법론이 아니다. 만약 그 둘이 동일한 것이라면, 수학적 미 자체가 도구적(instrumental)인 의미를 가질 것이다. 그렇다면, 그 미를 자연에 숨겨진 객관적인 수학적 구조와 연관시키려는 어떠한 시도도 거부되어야 한다.[18] 이는 당연히 디랙이 원하는바가 아니다.

과학자가 어떤 것을 연구 지침서로 갖고있다고 할 때 그 지침서가 일방적으로 하나의 방법론을 뜻한다고 생각하는 것은 치명적 오류이다. 그렇게 생각하는 것은 마치 축구에 이러이러한 규칙이 있다고 해서 반드시 이러이러한 유일한 작전이 있어야한다는 멍청한 생각과 유사하다. 연구 지침서로서 수학적 미와 방법론으로서 수학에 대해 좀 더 자세히 논의하기 이전에 자연의 수학구조의 또 다른 미적 성질을 살펴볼 필요가 있다.

3. 통일성, 보존량, 복잡성

통일성(unity)이란 종종 종교적 혹은 정치적 의미에서 단결을 의미한다. 물론 어떠한 이념하에 단결을 의미한다. 이 점은 물리학에서도 예외가 아니다. 다양한 현상이 어떤 하나의 원리에 의해 통합될 수 있다는 생각이다. 이 생각은 모든 변화를 불변하는 것, 곧 아르케에 의

16) J. Kepler, *Harmonies of the World* in M.J. Adler(Ed.), *Great Books of the Western World 15, Ptolemy, Copernicus, Kepler*, Encyclopaedia Britannica, 1990.
17) 그러한 관점의 실례로서 다음을 참조하라. *Dirac, A Scientific Biography*, Ch. 14.
18) 수학적 미를 도구적 의미에서의 단순한 방법론으로 이해하고 그러한 방법론 자체를 과학자의 연구 지침서로 이해하는 경우 더 이상 자연에 담긴 수학적 구조에 대해서 묻지 말아야한다. 이러한 태도는 관측 가능한 것만 존재하고 나머지 모든 것의 존재 가능성에 대해선 의심하거나 허구로 취급하려는 철학자 진영에서 종종 발견된다. 대표적인 실례로서 반 프라센(B.C. van Fraassen)을 들 수 있다. *Laws and Symmetry*, Clarendon, Oxford, 1989.

해 설명할 수 있다는 고대 그리스 사유에 대응한다. 현대 물리학의 기원이 되는 근대 물리학에선 물질량이 모든 현상 속에서 보존되는 것으로 강하게 여겨졌다. 모든 물체가 동일한 물질에 의해 구성되고, 물체를 형성하는 기본 입자가 있다는 신념은 정말 오래된 것이다. 서양의 전통에 있어서, 단 하나의 기본 입자만을 가정하여 모든 현상을 통합하려는 물리학의 오래된 관점은 통일성이라는 직관을 대표한다.

통일성은 부분들이 하나의 방식에 의해 전체를 조화롭게 구성한다는 점에서 대칭성과 함께 수학적 미의 또 다른 중요한 성질이다. 디랙이 통일성을 중요시했다는 사실은 양전자 가설이 나오기 전에 그가 우선 양성자를 반물질 세계 속의 구멍으로 가정했다는 점에서 잘 드러난다.[19] 30년대만 하더라도 전자와 양성자가 우주를 이루는 기본 입자로 취급되었다. 두 종류의 상이한 기본 입자가 가정되었던 것이다. 양성자를 음에너지의 전자로 가득 찬 디랙의 바다 속의 구멍으로 간주함에 의해, 디랙은 양성자에서 기본 입자의 지위를 박탈할 수 있다고 여긴 것이다.[20]

> "철학자들은 단 한 종류의 기본 입자로부터 모든 것을 구성하려고 꿈꿔왔다. 그래서 지금 우리의 이론이 두 종류의 입자, 곧 전자와 양성자를 갖고있다는 점은 아주 불만족스러운 것이다."

그러나 디랙의 바다 편에서 보았듯이 전자와 양성자의 질량차이는 에너지 보존법칙을 위협한다. 결국 그는 양전자를 가정하게 되고, 양의 질량과 음의 질량 그리고 서로 반대되는 전하를 갖는 두 종류의 기본입자를 인정한 것이다. 그렇다면 그 자신이 통일성의 원리를 포기한 것인가? 디랙이 포기한 것은 단지 통일성이 단일성과 동일하다는 관점이다. 그는 결코 통일성의 원리에 함축된 보존량 개념까지 포기한 것이 아니다. 암묵적인 보존량 개념이 구체화된 현대 에너지 보존법칙은 보편법칙으로서 대칭성 이외에 통일성의 원리를 동시에 함축하는 것으로서, 이론 물리학자가 이 법칙을 의심하는 경향은 없다고 해도 과언이 아니다. 우주가 단 하나의 기본입자로 구성되었다는 단일성의 원리의 포기가 통일성의 원리의 포기로 단순 해석되어서는 안 된다.[21] 음전자와 양성자의 쌍이 아니라 음전자와 양전자의 쌍을 가정하는 것 또한 대칭성을 만족하는 것으로 간주할 수 있다.

양전자를 구성하는 음의 질량과 에너지란 실험 불가능한 것이다. 그것은 어떠한 관측 사실에 의거해서도 측정될 수 없다. 관측과 실험을 통해 원초적으로 측정할 수 없는 입자를 가정하는 것은 보어와 하이젠베르크를 포함한 상당수 물리학자에게는 반역이다. 그렇지만

19) *Dirac, A Scientific Biography*, p. 267.
20) P. Dirac, "Proton," *Nature 126*, 1930, p. 605.
21) 정말로 값진 연구서인 **디랙, 과학적 전기**의 저자는 그렇게 단순 해석했다. 그에 의하면, 통일성의 원리란 디랙에게 있어선 단순히 도구적 혹은 방법론적 의미만을 갖는다(*Dirac, A Scientific Biography*, p. 269). 만약 그렇다면 통일성을 한 중요한 성질로 갖는 수학적 미를 실제 자연에 존재하는 수학적 구조와 연관시킬 수 없다는 문제를 일으킨다.

디랙과 같이 전적으로 수학적 미를 추구함에 의해 자연에 담긴 수학적 구조를 발견하려는 이론 물리학자는 관측 가능한 것들을 설명할 목적으로 특정 이론을 건설하지 않는다. 디랙의 바다 속의 구멍에 해당하는 것이 양성자가 아니라 바로 전자로 취급되어야한다는 주장은 오로지 대칭성과 수학적 무모순성(consistency)을 추구함에 의해 얻어진 것이었다.

수학적 필요성에 의해 가정된 존재가 경험적으로 검증 불가능하더라도, 그것이 없어야할 이유는 없다. 이 점은 자연에 각인된 수학적 구조가 궁극적으로 수학적 사유만에 의해 밝혀질 수 있다고 믿는 디랙에게 있어서는 정당한 것이다. 이와 더불어 발생하는 여러 문제가 있는데, 우선 그가 전통적으로 수학적 미의 또 다른 중요한 성질로 여겨진 단순성의 원리를 부정한 사실이다. 이 원리는 오캄의 면도날(Occam's razor)과 관련된다. "존재자의 수를 불필요하게 늘려서는 안 된다."(*Entia non sunt multiplicnda sine necessitate*) "불필요하게 다수가 설정되어서는 안 된다."(*Pluralitas non est ponenda sine necessitate*) "소수를 가정하여 설명할 수 있는 것을 다수를 가정하여 설명하는 것은 헛되다."(*Frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora*). 이 세 원리에 대한 현대적 해석은 크게 다음과 같다.[22]

수학적 단순성의 원리: 수학자들에게 있어서 오캄의 이 세 원리는 좀 더 적은 수의 공리를 사용하여 어떤 이론을 구성해야 한다는 지침으로 받아들여졌고, 그럴 때 그 이론은 그렇지 못한 것보다 더 아름답다고 여겨졌다.

이론 선택에 있어서 단순성의 원리: 이론 물리학자들은 동등한 예측 가능한 현상들을 함축하는 두 이론 중 좀 더 단순한 형태의 것이 선택되어야한다는 점을 정당화하는데 오캄의 면도날을 사용하곤 했다.

경제성의 원리: 가급적이면 적은 수의 존재자들을 가정해야한다는 경제성의 원리(principle of economy)로서 오캄의 면도날은 특히 마흐(E. Mach) 이후 관측 불가능한 대상을 가정하는 모든 이론을 거부하는 데 사용되곤 했다.[23]

이론 선택에 있어서 단순성의 원리를 디랙이 거부한 뚜렷한 증거는 없으나, 그가 수학적 단순성의 원리와 경제성의 원리를 거부한 것은 명백하다. 뉴턴역학이 일반 상대성이론에 비해 좀 더 단순한 형태를 갖는다고 해서 더 아름다운 것도, 올바른 것도 아니다. 경제성 원리에 의하면 영원히 검증 불가능한 양전자 따위는 첨부터 가정되지 말아야했다. 자연에 담겨진 수학적 구조가 너무 복잡해 인간의 경험에 의해 도저히 검증될 수 없는 존재가 있을 가능성은 디랙에게 있어서 전혀 문제가 되지 않는다. 그러한 존재가 대칭성과 통일성으로 대표되는 수학적 미를 추구하는 과정에서 요구된다면, 그것은 단순히 수학적 가정이 아니라 물리적 실재성을 갖는다. 디랙이 생각하는 자연이란 관측에 근거해 절대 측정될 수 없는 존

22) W. M. Throburn, "Occam's razor," *Mind*, 1915.
23) 그러나 오캄의 면도칼을 존재론적 의미에서 경제성의 원리로 해석하는 것은 치명적인 역사적 오류일 수 있다. 박우석, **중세철학의 유혹**, 철학과 현실사, 1997, 제8장 "오캄의 논리학과 존재론: 첫 인상," pp. 212-230.

재를 함축할 정도로 충만하고 복잡한 것이다.[24]

"종종 단순성과 아름다움의 동일성이 요구된다. 그러나 그 둘이 충돌할 때 아름다움이 단순성보다 우선해야 한다."

4. 수학적 미, 수학적 방법론, 딜레마의 해결

수학자는 보통 단순성과 무모순성을 수학적 미의 기준으로 생각한다. 디랙이 단순성을 수학적 미의 성질로 보지 않았다는 사실로부터 그의 수학적 미란 물리적 실재성을 함축하는 것이지 결코 수학 자체의 미 혹은 수학자가 생각하는 미가 아니다. 디랙에게 있어서 수학적 미가 연구의 지침서라는 뜻은 수학적 구조라는 실재를 발견하는 것 자체를 말한다. 그 과정에서 수학적 미의 중요한 성질인 대칭성과 통일성의 포섭을 위해선 수학적 방법론은 실험적이고 실용적 성격을 띨 수 있다. 이를 반영하는 대표적 실례는 디랙이 하이젠베르크의 행렬방정식과 슈뢰딩거의 파동방정식의 등가성을 보이기 위해 도입한 델타함수(δ-function)일 것이다.[25]

$$\delta(x-x_0)=0\ (x\neq x_0),\ \delta(x-x_0)=+\infty\ (x=x_0),\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)dx=1$$

이렇게 정의된 델타함수는 엄밀한 의미에서 미분 혹은 적분 가능한 함수가 아니며, 따라서 수학자에게는 아무런 의미 없는 함수에 지나지 않는다. 그것은 x_0에서 갑자기 무한대로 발산하기 때문이다. 하이젠베르크의 파동방정식과 슈뢰딩거의 파동방정식이 동일한 수학적 구조를 표현함을 보이는 것이 디랙의 목적이고, 델타함수는 그러한 목적달성을 위한 도구일 뿐이다. 수학적 구조의 실재성에 담긴 대칭성과 통일성으로 표현되는 미를 연구 지침서로 여기는 것은 결코 도구적 의미의 수학적 방법론을 의미하지 않는다.

디랙과 달리 바일과 같이 물리학에 관심을 둔 순수 수학자가 추구하는 미는 보통 자연에 각인된 수학적 구조의 실재성이 아니라, 수학 자체의 미, 곧 단순성과 무모순성이 필수적으로 요구되는 미와 관련된다. 이러한 수학 자체의 미란 자연의 어떠한 실재성과 무관하기 때문에, 단순히 논리적 무모순성과 같은 조건에 의해 제약받는 방법론 자체를 의미할 수 있다. 사실 상당수의 수학자가 디랙의 무의미한 델타함수를 못마땅히 여겼다. 폰 노이만(J. von Neumann) 등 일련의 수학자는 이미 1927년 디랙함수를 배제한 체 힐베르트 공간을 도입하여 양자역학을 형식화하려했고, 바일은 군론을 도입하여 그러한 시도를 했다.[26]

24) P. Dirac, "The Relation between Mathematics and Physics," *Proceedings of the Royal Society* 59, 1939, p. 124.
25) *Quantenmechanik Band1*, p. 421.

디랙에 있어서 수학적 미란 자연에 실재하는 구조와 관련된다. 그러한 구조가 오로지 수학적 고찰 자체의 대상이 될 수 있고, 수학적으로 표현될 때 그러한 표현은 단순히 도구적 맥락에서 해석되어서는 안 된다. 만약 그렇게 해석되는 경우, 어떤 수학적 표현에 담긴 추상적인 구조에 대응되는 실재성 따위란 언급될 필요가 없다. 만약 디랙에게 슈뢰딩거 파동방정식에 함축된 수학적 구조에 대응하는 실재성이 있냐고 묻는다면, 그는 그렇다고 말할 것이다. 그러한 구조가 관측과 실험을 통해 절대 검증될 수 없는 존재를 논리적으로 포함하더라도 말이다.

양자역학의 수식은 고전역학의 그것과 본질적으로 다르다. 고전역학의 수식들은 실재하는 물리량으로 여겨지는 질량, 위치 및 속도와 직접 관련된다. 양자역학에선 그 양상이 전혀 다르다. 양자역학에 등장하는 수식은 그야말로 추상적인 수학적 구조를 나타내며, 그렇기에 그 구조에 대응하는 실재성이 있는가가 지금까지 논쟁중이다.[27] 수학적 미의 성질인 대칭성과 같은 것을 단순히 방법론적으로 해석하는 경우, 양자역학의 수식 모두가 관측 가능한 물리량을 설명하기 위해 도입된 도구일 수 있다. 이 점은 결코 디랙에게 인정될 수 없는 것이다.

자연에 담겨진 수학적 구조와 수학적 방법론을 구별할 때 디랙의 딜레마는 쉽게 풀린다. 다시 말해 그의 철학이 아주 형이상학적 측면을 많이 띠고 있음에도 불구하고, 왜 그는 계속해서 철학에 무관심했는가? 우선 1920년부터 30년대 유럽의 철학 분위기를 알 필요가 있는데, 대륙의 비엔나와 베를린을 중심으로 한 논리실증주의 학파와 이에 동조하지 않았던 관념론 계통의 학파 사이의 대립이 있었다. 디랙은 그 어느 학파와도 직접적인 접촉을 갖지 않았다. 단지 그와 코펜하겐의 보어진영 및 관측과 실험을 중요시하는 하이젠베르크 등의 물리학자 진영 사이의 갈등이 있었음을 고려하면, 그러한 진영의 물리학자들과 종종 비교되는 논리실증주의 관점이란 그로서는 이해할 수 없는 철학이었다.

논리실증주의에서 과학철학을 대표하는 한스 라이헨바흐(Hans Reichenbach) 등의 철학자들은 수학을 단순히 관측에 의해 검증 가능한 물리량을 설명하기 위해 도입된 도구와 같이 여겼다. 그 이유 중 하나로서 그들이 과학의 자연법칙을 마치 관측사실들로부터 일반화된 보편진술처럼 여긴 귀납주의의 관점을 지지했다는 점을 들 수 있다. "모든 a는 *F*다."와 같은 형식을 갖는 과학의 자연법칙이란 "a_1은 *F*이고, a_2는 *F*이고, a_3도 *F*이고, ⋯."와 같이 단순사실들을 표현하는 진술들의 연접으로 번역 가능하며, 그렇기에 그러한 사실들의 관측에 의해 일반화 된 것이라는 점이다. 따라서 그러한 사실들의 존재 여부에 의해 관계된 자연법칙은 검증 가능하다고 귀납주의자들은 주장한다. 만약 자연법칙이 단순히 관측사실들에 근

26) D. Hilbert, L. Nordheim, and J. von Neumann, "Über die Grundlagen der Quantenmechanik," *Mathematische Annalen 98*, 1927, pp. 1-30. H. Weyl, "Quantenmechanik und Gruppentheorie," *Zeitschrift für Physik 46*, 1927, pp. 1-46.

27) 최근 논쟁중인 '구조적 실재주의'(structural realism)는 바로 그러한 실재성이 있다고 주장한다. J Ladyman, "What Is Structural Realism?" *Studies in History and Philosophy of Science 29* 1998, pp. 409-424.

거해 일반화된 것이 아니라 어떤 추상적인 수학적 구조를 내포한다고 할 때, 논리실증주의의 전통에선 그러한 구조란 단지 관측에 의해 측정 가능한 물리량을 설명하기 위해 도입된 도구 혹은 협약(convention)일 뿐이다. 이러한 도구주의든 원래 귀납주의든, 둘 다 디랙이 관심을 가질 수 없는 철학이다.

관측과 실험을 별로 중요시 여기지 않았던 디랙은 실재 1930년대 중반 이후 보어의 관점에 반대되는 '역 대응원리'(inverse-correspondence principle)를 중요한 방법론으로 택한다. 대응원리가 고전역학과 양자역학의 형식상 유사성을 강조하고 고전역학이 경험 가능한 거시세계의 물리학을 대표하기 때문에, 어쩔 수 없이 경험적으로 검증 불가능한 존재에 대해선 회의적 태도를 강요하기 때문이다. 대응원리가 고전역학을 근거해 양자역학 이론들의 타당성이 결정되어야함을 주장한다면, 포커(A.D. Fokker)에 의해 제안된 역 대응원리란 양자역학이 역으로 고전역학 이론들의 타당성을 결정한다는 것이다.[28] 디랙은 역 대응원리를 이미 확고히 굳혀진 로렌츠 변환 및 양자역학의 중요 방정식들을 수학적으로 무모순하게 그리고 단순하게 통합하는 방법론으로서 사용했다.[29] 그 과정에서 인정되었던 방정식의 수정도 가능하다. 역 대응원리를 방법론으로 사용했다고 해서 디랙이 양자역학을 완전한 물리도식으로 여기지 않았음을 아는 것은 중요하다. 반대로 디랙과 같이 수학적 미를 강조하는 **시간의 짧은 여행**의 저자인 호킹은 현재의 양자역학이 완벽한 물리도식임을 전제하고, 그 도식 안에서 일반 상대성이론을 수정하려고 한다. 여기서 수학적 미와 같은 어떤 연구 지침서를 전제한다고 해서, 이 점이 반드시 특정 유일한 방법론의 선택을 강요하지 않음을 아는 것이 중요하다.

만약 디랙이 논리실증주의 계통이 아닌 베르그송과 같은 형이상학자와 직접 접촉이 있었더라면, 그가 철학에 대해 강한 호기심을 나타냈을까? 어떤 사람이 10년 동안 산 속에서 도가철학을 수행한 후 하산해서 물리학도가 되었다고 가정하자. 그는 디랙의 반물질 개념을 알자마자 음기와 연관지었고, 디랙의 수학적 미가 태극도식으로 아래와 같이 표현될 수 있다고 생각했다.

그가 디랙에게 이 도식이 물질과 반물질의 대칭성을 함축하는 수학적 미라고 장황하게 설명할 때 과연 디랙의 반응은 어떨까? 아마 디랙은 별 관심을 보이지 않을 것이다. 디랙이

28) A. D. Fokker, "Eine invarianter Variationssatz für die Bewegung mehrerer elektrischer Massenteilchen," *Zeitschrift für Physik 58*, 1929, pp. 386-93.
29) P. Dirac, "Classical Theory of Radiating Electrons," *Proceedings of the Royal Society of London*, 1938, p. 149.

수학적 미와 같은 형이상학적인 개념을 연구 지침서로 삼았고 반물질을 가정했다고 해서, 그 자신이 수학적 미에 대한 철학적 고찰 및 반물질의 의미에 관심을 둔 것은 아니었다. 어떤 의미에서 수학적 미란 그에겐 일종의 종교적 신념과 같은 것이다. 이미 폴라니가 주장했듯이, 그러한 신념은 단순한 주관적 의견이 아니다. 그것은 최소한 케플러까지 거슬러 올라가는 서구 전통 속에서 확립된 것이다.[30]

디랙이 추구한 수학적 구조와 그것이 갖는 아름다움이란 특정 철학적 해석보다는 전통 속에서 확립된 신념으로 볼 때 디랙의 딜레마가 풀린다. 전통 속에 확립된 그러한 신념은 한 과학자 개인에게 직접 의식되지 않는 철학과 과학의 역사적 상호작용을 보여주는 대표적인 실례가 된다. 따라서 디랙이 수학적 미를 추구했다고 해서 그것의 철학적 의미에 관심을 가질 필요는 없으며, 이점으로부터 그의 이론이 철학적 혹은 형이상학적 측면을 띠지 말아야 할 이유도 없다.

참고 문헌

1. 마이클 폴라니/이은봉 옮김, **과학, 신념, 사회**, 범양사, 1990.
2. 박우석, **중세철학의 유혹**, 철학과 현실사, 1997.
3. 최종덕, **부분의 합은 전체인가**, 소나무, 1995.
4. Anderson, C. D., "The Positive Electron," *Physical Review 43*, 1933.
5. Dirac, P., "The Quantum Theory of Electron," *Proceedings of the Royal Society of London*, 1928.
6. Dirac, P., "A Theory of Electrons and Protons," *Proceedings of the Royal Society of London*, 1930.
7. Dirac, P., "Proton," *Nature 126*, 1930.
8. Dirac, P., "Classical Theory of Radiating Electrons," *Proceedings of the Royal Society of London*, 1938.
9. Dirac, P., "The Relation between Mathematics and Physics," *Proceedings of the Royal Society 59*, 1939.
10. Dirac, P., "Why We Believe in the Einstein Theory" in B. Gruber and R. S. Millmann(Ed.), *Symmetries in Science*, Plenum, New York, 1980.
11. Florey, Ernst, "Was kann das Leben?" in E. P. Fischer & K. Mainzer(Ed.), *Die Frage nach dem Leben*, Piper, München, 1990.
12. Fokker, A. D., "Eine invarianter Variationssatz für die Bewegung mehrerer elektrischer Massenteilchen," *Zeitschrift für Physik 58*, 1929.

30) 마이클 폴라니/이은봉 옮김, **과학, 신념, 사회**, 범양사, 1990.

13. Fraassen, B. C. van, *Laws and Symmetry*, Clarendon, Oxford, 1989.
14. Hilbert, D., L. Nordheim, and J. von Neumann, "Über die Grundlagen der Quantenmechanik," *Mathematische Annalen 98*, 1927.
15. Joyce, James. *Portrait of the Artist as a Young Man.*
16. Kragh, Helge, *Dirac, A Scientific Biography*, Cambridge University Press, 1990.
17. Kepler, J., *Harmonies of the World* in M. J. Adler(Ed.), *Great Books of the Western World 15, Ptolemy, Copernicus, Kepler*, Encyclopaedia Britannica, 1990.
18. Ladyman, J., "What Is Structural Realism?" *Studies in History and Philosophy of Science 29*, 1998.
19. Lorentz, H., *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*, Leiden 1895.
20. Messiah, A., *Quantenmechanik, Band1*, Walter de Gruyter, Berlin, 1976.
21. Throburn, W. M., "Occam's razor," *Mind*, 1915.
22. Weyl, H., "Quantenemchanik und Gruppentheorie," *Zeitschrift für Physik 46*, 1927.
23. Weyl, H., *Symmetry*, Princeton University, 1952.