

수학적 추상의 본질에 관한 소고

동신대학교 컴퓨터디지털영상학부 李建喆

Abstract

This paper aims to show an inner, basic harmony between metaphysics and current directions in mathematics and in the philosophy of mathematics. In this attempt, the general truths of metaphysics and the truths particularly relevant to the nature of mathematical abstraction serve as speculative guides in ordering the content and discussing the nature of the multiple questions lie between and disputed frontiers of metaphysics and mathematics.

0. 서론

수학자들은 그들이 정신의 실제적인 수학적 연산을 수행하면서, 수학적 추상(mathematical abstraction)이라는 과학의 단계까지 자신의 정신을 수학자로서 사용할 때만 존재한다. 또 다른 시대에 그들은 수학적 관념을 그들의 기억 속에, 어떤 수학적 융통성을 상상 속에 그리고 결과의 과학적인 기질을 정신 속에 간직하고 있다.

수학적 추상의 자유로움과 수학이 제시되는 명백한 엄밀함에 익숙한 철학적 사고를 하는 수학자는 일반적으로 완전 추상과학의 노력이나 형이상학적 교리들을 동정하지 않는다. 비슷하게, 과학의 추상적인 단계에서의 철학자들과 철학적 사고를 하는 과학자들은 빈번하게 순수수학의 정확함을 과장된 것이나 실제적 용도로는 지나치게 정의된 것으로 여긴다.

수학적 추상의 학설을 소홀히 여김으로써 생긴 잘못된고 이상한 이론적인 결론 중에는 수학의 기초에 관한 토론에서 나온 자가당착과 모순이 실례가 된다. 수학적 추상의 한계와 유일성의 한 예로써 수학과 상상의 관계를 보자. 한 수학자가 수학에서의 발명의 심리학을 검토하고 싶어하거나, 상상과 수학적 추상의 관계를 설명하고 싶어한다고 가정하자. 심리학에 맞는 의문인 상상의 존재와 본질은 수학적 실체의 본질과 존재가 형이상학에서 확정된 것과 같은 식으로 여겨진다. 따라서 그러한 조사는 심리학적 태도, 수학적 태도도 가지지 못한다.

왜냐하면 그것은 이 두 과학의 증명 범위의 밖에 있기 때문이다. 그리고 이것은 심리학적 과제와 수학의 관계를 정립시키기 때문에 형이상학적이다.

우리는 형이상학과 심리학 모두의 타당성을 인정하고 수학과 대조하여 이러한 두 과학에 타당한 추상개념의 관계를 이해하기 전에는 그 관계를 성공적으로 설명해낼 수 없다.

추상적 과학을 형이상학(metaphysics), 수학(mathematics) 그리고 물리학(physics)의 세 가지 그룹으로 구분하는 분석에서 형이상학의 우월함은 그것이 어느 과학이든 연구하는 존재의 본질을 연구하는 자격을 부여한다는 점이다. 따라서 수학적 추상의 본질에 관한 의문을 논리학자, 우주론자, 심리학자 그리고 수학자와 같은 추상적 사상가가 이러한 방식으로는 타당하게 제시한 것이 아니고 단지 추상적인 오류를 범하게 될 뿐이다.

수학의 본질에 관한 형이상학적 연구로 구성되는 기초적, 주변적 문제의 해결은 추상적 과학으로서의 수학의 지성적 성향에 대한 내역과 판단에 이르게 하는 것으로 보인다.

1. 추상적 과학으로서의 수학

수학적 추상의 본질에 대한 역사적 입장이 나타내는 부분적인 진리와 수학의 본질에 대한 완벽한 해설과 진실한 판단을 내려버리는 입장의 무모함은 수학이 추상적 과학과 인간 지식의 완전한 모형 안에서 전망될 때만 확정될 수 있다.

이 장의 목적은 수학적 견해를 결정하고 그것의 다른 추상적 과학에 대한 관계와 구분을 요약적으로 지적해 내는 것이다. 단순한 이해의 과정에서 한 수학적 형태가 처음으로 지적되었고, 정신은 단순히 감각자료로부터 수학적 본질을 추상해 낼뿐이다. 이러한 정신적인 상태는 놀랍게도 단순한 곡선이라는 기묘하고 복잡하게 보이는 선이 그려지는 정신적 상태와는 다른 것이고, 이 때 수학적 판단이 언급된다.

상상의 힘에 의해서 정신은 감각적 문제로부터 추상함으로써, 수학적 본질의 곡선을 고찰하고 판단할 수 있다고 할 수 있다. 그러므로 단순한 이해의 과정에서 수학자에게 고찰하도록 주어진 대상은 정신 외부적, 불완전한 존재에 대하여 지각가능한 사물의 확장의 종착점으로써 감각적 문제에 좌우되는 것으로 보인다. 그러나 이러한 대상들은 수리과학에서 인식되고, 상상되고, 정의되고, 고찰되는 것으로써의 감각 문제는 좌우하지 않는다. 그것은 지성적 문제와 관련하여 인식되고 정의되는 것이다.

그러므로 수학적 추상에서 철학자들이 전통적으로 제한된 물질로 지정한 형태는 지각적 분례로부터 추상된다. 이것은 비록 원이나 육각형이 존재한다면 그것은 물리적 형태의 불완전한 공간적 종착으로서 자연에만 존재한다는 것을 의미하기는 하지만 수학적 본질들이 현실에서 지각되기는 불가능하다고 주장하는 것과 같다. 수학적 추상의 형식적 대상으로서의, 그리고 수학적 증명의 궁극적 주요과제로서의 질량의 속성은 어느 정도의 설명을 요구한다.

왜냐하면 이러한 명칭은 더 이상 근대나 현대수학자들에게 유효하지 않다는 것이 자주 부정되기 때문이다.

이러한 영역에서, 이전의 연구와 수학적 추상의 즐거움과 통합을 향한 열망과 문제들을 해결하려는 욕구와 다양한 필요와 직관에 의해 고무된 수학자는 지성적 문제의 무제한한 잠재성을 상술하고 결정한다. 또한 수학은 비록 그 자체가 양에 관한 것은 아니지만 양에 어느 정도 좌우되는 것으로서 양과 우연적인 상호관계를 가지고 있는 다른 존재에 대해서도 취급한다. 수학자들의 관점에서 볼 때 시간과 운동은 양에 관한 취급이 가능하다. 왜냐하면 시간과 운동이 속하는 것은 그 자체가 질량화되고 분리 가능하기 때문이다. 시간은 운동의 연속성 때문에 분리가 가능하고 연속적이다.

자연에 대한 철학과 물리학에서 실체는 공간-시간에서 그들의 존재적 결정과 진정한 양적이고 질적인 변화와 운동에 종속되어 있는 것으로 여겨진다. 반면에 수학은 실체를 지각적으로 존재하는 사물의 일부분인 성질과 변화로부터의 추상을 통해 질량화된 물질에 지나지 않는다고 여긴다.

변화와 움직임에 종속되어 있는 것은 한순간에 그 자체일 수 있고 다음 순간에는 변할 수 있다. 그래서 과학적 단계의 도달을 위해서는 그 자체 내에서 유동성과 추측에 종속되어 있는 것에 대한 필연적이고 불변하는 추상인 본질, 근원 그리고 일반적 특성들이 성취되어야 할 필요가 있다. 지각가능한 문제의 개인적이고 개체화된 특성을 포기하면서 정신은 완전한 추상에서 그 자체가 주체인 것으로부터 추상된 것처럼 환상으로부터 구체화된 보편적 본질을 고찰한다. 일단 정신적 종착점이 과학적 고찰을 위해 성취된 후에 정신은 정신 외부적 현실을 포함하는 과학적 판단을 언급할 수 있게 된다.

모든 추상적인 과학은 특정한 사물로부터 보편적인 것을 추상해 내는 첫 번째 정도에 의해 특징지어지는데 이것을 완전 추상(total abstraction)이라 하고, 그 이유는 이것이 주관적인 것으로부터 보편적으로 완전한 것을 추상해 내기 때문이다.

형식적 추상에서 수리과학에 적합한 과학적 추상의 두 번째 형태인 단순한 이해의 행위는 비록 그 출발점이나 기원은 같을지라도 정신 내에서의 그 종착점에서는 고유하고 독특하다. 수학적 본질은 감각자료로부터 추상하는 것에서 시작하나 이것은 완전추상의 물리학적 본질과는 다른 방식의 추상이다.

완전추상과 형식추상 사이의 고찰의 다양성은 그들이 빈번하게 혼동되는 것으로 질량에 관한 이러한 두 타당한 관점들을 보호하기 위하여 필연적으로 강조되어야 한다.

순수수학(pure mathematics)은 정신 외부적 현실에 대한 그 과학적 판단을 내리지 않고 다만 추상되고 질량화된 물질, 즉 수학적 추상을 제외하고는 사물이 존재하지 않는 상태에 대해서만 판단을 내린다.

완전추상이나 형식추상에서 제시된 질량의 관점에 비교하여 형이상학은 존재의 원리로서

속성적인 질량을 다루고 선형적인 질량의 개념을 연구한다. 속성적인 질량과 관련하여 형이상학은 비록 물질이 모든 존재의 우연보다 우선하지만 질량은 다른 우연에 관하여 자연보다 우선한다고 지적한다. 이런 이유 때문에 1차 우연이라고 하는 질량은 실체적 물질의 부분의 순서를 정하고 그 확장파 다른 성질들의 기초가 된다.

모든 지각 가능한 성질들은 그들의 직접적인 존재의 원리로서 질량에 근거한다. 이것이 바로 어떤 질적인 것이든 양에 근거한 것이든 해석적인 질적 고찰을 부여할 수 있는 궁극적인 이유이다. 다양한 수학적 측도를 통해 수학의 원리는 질적인 상태에 적용한다.

어떤 완전한 형이상학적 반영이 질량은 지성적 문제인 질량에만 결합된 물질로 여겨진다고 지적하지 않는 이상 현실적 순서로부터 수학적 순서로 도약하는 것은 쉽게 나타난다.

그렇다면, 수학자들에 의해 취급되는 질량화된 물질은 심사숙고하게 알려지고 수학자들의 관점에서 본 존재의 원리로서의 질량과는 다르다. 또한 그것은 물리학의 정신 외부적 질량과도 다르다. 게다가 질량에 관한 비슷하거나 똑같은 질문이 각각의 과학에서 일어날 수 있다.

완전추상의 관점에서, 유형의 물질이나 전체적인 요약은 사실상 유한하거나 잠재적으로 무한한 것으로 볼 수 있다. 수학적 관점에서, 질량에서의 실제적 유한은 추상적으로 고찰된 질량화된 물질의 잠재적 유한에 비하면 거의 중요하지 않다. 형이상학적 관점에서, 유한의 존재와 본질과 과학적 과학과 수리과학의 무한에 대한 관계가 고찰된다.

마지막으로, 이러한 각각의 과학이 만들어 내는 이해가능성에는 차이점이 있다. 완전한 추상에서의 정신의 움직임은 정신이 야만인과 인간의 본질로부터 동물의 본질로 진행하며 범 위에는 더 일반적이고 이해에서는 덜 일반적인 것으로 나아가는 것과 같이 특정한 것에서 보편적인 것으로, 보편적인 것에서 더 보편적인 것으로 올라가는 움직임이다. 비슷한 경우로는 비록 더 많은 현상을 포함할 수도 있지만 이해하기 쉽지 않은 물리학적 이론의 발전적인 일반화를 들 수 있다. 따라서 완전한 추상에서는 정신이 외부적 현실의 측정과 실제성으로부터 멀어질수록 과학자들은 더 이해하기가 쉽다.

그러나 형식적 추상의 경우에는 수학의 추상된 본질은 그것들의 정신 외부적 존재의 상태에서보다는 추상적 상태에서 더 이해하기가 쉽다.

2. 수학적 본질의 변천

수학적 추상의 본질과 관련하여 예술적, 논리적, 절대적, 물리적 그리고 실용적인 정신의 성향으로부터 발생된 다양한 태도는 역사를 통하여 수학을 미적인 예술, 순수한 논리, 창조적인 지식, 물리학 그리고 계산과 측량의 체계로 만들었다.

수학의 본질에 관한 이러한 입장들은 심리학적 추론(psychological reasoning)에 의해 설

명할 수 있다. 그러나 추상적이고 질량화된 물질을 다루고 형이상학, 논리, 물리학 그리고 정신 외부적 현실에 추상적인 밀접한 유사성이 있는 수학적 추상의 본질은 오류적인 입장과 불완전한 진리에 그 자체를 내어 주는 것으로 보인다.

자연스럽게 제시되는 주요한 두 의문 중, 이전적 경험으로부터의 수리과학의 기원을 먼저 고찰하고, 그리고 나서 수학의 발명의 심리학을 고찰할 것이다. 배움의 순서가 첫 번째이고 발명의 순서가 두 번째이기 때문에 수리과학을 습득하는 이런 두 방법은 서로 다른 점이 존재한다는 것이 구별되는 바탕이다.

수학자들은 증거, 상징, 구조 그리고 판단과 많이 관련된 반면에 수학은 다른 모든 과학처럼 과학 이전적 지식과 감각경험 안에 기원이 있다. 수학이 과학이고 추상적이라는 것이 진리인 반면에, 어떤 인간도 수학적 추상의 행위를 끊임없이 하지는 않는다는 것도 진리이다. 과학적 행위로서의 수학적 추상은 아마도 수학적 재능 안에서처럼 스스로 유도되거나 부모나 교수나 책에 의해서 자극된다. 그러나 셈의 과정에서 일반적으로 사용되는 셀 수 있는 능력이나 숫자의 사용조차도 수학적 추상의 행위는 아니다.

수학적 숫자에 대한 의문은 숫자 자체에 대한 의문과는 구분된다. 전자는 질문의 본질과 과학적 내용에 관하여 추상적으로 형이상학에 귀착한다. 사실 수학의 역사적 기원의 완전한 의미는 이제까지 우리가 발견한 것에서 어떤 인간도 수학적 추상에 실제적으로 관련되지 않았던 때가 있었고, 누구든 삼각형을 추상적으로 인식하고 삼각형의 필연적이고 보편적인 성질을 증명한 첫 번째 사람이 수리과학의 창시자이다.

이러한 역사적 교훈은 일상생활에서 배울 수 있는 교훈과 비슷하다. 수학적 추상을 습득하지 않고도 인간은 셈을 하고 곱을 하고 뺄셈을 한다. 형이상학적 과학에서의 분리와 물리학에서의 추상에 대해서도 같은 경우가 존재한다. 따라서 수학의 역사적, 심리학적 기원에서 수학의 더 낮은 범주는 과학 이전적 지식과 경험이다. 이러한 의미에서 형식주의와 논리주의가 형이상학과 논리를 수학적 발전의 고차원의 범주에 속한다고 지적한 것처럼 직관주의는 수리철학을 알맞은 방향으로 인도한다.

수학은 어떻게 보면 정신의 순수한 창조라고 혼동적으로 주장하는 이상주의자는 과학적 추상의 과정을 부정함으로써 경험주의자와 같이 그 자신의 경험과 수학 역사의 증언을 부정하고 과학 이전적 지식과 과학적 지식을 혼동한다. 수학은 이상주의나 경험주의의 성향에 연결됨으로써 더 취미에 맞거나 매력적이 되는 것은 아니고 수학의 본질에 대한 그러한 오류적인 입장은 수학의 성장과 발전을 해석하는 원인이 아니며, 사실 수학적 실용으로부터 발생하는 것도 전혀 아니다.

수학을 궁극적으로 이전 경험과 과학 이전적 지식으로부터 발생하는 것으로 제안하는 것은 물론 완전히 발달한 수학을 제안하는 것이 아니다. 초라한 시작에 귀를 기울이는 모든 두광적인 이론은 어떤 의미에서 후퇴적이다. 이러한 이론들은 수학적 자유로움과 발명성에 제한을 두려워하지도 않는다. 사실 물리학자에게 필요한 실험이나 실용적이고 정치적인 지

해에 익숙한 것과 대조함으로써 감각경험의 수학의 습득을 가능하게 한다는 것은 진리이다.

천재인간 그리고 엄밀한 의미에서 수리과학의 성향을 습득하는 어떤 사람에게 있어서, 어린 나이에 수학에 잘 적응하는 것은 타당하게 이해되어야 만 한다. 비록 수학이 감각경험의 최소한의 양에서 발생하지만 수학은 각각의 수학자의 상상과 과거 경험에 불가피하게 종속되어 있다. 따라서 물리학자가 정신 외부적 현실과 끊임없이 교류해야만 하고 수학자는 이런 친밀한 관계를 맺을 필요가 없는 반면에, 수학자는 균형적으로 그의 상상에 의존한다.

비록 두 과학의 기원과 관련하여 수학자와 물리학자가 자주 비교되기는 하지만 수학적 본질은 정신 외부적 현실에 존재하는 것이 아니고 단지 상상 안에서만 존재할 뿐이라는 것이 상기되어야 한다. 그래서 수학자의 우주는 그의 과거 경험의 물질들과 함께 상상적인 구조와 발명의 우주이다. 물리학자는 정신 외부적 현실의 복잡함과 유동성에 의해 더 한정적으로 제한되어 있다.

수리물리학이나 수리생물학과 같은 중간적 과학에서 물리학자나 생물학자는 충분한 실험 후에 정신 외부적 현실을 이해하고 측정하는 보조기구로서의 수학적 원리들과 결론에 도달한다. 과학활동이란 넓은 의미에서 진리에 도달하거나 또는 적어도 진리에 근접할 수 있는 방법으로 정의할 수 있다.

진리를 배우는 데는 일정한 방법이 있고, 또 방법에도 어떤 방법은 다른 것에 비하여 더 효율적일 수 있다. 물론 관찰도 과학을 하는 부분적인 방식이 될 수 있지만 알아 낸 사실을 남에게 설득력 있게 받아들이게 하기 위해서는 과학자들이 인정하는 과학의 방식을 따라야 한다. 이러한 방식으로 귀납적 추론(inductive reasoning)과 연역적 추론(deductive reasoning)이 있다.

귀납적 추론은 여러 번의 관찰 결과에 근거하여 어떤 결론을 내리는 것으로, 각각의 관찰을 종합하여 보편성을 끌어내는 것이다. 귀납적 추론과는 달리, 연역적인 추론은 어떠한 커다란 가설을 설정하고 이로부터 구체적인 결론을 내리는 것이다. 그러므로 수학은 모든 추론적 과학과 같이 귀납법(induction)과 경험에 대한 이중 의존성이 있다.

첫 번째로, 수학자와 모든 과학자들은 한 개의 개체로부터 보편적인 것을 추상한다.

두 번째로, 모든 과학은 보편적이고 필연적인 속성들이 주제에 귀착되는 판단과 추론의 과정과 관련이 있다.

이러한 두 가지 의미에서, 수학과 다른 과학은 경험과 귀납법에 의존한다고 말할 수 있다. 그러나, 일단 수학적 추상이 성취되면 정신 외부적 현실에 대한 상세한 분석을 더 이상 할 필요가 없고, 수학적 경험의 풍부함은 지성적 물질의 불확정성이 모든 종류의 질적인 확정성을 무한하고 잠재적으로 지지하는 상상 안에서 개방되어 있다.

정신 외부적 경험으로부터의 수학적 존재들의 궁극적인 기원은 수학을 물리학으로 축소하는 것이 제시되었다는 것을 꼭 의미하는 것은 아니다. 그러나 이러한 이론은 수학의 역사와

개인과 관련된 기원과 발전에서 수학이 감각 경험에 의존한다는 것을 주장하지 않는다.

3. 결론

수학을 과학 이전적, 물리학적, 수학적 그리고 심지어는 형이상학적 지식에 포함시키는 것은 수학적 발명에서 특히 분간이 가능하다. 물리학, 이전의 수학 그리고 심지어는 형이상학적 개념에 대한 분석이 수학적 발명에 대한 상상적인 직관을 가지고 있다는 예가 셀 수 없이 많다.

수학자들이 허락해 버린 첫 번째 종류의 혼동은 수학의 본질을 다른 과학들의 본질과 동일시하려는 경향이다. 수학의 초기 시절에 이미 그리스의 철학적인 수학의 개념들이 수리개념은 물리학이나 형이상학의 개념과 비슷하고, 수학적 본질은 실제 존재와는 분리적으로 움직인다는 관점과 수학적 추상은 윤리적인 질체가 미덕으로 여겨진 현실을 위조한 것이라는 회의적인 관점들을 포함했다.

수학적 추상의 본질에 관한 두 번째 종류의 혼동은 수학의 방법론적 과정으로부터의 수학의 본질에 대한 의문을 구분하지 못하는 데서 비롯된다. 수학적 본질은 형이상학적, 논리적 그리고 변증법적이고 단순히 가능성 있는 본질과는 어느 정도 비슷하고 어느 정도 다르다. 그리고, 이러한 다양한 형태의 개념은 사용된 과학적, 혹은 변증법적 추론의 과정의 유사함 때문에 혼동되는 수도 있다.

참고 문헌

1. Barker, S. F., *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1964.
2. Beth, E. W., *Mathematical Thought: An introduction to the Philosophy of Mathematics*, Gordon & Breach Science Publisher, New York, 1965.
3. Curry, H. B., *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*.
4. Keyser, C. J., *Mathematical Philosophy: A Study of Fate and Freedom*, E. P. Dutton, New York, 1922.
5. Korner, S., *The Philosophy of Mathematics*, Hutchinson University Library, London 1960
6. Maziarz, E. A., *The Philosophy of Mathematics*, Philosophical Library, New York 1950
7. Russell, Bertrand, *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen & Unwin

- London, 1919.
8. Russel, Bertrand, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Macmillan, New York, 1924.
 9. Stephan, K., *The Philosophy of Mathematics: An Introduction*, Harper & Row, New York, 1962
 10. Wedberg, Anders, *Plato's Philosophy of Mathematics*, Sweden Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1955