Historia Mathematica Vol. 14, No. 2, 2001, 61-68

무한소의 역사를 통해 본 수학에서의 합리성

경북대학교 수학교육과 **유윤재**

Abstract

Rationality in mathematics is discussed by analyzing historical facts concerning infinitesimality. Several views containing Platonism, formalism and falsificationism are suggested to analyze rationality.

1. 서론

수학은 합리적인 학문이라고 한다. 이러한 생각은 수학자뿐만 아니라 수학에 관한 막연한 지식을 가진 사람들도 인정하고 있다. 그러나 합리성의 정확한 의미에 대해서는 수학자 사회 내부에도 다양한 견해를 가지고 있다. 그러면서도 이 문제를 공개적으로 논의된 적은 없다고 본다. 이러한 문제보다도 수학 자체에 더 관심을 가지기 때문으로 보인다. 수학자에게 있어서 이 문제는 어떻게 보면 사소한 주제가 될 수도 있으나 수학의 향방을 예측하는데 하나의 이정표의 역할을 하며 특히 학교수학[1]에서는 수학과의 성격 중의 하나이기 때문에 수학교육의 측면에서는 필연코 논의되어야 할 주제라고 본다.

본 연구는 합리성의 본성을 논의하고 이 합리성이 무한소에 대하여 가진 관점을 도출하려고 한다. 물론 무한소라는 한 개의 개념을 통하여 수학적 합리성 전체를 개관한다는 것은 문제를 너무 단순화하는 것이 될 수도 있다. 그러나 무한소라는 개념은 다른 수학적 개념보다 역사적으로 일찍이 등장했고 단일 개념으로서 수학 발전에 미친 영향은 확고하며, 또 그 역할을 보면 성과에 비하여 개념이 분명하지 않은 모순된 상황에서 존속되었기 때문에 이것을 선택하였다.

합리성 본질을 규명하기 위해서 무한소를 소재로 하고 기본 관점으로는 플라톤주의, 유클리드, 힐베르트의 형식주의, 라카토쉬의 반증주의를 선택하였다. 디랙의 초함수가 이런 논의의 소재로서 적용될 수 있지만 이것은 역사가 비교적 짧고 수학 전반에 미친 영향은 무한소

1. 중등수학교육과정 해설 III(1999) p. 33.

에 비하여 아직은 미미하기 때문에 논의대상에서 포함시키지 않았다.

플라톤주의는 대부분의 수학자가 인정하기 때문에 선택한 것이다. 형식주의는 수학에서 가장 오랫동안 정형화되었고 그 주체가 되는 유클리드의 원론은 수학 교과서로서 가장 오랫동안 사용되었기 때문에 합리성에 대하여 가장 많은 영향을 주었다고 판단된다. 지금은 형식주의가 수학에서 퇴조하고 있지만 아직도 미미하나마 그 영향이 아직도 남아 있기 때문에 형식주의가 함의한 수학적 합리성에 대한 의식은 지금도 내재되어 있다고 보는 것이 타당하다. 라카토쉬의 반증주의는 비교적 최근의 관점이나 그 내용은 수학사의 모든 시기에 나타났던 사건의 본질을 말하고 있기 때문에 포함하였다. 또 라카토쉬의 반증주의는 형식주의에 대립되는 관점을 가지고 있기 때문에 합리성의 본질을 밝히기에 보다 효과적이라고 본다.

2. 관점의 개관

플라톤주의는 수학적 개념이란 단순히 개념이 아니라 대응하는 실재가 있다고 보는 입장이다. 플라톤주의자의에게 있어서 수학 활동의 의미는 수학적 실재에 대한 발견활동이다. 플라톤주의에 있어서는 형식주의자가 의미하는 공리계를 인정하지 않지만 만약 공리계를 설정한다고 하면 실재에 대한 이해 가능한 하나의 가설 또는 모형으로 간주하고 그 그것으로부터 연역되는 결과를 검증하게 된다. 따라서 플라톤주의의 입장에서는 공리는 적어도 하나의 해석이 필요하며 공리체계는 항상 수정될 수 있는 성격이므로 임시방편적이다. 플라톤주의자에게 있어서 수학적 이론의 판단의 기준은 수학적 실재 속에서 찾아야 되며 합당한 기준을 제시하지 못하면 공리체계의 우열에 대한 검증은 무의미하다.

그러면 실제로 플라톤주의자는 가설 또는 공리체계의 정합성을 판단을 위해서 어떠한 전략을 선택하는가? 하나의 대안으로서 수학을 자연과학의 도구로서 보는 것이다. 수학적 실재의 일부는 경험세계에 내재되어 있다고 보는 것이다. 이러한 생각의 초안은 피타고라스의 자연관에 의하여 최초로 제시된 것이다. 이렇게 보면 수학이란 하나의 응용수학이며 하나의 언어이다. 다른 하나의 대안으로서는 수학자는 의식적 또는 무의식적으로 자연세계와 항상 교감하고 있으므로 경험세계를 분명하게 의식하지 않더라도 선천적으로 수학적 실재를 향하고 있다고 할 수도 있다. 결국 수학에서 순수하게 문제풀기를 하는 것도 수학적 실재를 발견하는 것으로 생각할 수 있다.

형식주의는 수학을 공리로부터 시작하는 논리적 언어 게임으로 간주하는 것이다. 엄격한 형식주의자라면 먼저 공리를 제시하고 그 공리로부터 형식언어로 연역하여 새로운 수학적 명제를 얻는 일련의 절차를 시행한다. 플라톤주의의 수학은 자연과학과 같이 어떤 것에 관한 학문이지만 형식주의는 어떤 대상에 관한 학문이 아니다. 이와 같이 형식주의는 공리계를 구성하는 진술들의 참 또는 거짓에는 전혀 관심이 없으며 단지 공리체계의 내부적 규칙만 유지하면 된다고 본다. 결국 형식주의는 수학적 대상이 존재하지 않기 때문에 플라톤주

의와는 달리 가치 중립적이다. 그러나 실제로 이와 같이 순수한 의미에서 형식주의를 추구하는 수학자는 없다고 본다. 만약 자신이 형식주의의 정체성을 확인하기 위하여 먼저 임의로 공리를 만들고 그것으로부터 연역하는 수학을 하는 일련의 절차를 수행한다면 역사적으로 볼 때 그는 틀림없이 일류 수학자의 반열에는 올라가 수 없었을 것이다. 형식주의자도 다른 수학자와 마찬가지로 다른 수학자의 연구에서 제시된 문제를 풀고 발전시키며 새로운 수학을 창조하는 통상적인 과제를 수행한다. 공리체계를 만들게 되는 시점은 하나의 수학의 이론이 완성될 무렵이며 그 수학적 명제들 중에서 본질적인 것과 그렇지 않는 것을 분류하고 체계적으로 정리하기 위한 수단으로 사용된다. 이와 같이 플라톤주의자와 형식주의자는 공리계를 보는 관점은 다르지만 수학활동만을 보면 구별할 수 없을 수도 있다.

마지막으로 라카토쉬의 반증주의의 견해를 보자. 엄밀한[2] 형식주의의 수학에서는 공리계에 의하여 구조가 확정되어 있는 것과는 달리 라카토쉬의 반증주의는 수학은 발생적이라는 점을 강조하고 있다. 수학이란 흐르는 물과 같이 일정한 모양이 없으며 항상 새롭게 변화하며 수학은 구성적이다. 라카토쉬는 과학에서 발견의 논리를 설명하기 위하여 연구 프로그램이라는 개념을 사용하고 있다.[3] 그는 자신의 이 이론을 포퍼의 반증주의와 구별하기 위하여 세련된 반증주의라고 명명한다. 연구 프로그램의 개념은 원래 수학적 발견의 논리를 설명하기 위하여 도입되었고 수학에서 그 전형을 확장시켰기 때문에 수학의 논리로서 받아도 좋다고 본다.[4] 그의 이론에 의하면 수학적 발견의 논리는 처음에는 가설에서 출발하여 반례에 의하여 반박되고 수정을 거치는 동안 이론이 세련되어 간다는 것이 요지이다. 이 이론에 의하면 수학에서 증명이란 항상 결함을 가지고 있으며 완벽함을 위하여 그 결함을 제거하는 과정의 학문으로 규정된다.[5]

3. 무한소의 역사

먼저 무한소를 소개한다. 임의의 주어진 양수 a와 M이 있을 때 $an>M$을 만족하는 자연수 n이 존재한다. 이 명제는 실수에서 항상 성립한다. 엄밀하게 말하면 이 명제를 참으로 하는 공리계가 존재한다. 이 명제를 아르키메데스 공리라고 한다. 아르키메데스 공리를 만족하지 않는 a를 무한소라고 한다. 즉 양수 M이 존재하여 임의의 자연수 n에 대하여 $an<M$을 만족할 때 a를 양의 무한소라고 한다.

2. 엄밀한 형식주의라는 것은 먼저 공리체계를 세우는 것으로 수학을 시작하는 것을 말한다. 저자 주
3. 라카토쉬는 포퍼의 반증주의를 소박한 반증주의라고 하고 자신의 것을 세련된 반증주의라고 불렀다. 세련된 반증주의에 따르면 과학이론 T1이 과학이론 T2에 의에 반증되었다고 할 수 있으려면 1) T2의 경험적 내용이 T1의 경험적 내용보다 더 많아야 하고, 2) T2는 T1이 성공적으로 설명한 것을 모두 설명해야 하면, 3) T2에 보고된 내용은 용인되어야 한다고 주장하였다. Lakatos(1978).
4. Lakatos(1976).
5. 포퍼는 수학에 대하여 어떤 의견을 가지고 있는지는 알 수 없다., 그러나 자연과학에서 그의 반증주의적 가류론은 라카토쉬로 하여금 수학에서 이러한 입장을 출발케 하는 단서를 제공했다고 본다.

무한소는 고대의 원자론자인 데모크리투스에 의하여 최초로 제시되었다고 본다. 먼저 피타고라스는 삼라만상은 수로 구성되었다고 했다. 여기서 그가 말하는 수는 유리수를 말하며 유리수란 단위수로 구성된다. 데모크리투스(대략 460-370 B.C.)는 피타고라스의 영향을 받았다고 전해진다. 데모크리투스는 물질은 더 이상 나눌 수 없는 원자로 구성되어 있는데 물질은 원자들의 배열된 형태로 보았다. 그는 자신의 이러한 생각을 수학의 경우에도 적용하였는데 예로서 입체도형은 높이가 하나의 원자인 평면으로 축적되어 있는 것으로 생각하였다. 이 생각은 근대의 카발리에리가 생각한 것과 본질적으로 동등하다. 데모크리투스[6]는 삼각기둥은 밑면적과 높이가 각각 같은 3개의 삼각뿔로 분해할 수 있음을 알고 있었다. 그리고 이 3개의 삼각뿔의 부피는 각각 같다는 것을 추론하여 삼각뿔의 부피를 구하는 공식을 증명하였다고 전해진다.[7] 그의 추론은 남아 있지 않지만 그 추론에는 카발리에리 원리와 같은 무한소방법에 의한 미적분학의 기본원리를 포함하고 있다.

사각형은 면적을 생성하는 원자들로 구성되어 있다고 보자. 이러한 수학적 원자의 개념이 무한소의 개념인데 여기서 무한소의 면적은 얼마로 하는가에 대한 그럴듯한 설명을 할 수 없다. 즉 무한소의 면적을 0으로 한다면 0이 모여 양의 면적으로 생성한다는 것도 자연스럽지 못하다. 또 무한소의 면적을 양의 값으로 정의하면 모든 도형의 면적은 무한대가 된다. 구적법의 기본원리로서 무한소의 이러한 난점을 극복하기 위하여 제시된 것이 유도소소가 제안한 실진법(method of exhaustion)이다. 실진법에서는 도형의 면적을 측정하는 기본단위를 원자 대신에 삼각형으로 하는 것이다. 도형은 다양한 크기의 삼각형으로 구성되어 있다고 보는 것이다. 실진법의 경우에는 아르키메데스의 공리에 대한 검사를 통과하게 된다.

구적법에 있어서 무한소법의 이러한 논리적 결함이 그 당시의 수학자들에게 결국 실진법을 선호하게 만들었다고 보는데 이러한 경향은 아르키메데스의 수학관에서 극명하게 나타난다. 아르키메데스는 도형의 체적을 계산하는 과정에서 무한소법에 의한 계산은 절차가 간단하기 때문에 매우 선호했다고 하는데 그러나 답을 예상하는 데만 사용했고 결과의 자신이 발견한 명제들은 모두 실진법으로 정당화하였다. 고대 그리스 및 헬레니즘기의 수학에서 무한소법에 의한 계산은 이와 같이 실진법에 의하여 가치가 축소되었거나 배제되었다.

그러나 미적분학이 도래하는 시기에서 무한소법은 다시 부각되었다. 케플러(는 그의 천체관측에서 얻은 자료로부터 연역과정에서 무한소를 필요로 하였다. 그의 생각에 의하면 원이란 반지름을 높이로 하고 무한소의 밑변을 가진 삼각형의 모임이다.[8] 따라서 원의 면적은 밑변의 길이를 무한소 δ로 가지고 높이를 r로 가지는 삼각형의 면적의 합이 되는데 삼각형의 면적은 $\delta r/2$이므로 모든 삼각형의 면적의 합은 $\Sigma\delta r/2$이 된다. 여기서 $\Sigma\delta=2\pi r$이므로 원의

6. Burton(1991), p. 53.
7. 엄밀한 증명은 유도소스에 의하여 완성되었다고 한다. 유도소스는 자신이 창안한 실진법으로 삼각뿔의 부피를 계산하였다. H. Eves(1955), pp. 348-349.
8. 지구의 공전궤도는 태양을 하나의 초점으로 하는 타원궤도를 그리고 있는데 궤도가 그리는 면적은 무한소 삼각형의 모임으로 간주하였다. Meyer, Merzbach, p. 362.

넓이는 πr^2가 된다. 그 후 카발리에리, 페르마, 뉴턴과 라이프니츠에 의하여 발전한 미적분학은 모두 무한소를 기초로 하여 전개되었다. 여기서 초기 미분법의 정의를 보자.[9] 먼저 $f(x)=x^2$의 $x=1$에서의 미분계수를 구해보자.

$$\frac{f(1+\delta)-f(1)}{\delta}=2+\delta$$

가 되는데 뉴턴은 우변에서 δ를 무시하고 결과를 2로 하였다. 이러한 정의는 그 후 버클리에 의하여 비판되었는데 비판의 요지는 처음에 δ가 0이라면 위의 분수식은 0/0이므로 의미가 없고 δ가 0이 아니라면 위 식의 우변에서 δ를 무시한 것은 정당한 근거가 없다는 것이다. 이러한 비판은 그 후에도 끊임없이 제기되었고 수학자들도 논리적 결함을 해소해야 한다는 것에는 일치하였으나 적합한 대안이 없었다. 실수의 명시적 정의는 19세기 말까지 이루어지지 않았다. 결과적으로 19세기 말까지 실수체계에 공리계가 정립될 때까지 무한소와 보통의 수는 공존관계를 유지하였다.

19세기 초에 코시는 위의 미분법의 정의에서 δ를 무한소로 생각하지 않고 수로 간주하고 그것을 0에 가까이 갈 때의 상태로서 대안을 제시하였다. 이 대안은 현재 고등학교 수준의 미적분학에서 일반적으로 채택하고 있는 미분의 정의와 같다. 그러나 이것은 미분에 대한 정의의 난점을 극복할 수는 있어도 여전히 가까이 간다는 개념이 정형화되지 않는다. 그 후 가까이 간다는 개념은 바이어슈트라스에 의하여 소위 ε-δ 정의로 대치되었다.

그러나 이 모든 것이 해결된다고 하더라도 무한소에 대한 정당성이 확보되는 것은 아니다. 무한소는 실수체계와 관련이 있기 때문이다. 예를 들어 $\lim_{n\to\infty} 1/n$을 보자. 이 값은 각각의 항이 양이기 때문에 0이라고 할 수도 있지만 0보다는 크고 무한히 작은 어떤 양으로 간주될 수 있다. 0으로 간주하는 것과 0보다는 크지만 아주 작은 양으로 간주하는 것은 선택의 문제이다. 만약 전자를 선택하면 무한소는 존재하지 않는 것이 되고 후자를 선택하면 무한소를 인정하는 경우가 된다. 19세기말 바이어슈트라스는 위로 유계이고 증가인 수열은 수렴한다는 공리를 채택함으로서 실수체계에서 무한소를 배제하였다. 현재까지 사용되는 해석학은 무한소를 인정하는 해석학과 구별하기 위하여 표준해석학이라고 불린다. 1968년 로빈슨에 의하여 무한소을 허용하는 수체계가 소개되었다. 이 수 체계를 초실수계라고 하는데 이것은 미적분학이 태동하던 시기의 미분의 정의를 정당화하고 있다.

4. 합리성의 개념

9. 이 정의는 뉴턴의 정의를 현대적으로 재구성한 것이다.

합리성의 개념은 매우 다양하게 사용된다. 논리실증주의에서 합리성은 언어로 표현할 수 있다는 것과 관련되어 있다. 일상적으로는 과학적이라는 말과 합리적이라는 말이 동의어로 사용되기도 한다. 현대에 와서는 효율성이나 최적성이 합리성과 동의어로 사용되기도 한다. 실용주의에서는 이러한 개념이 합리성과 강한 밀착관계를 유지하고 있다.[10] 특히 실용주의적 경향이 강한 7차 교육과정의 수학[11]에서는 수학은 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과로 나온다.

보다 본질적으로는 경험과학적 이론을 자연이란 원본과 비교하여 그 정합도를 합리성의 척도로 생각했다. 이것이 원리적으로 가능한 것인지는 학자의 생각마다 각기 다르다. 과학철학자 포퍼나 라카토쉬는 실재가 존재한다는 객관주의를 인정한 반면에 쿤과 파이어아벤트는 그러한 실재는 없음을 주장하여 과학을 상대주의 또는 무정부주의적 입장을 개진하였다. 합리성에 대한 성격은 이렇게 다양하지만 위에서 언급한 것은 모두 과학에서의 합리성을 의미한다. 그러면 수학에서 합리성은 어떻게 규정해야 할까?

먼저 수학의 합리성이 함의하는 한 측면은 연역적 추론의 학문이라는 것이 자연과학과 구별되는 특징이므로 합리성을 연역추론의 절차와 검증방법에서 찾아야 한다. 그러나 연역적 추론양식은 수학을 말하는 방식에 지나지 않는다. 이것은 수학을 다른 학문과 구별하는 외견상의 특징의 하나일 뿐 수학적 합리성의 전체를 표상한다고 보기는 어렵다. 경험과학에서의 실험활동과 같이 수학에서의 연역적 증명이라는 것은 수학에서의 합리성을 찾기 위한 필요조건일 뿐이다. 수학적 패턴을 찾고, 수학적 개념을 추상화하며, 일반화하고, 개념간의 결합고리를 만드는 일련의 수학화 과정은 보다 높은 수학적 합리성의 범주에 포함되며 수학자들이 수학 문제의 가치를 평가하고, 문제해결 과정에 보인 방법론에 대하여 의견을 제시하고, 다른 문제에 응용할 경우, 효과와 제한성 및 유연성의 검증과 같은 다양한 절차와 평가는 수학적 합리성에 내재하는 준거에 의한다. 더 나아가서 이러한 것으로부터 새로운 수학을 형성하는 수학자 사회의 태도와 수학사적 조류를 추측할 수 있다. 이와 같이 기술적이고 심리적이며 사회적인 일련의 행위는 수학적 합리성에 대한 합목적적이라고 간주되기 때문에 수학적 합리성이란 전체적으로 이해되어야 하며 역사적으로 파악될 때에 비로소 그 성격이 나타난다고 본다. 이러한 합리성을 구성하는 요소들은 수학에서 가장 영향을 준 관점들에 의하여 명료화되기 때문에 서론에서 제시한 플라톤주의, 형식주의, 반증주의는 합리성의 본질을 이해하는 관점으로서의 대표성은 충분하다고 본다. 즉 실재를 제시하는 플라톤주의, 발견의 논리로써 반증주의, 체계화의 양식으로써 형식주의라고 보면 이 세 가지 관점은 수학화 과정의 시작과 중간과정 및 결과에 대하여 대체적으로 공감할 수 있는 특성을 충분히 형성하고 있다고 본다.

---

10. 신중섭(1999), 과학의 합리성.
11. 중등수학교육과정 해설 III(1999), p. 33.

5. 무한소에 대한 관점

무한소 개념은 무엇보다도 수학사에 일찍이 등장한 개념이다. 이 말은 이것이 다른 개념에 비하여 이해하기 쉽고 자연스럽다는 것을 의미한다. 또 미적분학의 태동기에서 이 개념이 주도적인 역할을 했다는 것은 극한이나 급수의 개념보다도 자연스럽고 이해하기 쉽다는 것을 시사한다. 이 말은 자연은 간단하다는 전제가 되어 있다. 제왕의 학문이라는 천문학의 여러 현상들이 미적분학에 의하여 설명되고 더 나아가 다른 경험과학에서 일어나는 여러 현상들까지도 설명할 수 있음으로써 무한소 개념은 수학을 넘어서 과학의 개념으로까지 충분한 자격을 검증 받았다고 본다.[12] 즉 무한소 개념은 플라톤적 요소를 가지고 있다는 것을 의미하며 또 그것은 수학적 실재이거나 적어도 수학적 실재를 경험하는 실례로서 역할을 한다고 할 수 있다. 그러나 이 개념이 고대에서 실진법에 의하여 대치된 것이나 근대에서 극한으로 대치된 것을 보면 어딘가에 합리성을 결여하고 있기 때문이라고 할 수 있다. 그렇지만 그것을 유클리드의 원론에서 사용된 방법과 같이 무한소를 아예 공리로 채택했다면 문제는 간단하게 완결되는데 그렇게 하지 못한 것은 무한소로 실재를 설계하는 것이 충분하지 못하다는 것을 인식했기 때문이라고 본다. 환원하면 무한소의 정체성에 대해서는 플라톤주의가 강하게 작용하고 있는 반면에 형식주의는 적어도 역할의 바깥에 있다는 것을 말한다. 미적분의 태동기에서 무한소의 개념적 완성도는 아르키메데스의 방법이라는 논문에서 응용된 무한소의 개념과 다를 것이 없다. 즉 뉴턴을 전후로 하는 시대는 무한소의 재발견이 이루어진 시기라고 평가할 수 있다.

라카토쉬의 용어를 빌리면 고대 그리스의 경우와 근대 미적분의 태동기에서 무한소는 수학적 실재라기보다는 구적법을 설명하기 위한 이론적 중핵으로 간주된다. 그렇지만 라카토쉬가 주장하는 바와 같이 연구프로그램에는 설명에 대한 반박이 있고 반박을 수용하는 보조가설이 설정되는 과정을 거친다. 수학사를 보면 반박으로서는 버클리의 반론이 전형이다. 그러나 무한소와 관련된 사료의 전체에는 두 시기 모두 보조가설에 해당하는 언명들이 나타나지 않는다. 미분법에 대한 코시의 대안은 보조가설이 아니라 대치된 연구프로그램이 되는데 그 근거는 코시의 미분이론에서는 무한소가 제거되었다는 사실에 의한다. 고대 그리스 시대의 경우는 제시해야 할 사료가 만족할 정도로 충분하지 않아서 예단할 수는 없지만 동등하게 적용될 수 있다고 본다. 결국 라카토쉬의 이론으로는 무한소의 경우를 강력하게 설명할 수 없다는 것을 보게 된다.

한편 미분법의 발달에 초점을 맞춘 전략을 취한다면 미분법이라는 연구 프로그램에서 이론적 중심핵의 역할과 보조가설의 역할을 취하는 개념들의 분석을 통하여 반증주의가 의미하는 합리성을 보다 분명하게 추출할 수 있을 것이다.

12. 라플라스의 수학관은 다음으로 요약된다. 주어진 일순간에 존재하는 모든 원자의 위치와 운동을 아는 전지의 지성은 … 브로노프스키, 매슬리슈(1980), p. 256.

6. 후기

합리성을 관측하는데 있어서 무한소의 경우, 형식주의의 관점은 거의 역할이 없다고 해도 좋을 것 같다. 그렇지만 플라톤주의나 반증주의의 역할은 상호작용하고 있다는 것을 보게 된다. 그러나 반증주의의 해석으로는 무한소는 독자적인 연구프로그램을 형성하지 못하고 단편화되어 있다는 결론이 내려진다. 결국 공시적으로 보면 수학적 합리성이란 실재를 인정하려는 플라톤적 사상이 중심축을 형성하고 있고 동시적으로 보면 반증주의이 흐름이 관측된다.

서론에서도 이미 언급했지만 플라톤주의와 형식주의 및 반증주의의 관점에서 합리성을 규정한다는 것은 사실 협의의 합리성으로 간주될 수도 있고 편협한 결론을 내릴 수도 있다. 그 이유는 합리성은 인식대상과 인식주체와 상호 관련되어 있지만 수학자의 사회적 특성이나 개개인이 수학활동에서 보여주는 미시적 관점은 여기서 포함되어 있지 않기 때문이다. 따라서 위의 세 가지에 의한 규정에 의한 도출은 약한 논리가 될지도 모른다.

참고 문헌

1. 교육부, **중학교 교육과정해설** (III), 교육부, 1999.
2. 브루노프스키, 메즐리슈, **서양의 지적 전통**, 서광사, 1980.
3. 러셀, **서양의 지혜**, 서광사, 1990.
4. 조인래, 박은진, 김유신, 이봉제, 신중섭, **현대과학철학의 문제들**, 대우학술총서 442, 아르케, 1999.
5. Boyer, Carl B., Uta C. Merzbach, *A History of Mathematics*, 2nd ed. J. Wiley and Sons, 1989.
6. Burton, David M., *The History of Mathematics*, 2nd ed. Allyn and Bacon, Inc., 1991.
7. Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders College Publishing. 1983.
8. Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.
9. Lakatos, Imre, *Proofs and Refutations.* J Worral and E. Zahar, eds. Cambridge University Press, 1976.
10. ____________, *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Oxford University Press, 1978.