Historia Mathematica Vol. 14, No. 2, 2001, 29-44

수학적 구조에서의 아이디얼*

숙명여자대학교 수학과 **홍영희**

Abstract

The concept of ideals has played an important role as an inception of the structural approach to algebra. As a sequel to [51], we first deal with the gradual emergence of the abstract concepts of fields and rings, and study the history of ideals initiated by Dedekind and then formalized by Noether for the structural research.

0. 서론

1920년대 이후 현대 수학의 가장 큰 특징은 구조적인 접근이라 하여도 틀리지 않을 것이다. 힐베르트(Hilbert, 1862-1943)가 1899년에 출판한 기하학의 기초(Grundlagen der Geometrie)[23]에서 시도한 후 공리적인 수학의 접근은 그 이전의 수학과 대별되고, 그 이후 미국의 무어(Moore, 1862-1932), 헌팅턴(Huntington, 1847-1952), 딕슨(Dickson, 1874-1954), 베블런(Veblen, 1880-1960) 등에 의하여 공리적 접근은 더욱 발전하게 된다.

그러나 바일(Weyl, 1885-1955)이 언급하였듯이 수학이 공리적 접근을 넘어서 실질적인 구조적 접근은 뇌터(Noether, 1882-1935)와 그와 같이 연구한 학자들에 의하여 이루어졌다([48], [49]). 특히 네덜란드의 수학자 판 데르 베르덴(van der Waerden, 1903-1996)은 1924년에 괴팅겐(Göttingen) 대학을 방문하여 뇌터와 공동연구를 하였고, 그의 영향으로 1930년에 출판한 Modern Algebra[45]에 의하여 현대 대수학의 발전 방향이 형성되었다. 이 책을 처음 접하게 된 프랑스의 젊은 수학자들은 매우 큰 충격을 받고 부르바키(Bourbaki) 학파를 형성하여 구조적 접근을 완성하려고 노력하고[12], 그 결과 Éléments de mathématique[1]라는 대 역작을 만들어 내었다.

그 후 1945년 카테고리 이론(category theory)이 도입됨으로 수학적 구조가 정확하게 정의되고, 이를 통하여 수학의 구조적 연구가 활발하게 이루어졌다([2], [49]).

---

* 본 연구는 숙명여자대학교 2001년도 교내연구비 특별과제 지원에 의해 수행되었음.
2000 Mathematics Subject Classification - 01A55, 01A60, 06-03, 11-03, 12-03, 13-03.

뇌터가 수학의 구조적인 접근의 창시자의 자리를 차지하게 된 것은 그와 그의 동료들이 아이디얼(ideal)의 이론을 정립하였기 때문이다.

따라서, 본 논문의 목적은 아이디얼의 개념이 형성되는 과정을 조사함으로 19세기 수학과 현대 수학이 구조적인 입장에서 구별되는 과정을 알아보는 것이다. 또 우리는 [51]에서 군의 개념의 도입과정을 조사하였는데 아이디얼은 환(ring)과 체(field)에서 정의되고, 또 환과 체는 대수학의 가장 중요한 분야이므로 아이디얼의 개념과 함께 환과 체의 개념이 정립되는 과정을 통하여 산수의 영역에서 수학의 영역으로 대수학이 발전되는 과정을 조사한다.

첫째 절은 환과 체가 추상적으로 정의되기까지의 과정을 알아보고, 둘째 절에서는 데데킨트(Dedekind, 1831-1916)가 아이디얼의 개념을 도입하고, 또 뇌터 이전까지의 아이디얼이 연구되는 과정을 조사한다. 마지막으로 뇌터가 추상적으로 아이디얼을 도입하고 이를 이용하여 수학의 구조적 접근을 가능하게 하는 과정을 조사한다.

독자의 편의를 위하여 독일어 원문은 가능한 한 영어 번역문으로 대치한다[15].

1. 체와 환

체의 개념은 방정식론을 연구한 아벨(Abel, 1802-1829)과 갈루아(Galois, 1811-1832)가 은연중 사용하였지만, 처음 명백하게 도입한 사람은 데데킨트였다. 본 논문의 주제인 아이디얼의 개념을 도입한 사람도 데데킨트이므로 그의 수학에 대한 관점을 좀 더 자세히 알아보자. 그는 1831년 10월 6일 브라운슈바이크(Braunschweig=Brunswick)에서 태어나, 1852년에 가우스(1777-1855)의 마지막 제자로 괴팅겐 대학에서 박사학위를 받고 1854년에 리만(Riemann, 1826-1866)과 함께 이 대학에서 강의를 시작하였다. 이 해에 그는 디리클레(Dirichlet, 1805-1859)와 함께 연구를 하기 시작하고, 또 1856년 겨울학기에 그의 수론에 대한 강의를 듣고 강의록 Vorlesungen über Zahlentheorie[13]를 작성한다. 이 강의록은 그 후 디리클레가 읽고 그의 출판을 허락하는데, 이는 1863년, 1871년, 1879년, 1894년의 4판이 출판되어 디리클레-데데킨트의 강의록으로 알려져 있다. 그 중에 1871년의 제2판에 수록된 제10증보(Tenth Supplement)는 완전히 데데킨트의 업적인데 이 증보판에서 그는 현대 대수학의 중요한 개념인 체, 대수적 정수, 모듈, 아이디얼, 소아이디얼, Ordnung 등의 개념을 도입하는데, 이중에서 현재의 용어와 다른 것은 모듈과 Ordnung으로 이는 각각 복소수체의 부분군과 부분환을 뜻한다. 또 체도 복소수체의 부분체를 뜻한다. 그는 체를 다음과 같이 정의한다. "By a field (Körper) we understand every system of *infinitely many real or complex numbers* which is in itself so closed and complete that the addition, subtraction, multiplication, and division of any two of these numbers always yield a number of the same system. The simplest field is composed of all rational numbers; the largest, of all numbers."

그러나 실제로 데데킨트가 체를 정의한 것은 이보다 훨씬 전이었다. 데데킨트는 항상 그의 연구결과가 충분히 성숙되기 전까지는 그 발표를 연기하였다. 이 사실은 그의 유고(nachlass)에 잘 나타나 있다. 갈루아의 방정식론에 대한 논문이 그의 사후 14년이 지난 후 리우빌(Liouville, 1809-1882)에 의하여 1846년에 출판된 후 1853년 디리클레의 제자인 크로네커(Kronecker, 1823-1891)가 독일에서는 처음으로 갈루아 이론에 대한 논문[25]을 출판한다. 데데킨트는 괴팅겐 대학에서 1855-1858년 사이에 대수학을 강의하였는데 1856년 겨울학기에 갈루아 이론을 강의하였고, 이는 독일 대학에서 최초의 갈루아 이론의 강의로 기록되어 있다. 그러나 그의 강의를 들은 학생은 단 두 명뿐이었다. 이때 그는 매우 자세히 기록된 강의록을 유고로 남겨 놓았는데, 여기에서 그는 군(=치환군), 부분군, 정규부분군, 상군 등에 대한 개념을 도입하고 사칙에 대하여 닫혀 있는 복소수의 부분체를 체로 정의하고 이를 활용하고 있다. 실제로 상군이 처음 발표된 논문은 1889년에 출판된 횔더(Hölder, 1859-1943)의 논문이다[24].

데데킨트가 그의 결과의 출판을 늦추는 것과 함께, 그의 수학에 대한 또 하나의 특징은 개념화(conceptualization)이다. 위에서도 언급하였듯이 그는 괴팅겐 대학에서, 가우스, 리만, 디리클레 등과 공동 연구와 강의를 통하여 수학에 대한 개념적 접근을 확립한다. 실제로 디리클레의 원리(=the view that mathematical problems should be solved through a minimum of blind calculations and a maximum of forethought)[35]에 따라서 그는 수학을 연구한다. 그는 수학적 문제에 대하여 항상 새롭고 더욱 효과적이고 단순한 개념을 통하여 해결하고자 하였다. 즉 해당되는 문제에 관하여 가장 필요로 하는 개념이 무엇인지 확인하고 이를 새로운 개념으로 도입하여 문제를 해결한다. 중요한 정리는 항상 새로운 정의로 나타난다는 개념화의 과정을 이용하였다. 1858년 그는 취리히(Zürich)로 옮겨서 그 곳에서 실수론(절단을 이용한 무리수의 도입)을 정립하는데, 이도 또한 기하학적으로 이해되던 실수의 문제를 개념적으로 정립한 것이다. 그의 실수에 대한 결과는 1872년에야 출판한다[3]. 마지막으로, 데데킨트는 집합론의 기법을 최대한 이용하려고 노력한 수학자이다. 위의 실수론과 아이디얼 이론 모두 개개의 수를 집합을 통하여 정의하려고 한데서 출발되는 것을 보면 그는 집합을 통하여 수학적 대상을 이해할 수 있음을 처음으로 보인 수학자라고 할 수 있다. 그후 1862년 그는 고향인 브라운슈바이크로 돌아가 Technische Hochschule에서 강의를 하였으며 1916년 2월 12일에 죽었다.

그는 그의 주위에 논문을 지도한 학생도 없었고, 따라서 그의 영향은 주로 그와 같이 공동 연구한 학자, 특히 베버(Weber, 1842-1913), 프로베니우스(Frobenius, 1849-1917) 등을 통하여 전해지고 그 후 힐베르트에 의하여 전수되어 뇌터로 이어진다. 뇌터는 데데킨트의 업적을 평가하면서 "Es steht alles schon bei Dedekind."라고 하였다.

추상적인 체의 정의를 처음 시도한 사람은 베버이다. 그는 하이델베르크(Heidelberg)와 라이프치히(Leipzig)에서 공부하고 1866년부터 1883년까지 쾨비히스베르크(Königsberg) 대학에서 강의를 하였는데, 야코비(Jacobi, 1804-1851), 노이만(Neumann, 1798-1895), 리셸로트

(Richelot, 1808-1875), 후르비츠(Hurwitz, 1859-1919), 민코프스키(Minkowski, 1864-1909), 힐베르트 등과 함께 이 대학을 유명하게 만든 수학자로 알려져 있다. 그는 데데킨트와 공동 연구를 통하여 그의 영향을 많이 받은 수학자인데 1893년에 출판한 논문[46]에서 처음으로 군과 체의 추상적 정의를 하였다. 실제로 이 논문에서 그는 갈루아 이론을 오늘날 알려진 이론에 가장 접근하는 이론, 즉 갈루아 대응(Galois correspondence)을 생각하고 이를 통하여 그 이론을 정립하였다. 그는 "The theory appears here as a direct consequence of the concept of field, itself an extension of the concept of group. It appears as a formal law *without any regard to the numerical meaning of the element involved.* The theory is thus conceived as a *pure formalism,* which acquires life and content only when the elements are assigned with numerical values."라고 하면서 논문을 시작하였다. 이전까지는 체의 가군(additive group)적 성격을 아무도 인식하지 못하였다. 그러나 그는 체를 가군에 다른 연산이 정의된 대수적 체계로 정의하였다. 또 군과 체에 대한 추상적 정의를 통하여 유한군, 무한군, 및 유한체, 무한체를 동시에 취급할 수 있는 기틀을 마련하였다. 또 소수가 아닌 자연수 n에 대한 합동, 즉 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$을 통하여 체의 개념을 확장하는 시도도 하였다. 그의 논문은 불행하게도 독일에서조차 별로 반응을 얻지 못하고, 그 자신도 이를 계속 발전시키지 않았으므로 체의 추상적 정의에 대한 시도는 잊혀지고 말았다. 실제로 베버는 1895년에 출판한 그의 저서 Lehrbuch der Algebra[47]에서 다시 체를 복소수체의 부분체로 정의하고 이론을 정립하였다. 수의 체계를 추상화하려고 노력은 하였으나, 데데킨트와 같이 수체계를 추상적 체계의 특수한 경우로 보기보다는 오히려 그 반대 입장을 택하고 있다. 그는 위의 논문 [46]을 참고한다고 하면서도 이 저서에서는 표수(characteristic)가 0인 무한체만 취급하고 있다. 그 후 1908년에 그는 Lehrbuch der Algebra 제3권을 마지막으로 출판하는데, 이 책이 대수학의 발전에 지대한 영향을 끼친 것은 틀림이 없다. 그가 이 저서에서 도입한 용어가 오늘날까지 그대로 쓰이고, 또 판 데르 베르덴의 Modern Algebra가 출판될 때까지 가장 중요한 대수학 책으로 쓰였다.

베버가 시도한 체의 추상적 정의가 잊혀진 후 다시 이를 복원한 사람은 슈타이니츠(Steinitz, 1871-1928)이다. 그는 1894년 브레슬라우(Breslau) 대학에서 박사학위를 받고 1897년 베를린(Berlin)에 있는 샬롯텐부르크(Charlotenburg) 대학에서 강의를 시작하고, 그 후 1910년 브레슬라우 대학의 교수가 되고, 1920년부터 죽을 때까지 킬(Kiel) 대학에서 강의를 하였다. 그는 크로네커의 제자인 헨젤(Hensel, 1861-1941)의 p-진체 (p-adic field)의 이론[20]에 영향을 받아서 1910년에 논문[44]을 출판하는데, 서론에서 "I was led into this general research especially by Hensel's theory of algebraic numbers, whose starting point is the field of p-adic numbers, *a field which count neither as the field of functions nor as the field of numbers* in the usual sense of the word."라고 하였다. 즉 복소수체의 부분체로서의 체를 정의한 것과 차별화를 선언하고 있다. 또 그는 "Whereas Weber's aim was a general treatment of Galois theory, independent of the numerical meaning of the elements, for us it is the *concept of field which represents the focus of interest.* The aim of the present work is to advance an overview of all the possible types of fields and to establish the basic elements of their interrelations."라고 함으로, 베버의 갈루아 이론을 위한 체가 아니라 체의 구조적 성질 자체를 연구하겠다고 하였다. 그는 prime field (유리수체와 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p는 소수))의 개념을 도입하고 확장체와 체의 표수를 통하여 체의 구조를 밝혀 내었다. 그는 모든 체는 대수적 폐체(algebraic closure)를 가짐을 보였다. 따라서 그의 업적은 많은 사람들에 의하여 현대 대수학의 요람(cradle of modern algebra)으로 취급되고 있다.

환은 체에 비하여 훨씬 늦게 도입된다. 체는 실수나 복소수체의 사칙연산을 통하여 아주 오랫동안 자연스럽게 사용되어 왔으므로 체의 개념이 도입되는 것은 당연하게 받아들여진다. 그러나 데데킨트가 대수적 정수(algebraic integer)의 연구를 하면서 나눗셈이 정의되지 않는 대수적 체계의 필요성 때문에 환의 개념을 도입한다. 전술한 디리클레-데데킨트의 강의록 중 1871년판에 대수적 정수는 덧셈, 곱셈, 뺄셈에 대하여 닫혀 있음을 보였으나 환의 개념을 도입하지는 않았다. 그 후 1877년에 출판한 논문 [6]에서 데데킨트는 주어진 모듈, 즉 복소수체의 부분군 A에 대하여 $\{ \alpha : \alpha A \subseteq A$인 복소수$\}$를 A의 Ordnung으로 정의하였다. 이는 물론 현재의 환이 되고, 또 역으로 모든 유리정수(rational integer-대수적 수론에서는 대수적 정수를 정수, 보통 의미의 정수는 유리정수라 부른다)를 포함하는 모듈 A가 곱셈에 대하여 닫혀 있을 때 이를 Ordnung이라고 불렀다. 또 디리클레-데데킨트의 강의록 1879년판에 환의 개념을 Ordnung으로 도입한다. 즉 Ordnung은 다음을 만족하는 system D로 정의한다.

(α) The system D is a module generated by a finite collection of n numbers. The same n numbers also generate the field of numbers which serve as reference framework.

(β) The system D is closed under multiplication.

(γ) The number 1 belongs to the system D.

물론 이 정의에서 체는 대수적 수체를 뜻한다. 따라서 그의 Ordnung에 속하는 모든 원소는 대수적 정수이고 또 모든 유리정수를 포함한다. 1877년의 정의와 다른 점은 조건 (α)인데 이는 대수적 정수를 다루려고 하였기 때문이다.

1897년에 힐베르트는 [22]에서 처음으로 환을 독립적인 개념으로 정의한다. 즉 "Let $\theta, \mu, \cdots$ be any collection of algebraic numbers, whose domain of rationality is a field k of degree m, then the system of all integer functions of $\theta, \mu, \cdots$ with rational integer coefficients will be called ring of numbers, ring or integral domain." 힐베르트는 이 개념이 데데킨트의 Ordnung에 대응되는 것이라고 하였다. 실제로 $\omega_1, \cdots, \omega_m$이 체 k의 기저이

면 이들 기저에 의하여 생성되는 환은 k에서 모든 대수적 정수들의 집합으로 된다. 흥미로운 사실은 환과 정역(integral domain)을 함께 사용하고 있는 점이다.

1913년에 헨젤이 출판한 [21]에서 제법에 대한 조건-axiom of unrestricted and uniquely determined division-을 제외한 체로 환이 정의되어 있다. 헨젤은 그의 제자인 프랜켈(Fraenkel, 1891-1956)의 많은 도움으로 이 책을 출판하였다. 그는 복소수체와 관계없이 모듈을 가환군으로 정의하고, 군을 모듈의 정의의 덧셈을 곱셈으로 대치하여 정의하고, 체를 덧셈에 관한 모듈, 곱셈에 관한 군으로 이해하고 있다.

한편 뢰비(Loewy, 1873-1935)는 1915년에 출판한 Grundlagen der Arithmetik[33]에서 처음으로 관계, 동치관계, 순서관계 등을 정의하고, congruence를 Gleichheit(=equality)로 정의하고 상집합, 상군 등을 동치류(equivalence class)로 정의하였다. 이를 통하여 수체계가 아닌 체계가 제 자리를 차지하기 시작함으로 그의 조카인 프랜켈이 추상적인 환을 정의하게 되었다. 실제로 프랜켈은 뢰비의 책을 저술하는데도 헨젤의 경우와 같이 많이 도운 것으로 알려져 있다. 뢰비 이후 대수는 집합, 연산 그리고 congruence를 가지는 체계로 정의되기 시작한다. 물론 항등 관계를 생각하면 현재의 대수체계와 같다고 말할 수 있지만, 항상 상대수(商代數)를 취급함으로 수의 체계에서 벗어나고 원소가 집합인 대수를 다루게 되어, 추상화를 가능하게 하였다. 환의 추상화를 가장 정확하게 한 사람은 프랜켈이다. 위의 헨젤, 뢰비의 저서가 그의 도움으로 이루어지고, 또 헨젤의 p-진수, g-진수의 공리적인 접근을 연구하면서[16] 그는 추상적인 환을 정의하게 된다. 1914년에 그의 학위논문의 결과를 [17]에 발표하는데 이곳에서 그는 처음으로 환을 공리적으로 정의하고, 환을 연구의 대상으로 삼았다.

두 개의 연산 덧셈, 곱셈과 congruence를 가지는 체계 R에 대하여, 덧셈에 관하여 군의 조건, 곱셈에 관하여 결합법칙, 및 배분법칙을 만족하고 항등원을 가지면서 다음 두 조건을 만족하는 것을 환으로 정의하였다. 물론 모든 공리는 商代數에 관한 것이다.

R_8. Every regular element must be invertible with respect to multiplication in R.

R_9. For any two elements a, b of R there exists a regular element $\alpha_{a,b}$ such that ab $= \alpha_{a,b}$ba and a second regular element $\beta_{a,b}$ such that ab$=$ba $\beta_{a,b}$.

따라서 regular element 전체는 체를 이루기 때문에 유리정수의 환은 프랜켈 의미의 환이 되지 않는다. 그리고 그는 데데킨트의 Ordnung과 그의 환과의 관계를 전혀 고려하지 않았다. 그러나 그의 환은 g-진수의 환을 연구하는데는 적절한 개념이었고, 또 separable ring, simple ring의 개념을 통하여 슈타이니츠가 이룬 체의 구조적 성격을 환에 대하여도 연구하였다. 또 1916년의 논문 [18]에서 현재 사용하고 있는 환과 거의 비슷하게 환을 정의하였으나, 그는 가환환만 취급하고 여전히 유리정수 환은 그의 환이 되지 않았다. 1921년까지는 대수학에 대한 연구를 하다가, 잘 알려진 대로 그의 관심은 집합론으로 바뀌어 환에 대한 이론의 발전은 크룰(Krull, 1899-1970)([26], [27], [28])과 뇌터에 의하여 정립된다.

2. 아이디얼의 역사

아이디얼은 대수적 정수의 유일 소인수분해(Unique Factorization Theorem)의 문제에서 시작된다.

자연수의 소인수분해의 문제, 즉 산술의 기본 정리(Fundamental Theorem of Arithmetic)는 유클리드의 **원론**(Elements, Book VII-IX)에서 이미 다루어지고 있지만, 완전한 증명은 가우스의 [19]에서 처음 나타난다. 그는 유리정수를 확장하여 대수적 정수에 대한 소인수분해의 문제를 다루는데, 특히 상반법칙(reciprocity law)에 대한 연구를 하면서 대수적 정수의 소인수분해의 문제를 다루어 1832년에 그 결과를 출판한다. 그러나 이차상반법칙(law of reciprocity for quadratic residues)은 이미 1796년에 증명이 되었고, 이를 위의 [19]에 포함시켰다. 그리고 특별한 경우에 대한 사차상반법칙(law of reciprocity for biquadratic residues)을 1832년에 출판한다. 상반법칙에 대한 자세한 내용은 [36]을 참고한다. 이 문제는 라그랑주(Lagrange, 1736-1813), 오일러(Euler, 1707-1783) 등에 의하여 연구되었고, 1798년 르장드르(Legendre, 1752-1833)가 오류가 포함된 증명을 하였다. 가우스는 $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi : a, b\in\mathbb{Z}\}$를 도입한다. 이를 가우스 정수라 부른다. 사차상반법칙은 1844년에 아이젠슈타인(Eisenstein, 1823-1852)에 의하여 증명이 된다[14]. 이때 가우스 정수의 소인수분해정리가 그의 증명에 가장 중요한 도구로 쓰였다. 가우스는 삼차상반법칙(cubic reciprocity law)을 위하여 $a+b\rho$ ($\rho^3=1$, $\rho\neq 1$)의 형태의 수를 생각하여 연구하였는데 이를 출판하지는 않았다. 야코비는 1827년에 이 문제를 위하여 $a+b\sqrt{-3}$의 형태의 수를 생각하고, 또 고차 상반법칙을 위하여, 5차, 8차, 12차 원분정수(cyclotomic integer)의 소인수분해를 연구하였다. p차 원분정수는 $\theta^p=1$, $\theta\neq 1$인 복소수에 대하여 $\mathbb{Z}[\theta]=\{a_0+a_1\theta+\cdots+a_p\theta^{p-1}: a_0, a_1, \cdots, a_p\in\mathbb{Z}\}$의 원소를 뜻한다. 쿠머(Kummer, 1810-1893)는 원분정수의 소인수분해를 연구하였는데, $p<23$일 때만 유일 소인수분해정리가 성립하고 $p=23$에 대하여는 유일 소인수분해정리가 성립하지 않음을 1844년에 출판하였다[30]. 따라서 그의 주목적인 상반법칙이 성립하지 않게 되므로 이 문제를 해결하기 위하여 1846년에 ideal prime number라는 개념을 도입하고, 1847년에 이를 발표한다[31]. 임의의 원분정수 환에서 그는 ideal prime factor의 개념을 도입하고 이를 이용하여 나누어 떨어짐을 다음과 같이 정의한다. "m divides n if and only if every prime factor contained in m is also contained in n with at least the same multiplicity." 이 개념을 이용하여 원분정수의 유일 소인수분해정리를 증명할 수 있었다.

데데킨트는 쿠머의 결과를 접하고 강한 인상을 받았으나 한편 그다지 만족스러워 하지는 않았다. 개념적으로 완벽하지 못하고 또 일반적이지도 못하였다. 그래서 그는 쿠머의 결과를 개념적으로 이해하려고 아이디얼을 도입하게 된다.

전술한 1871년에 출판된 디리클레-데데킨트의 강의록 제 10증보판에서 대수적 정수에 대

한 성질을 조사하고, prime integer, relative prime integer의 개념을 도입한다. 우선 유리정수 Z에서 주아이디얼(principal ideal) nZ과 같이 정수의 domain에서 주아이디얼의 성질을 개념화한다. 즉 정수 δ에 대하여 그의 배수들로 이루어진 i(δ)는 다음을 만족한다.

(a) If α and β both belong to i(δ), then both $\alpha+\beta$ and $\alpha-\beta$ must also belong to i(δ).

(b) If β belongs to i(δ) and x is any integer in the domain considered, then βx must also belong to i(δ).

데데킨트는 위의 (a), (b)를 만족하는 집합을 아이디얼이라 정의한다.

이 성질은 i(δ)뿐 아니라, 쿠머가 정의한 원분정수에서 ideal factor에 의하여 나누어 떨어지는 정수들의 집합도 (a), (b)를 만족하게 된다. 따라서 쿠머가 정의한 배수도 데데킨트의 아이디얼을 통하여 이해할 수 있게 된다.

확대체와 반대로 두 아이디얼 A, B 사이에 A $\subseteq$B일 때 A를 B의 배수, B를 A의 약수로 정의한다. 따라서 아이디얼 사이의 배수 약수 문제는 연산과 상관없이 정의되고 다만 부분집합으로 정의되고 있다는 사실은 대단히 중요한 사건이 되었다. 또 데데킨트는 아이디얼에 의하여 정의되는 congruence를 생각하고 상환을 구성하였다. 또 두 아이디얼 A, B에 대하여 A $\cap$B, A+B={a+b : a $\in$A, b $\in$B}를 각각 A, B의 l.c.m., g.c.d로 정의하였는데 이는 후일 그가 격자(lattice)를 정의하게 되는 동기가 되었다. 그는 소아이디얼(prime ideal)을 극대아이디얼(maximal ideal)로 정의한다. 실제로 데데킨트는 아이디얼 P가 소아이디얼이기 위한 필요충분조건이 P는 전체 아이디얼이 아니고 $\alpha\beta\in$P이면 $\alpha\in$P이거나 $\beta\in$P, 즉 현재의 소아이디얼임을 증명하였다. 그는 모든 소아이디얼이 극대아이디얼인 domain만 취급하였다(see Dedekind domain in [36]). 또 그의 입장으로 보아 극대아이디얼이 훨씬 더 자연스러운 개념임을 배수와 약수로 이해하면 곧 알 수 있을 것이다. 그는 이 개념을 이용하여 데데킨트 domain의 아이디얼에 대한 유일 소인수분해정리가 성립함을 보였다. 따라서 쿠머의 결과가 완전히 아이디얼의 개념으로 개념적으로 완벽하게 정리되었다. 그 후, 두 아이디얼 A, B에 대하여, A, B의 곱 (product) AB를 { $\sum a_kb_k$: $a_k\in$A, $b_k\in$B}로 정의하고, A가 B의 배수, 즉 A $\subseteq$B이기 위한 필요충분조건은 A=BR인 아이디얼 R이 유일하게 존재함을 증명함으로 포함관계에 의한 배수의 정의가 자연스러운 곱의 정의와 일치함을 보였다. 불행하게도 데데킨트의 아이디얼 이론은 거의 아무런 반응을 얻지 못하였다. 그가 1876년에 립쉬츠(Lipschitz, 1832-1906)에게 보낸 편지에서 그의 아이디얼 이론에 관심을 표시한 사람은 베버와 립쉬츠뿐이라고 적었다. 립쉬츠의 중재로 1876년에 Bulletin des sciences mathématiques에 그의 이론을 불어로 출판할 것을 요청 받아서 우선 서론 부분을 출판하고 이어서 1877년에 나머지 부분을 출판한다([4], [5]). 립쉬츠는 데데킨트에게 이론에 대한 약간의 수

정을 요구하지만 데데킨트는 이를 받아들이지 않았다. 실제로 아이디얼 이론을 정립하는 데 그는 거의 20년 동안 열심히 노력하였다. 디리클레-데데킨트 강의록의 개정판이 1879년에 출판될 때, 그는 아이디얼 이론을 대폭 수정한다. 우선 소아이디얼에 대하여 다음을 얻는다. "If a product of ideals (or of numbers) is divisible by a prime ideal P then at least one of the factors is divisible by P." 그리고 singular ideal(an ideal is called singular if it is divisible by a single prime ideal)의 개념을 도입하고, 다음을 증명하였다.

Every ideal that does not contain the number 1 is either a singular ideal or it may be represented in a unique way as a product of singular ideals, which are, naturally, relatively prime.

또 1871년에는 환을 정확히 밝히지 않은 채 아이디얼을 정의하였지만, 1879년에는 환을 전술한대로 Ordnung의 개념을 도입하고 이 위에서 아이디얼을 정의한다. 물론 유일 소인수 분해정리도 포함되어 있는데, 그의 아이디얼에 대한 관점은 대수적 정수의 유일 소인수분해를 이해하기 위한 도구이지, 아이디얼 자체의 연구가 중요한 것은 아니었다. 후에 뇌터가 아이디얼 자체를 연구할 때까지 이 관점은 변하지 않는다.

1894년에 출판된 디리클레-데데킨트 강의록의 부록에 다시 데데킨트는 아이디얼 이론을 포함시킨다. 전과 달리 이 판에서는 아이디얼보다 모듈(=복소수체의 부분군)들에 대하여 아이디얼과 같이 l.c.m.과 g.c.d.를 정의하고 이들이 모듈라 격자(modular lattice)가 됨을 보인다. 또 모듈의 Ordnung을 이용하여 아이디얼을 모듈의 특별한 경우, 즉 모듈의 Ordnung이 주어진 체의 모든 정수가 되는 경우로 특성화함으로, 아이디얼을 모듈의 이론에 종속시켰다. 그리고 finite module, 즉 finitely generated module이 ascending chain condition(a.c.c.)을 만족함을 보였다. 또 아이디얼의 chain을 생각하여, 대수적 정수는 환을 이루고, 대수적 정수를 계수로 하는 다항방정식의 근은 다시 대수적 정수임을 밝혔다.

이상에서 데데킨트의 아이디얼에 관한 관점이 계속해서 바뀌고 있음을 알 수 있다. 즉 원소의 성질보다 집합의 성질을 통하여 구조를 밝히고, 개념화의 작업을 계속하여 진행하고 있다([7], [8], [9], [10], [11]). 1894년 은퇴 후에도 그의 개념화는 계속되는데, 모듈과 아이디얼의 격자를 개념화하여 모듈라 격자, 분배 격자의 개념을 도입한다(see [50]).

데데킨트의 아이디얼, 모듈 등과 같은 개념들은 전술한대로 큰 반응을 얻지 못하였다. 그 당시 데데킨트의 연구 결과에 대한 반응이 단적으로 나타난 것은 베버와 프로베니우스 사이에 오간 편지를 통하여 알 수 있다. 1893년 베버가 그의 Lehrbuch der Algebra를 집필하겠다고 하였을 때, 프로베니우스는 다음과 같이 베버에게 주의를 주었다.

"Your announcement of a work on algebra makes me very happy …. Hopefully you will follow Dedekind's way, yet you avoid the highly abstract approach that he so eagerly pursues now. His newest edition (of the Vorlesungen) contains so many beauty ideas … but his permutations are too flimsy, and it is indeed unnecessary to push the abstraction so far. I am therefore satisfied, that you write the Algebra and not our venerable friend and master, who has also once considered that plan."

그의 업적은 매우 천천히 다른 수학자들에게 받아들여졌지만 그의 개념화의 방법 혹은 공리적 방법이 대수학의 발전의 기틀을 마련한 것은 틀림이 없다. 그 후 힐베르트의 대수적 수론의 연구[22]를 통하여 데데킨트의 결과는 뇌터로 연결이 된다.

뇌터의 아버지인 막스 뇌터(Max Noether, 1844-1921)의 제자인 라스커(Lasker, 1868-1941)와 영국의 수학자 매콜리(Macaulay, 1862-1937)는 다항식환의 primary 아이디얼로의 분해에 대한 정리를 각각 1905년, 1913년에 출판하였다([32], [34]). 수체계와 다항식환의 아이디얼 이론은 뇌터에 의하여 통일된다.

3. 뇌터와 아이디얼

뇌터(Emmy Noether)는 1882년 3월 23일 독일 에를랑겐(Erlangen)에서 태어나 그 곳에서 주로 교육을 받았다. 그의 관심은 산수, 영어, 불어, 독어, 무용 등 다양하였으나 처음에는 어학 교사가 되고 싶어 1900년 영어 교사 자격증을 받았으나 생각이 바뀌어서 수학을 공부하기로 결정하고 그의 아버지가 교수로 있는 에를랑겐 대학에서 준비하여 1903년 입학자격시험에 합격하고, 괴팅겐 대학으로 가서 1903-1904년에 걸쳐 한 학기동안 블루멘탈(Blumenthal, 1872-1944), 힐베르트, 클라인(Klein, 1849-1925), 민코프스키의 강의를 듣고, 1904년 에를랑겐 대학에 입학하여 1907년에 고르단(Gordan, 1837-1917)의 지도 아래 박사학위를 받는다. 그 후 그의 아버지를 도와 연구하다가 1915년에 힐베르트와 클라인의 초청으로 괴팅겐 대학으로 간다. 여성이라는 이유로, 대학에서 강의할 수 있는 자격을 얻는데 오랫동안 논쟁이 있었다. 1915년에 뇌터가 이론물리에 대한 논문을 발표하였는데, 아인슈타인(Einstein, 1879-1955)이 힐베르트에게 그 결과의 우수함을 편지로 알려 왔다고 한다. 1920년 a.c.c.에 대한 결과를 발표하면서부터[41] 그는 아이디얼 이론과 대수의 구조적인 연구에 기여한다. 괴팅겐에 있는 동안 그는 판 데르 베르덴뿐만 아니라 하세(Hasse, 1898-1979), 브라우어(Brauer, 1901-1977), 크룰, 알렉산드로프(Alexandroff, 1896-1985), 차리스키(Zariski, 1899-1986) 등과 공동연구를 하였다. 바일은 "In my Göttingen years, 1930-1933, she was without doubt the strongest center of mathematical activity there, considering both the *fertility of her scientific research program and her influence upon a large circle of pupils.*"라고 전한다. 뇌터의 제자로는 듀링(Deuring, 1907-1984), 피팅(Fitting, 1906-1938), 그렐(Grell, 1903-1974), 레비츠키(Levitzki, 1904-1956), 쇼다(Shoda, 1902-1977), 실링(Shilling, 1911-1973), 위트(Witt, 1911-) 등이 있다. 1933년 나치에 의하여 괴팅겐 대학에

서 쫓겨 난 뇌터는 미국의 Bryn Mawr 대학의 방문교수가 되고, Princeton의 Institute for Advanced Study 에서도 강의를 하였다. 그는 1935년 4월 14일에 Bryn Mawr에서 죽었다.

판 데르 베르덴의 Modern Algebra가 전술한 대로 뇌터의 영향을 가장 많이 받은 것은 틀림없지만, 아르틴(Artin, 1898-1962), 슈라이어(Schreier, 1901-1929), 폰 노이만(von Neumann, 1903-1957) 등의 영향도 많이 받았음을 그의 책의 내용에서 알 수 있다. 뇌터가 구조적 접근의 창시자중 가장 중요한 자리를 차지하게 된 이유는 그의 아이디얼에 대한 접근에서 찾아 볼 수 있다. 피셔(Fischer, 1875-1959)와의 서신에 의하여 뇌터는 1917년에 이미 모듈과 아이디얼에 관심을 보인 것을 알 수 있지만, 첫 번째 결과는 1920년 슈마이들러(Schmeidler, 1890-1969)와의 공동논문으로 미분작용소(differential operator)에 대한 논문이었다[41]. 당시에는 거의 관심을 끌지 못하였으나 지금 우리가 볼 때 이것이 후에 뇌터와 그와 함께 연구한 학자들에 의해서 발전을 하게 된 구조적인 대수학의 모태가 되었다. 이 논문에서 뇌터와 슈마이들러는 다항식이 기약다항식으로 유일 인수분해 되는 성질을 편미분작용소(partial differential operator)의 분해로의 확장을 시도하면서 지금까지의 수나 다항식의 환, 혹은 그들의 상환들이 모두 가환환이지만, 비가환환(noncommutative ring)을 처음으로 연구하게 되고, 또 아이디얼도 two-sided 아이디얼에서 one-sided ideal(einsetige Moduln)을 도입할 수밖에 없게 되었다. 여기서 정의된 left-와 right-ideal의 좌우 표현은 이때까지 대수적인 개념으로는 처음으로 나타나는 것이다. 한쪽 아이디얼의 인수분해와, 대응되는 상군의 인수분해의 관계에 초점을 맞춘 이 논문에서 처음으로 서로 다른 대수적인 구조를 비교하게 된다. 또 이 논문에서 그들은 개념화의 기호나 추상화하는 방법론적 접근에서 데데킨트를 따르고 있지만 수학의 세 가지의 다른 분야, 즉 작용소(operators), 아이디얼과 군에 대해서 분석하고, 서로의 관계를 논하여 그들 사이의 구조를 비교하고 있다. 그러나 아직도 데데킨트의 개념에서와 마찬가지로 주된 개념이 추상적이고 공리적인 대상(construct=category)은 아니고, 보다 구체적인 수학의 대상으로 설명된다. 비가환성을 제외하고는 여전히 수체계에서 크게 벗어나지 않고 있다.

추상대수의 구조론이 발전하려면 위의 전통적인 생각이 바뀌어서 구체적인 수학의 대상에서 벗어나 수학적 지식을 전체로 통합하고 일반화하여야 하는데, 이는 뇌터가 1921년에 발표한 Idealtheorie in Ringbereichen[37]으로부터 비롯된다. 이때부터 그는 대수학의 추상화를 위하여 많은 중요한 업적을 이루어 내었다. 뇌터는 추상적인 환의 개념에 기본을 두고 대수적 구조를 통합하였는데, 환의 개념은 당대의 수학자들에게는 매우 낯선 것이었으며 따라서 뇌터는 그의 논문에서 아주 기초적인 성질까지도 증명을 하여야만 하였다. 그러나 뇌터도 이 논문을 발표할 때는, 세부까지 증명을 하면서도 환의 개념이 대수학 전체의 유용한 개념으로 자각되어진 것 같지는 않다. [37]에서 뇌터는 서두에 이 논문의 목적을 다음과 같이 밝히고 있다.

"The aim of the present work is to translate the factorization theorems of the rational integer numbers and of the ideals in algebraic number fields into ideals of *arbitrary* integral domains and domains of *general* rings."

뇌터는 이 목적에 따라서 정수의 소인수분해의 네 가지 서로 다른 형태를 연구한다. 데데킨트가 했던 것처럼 "정수"라는 용어를 "정수로 생성되는 아이디얼"로, 대수적 정수에서 소인수를 primary 아이디얼로 대치하여 정리를 이끌어 낸다. 이렇게 아이디얼을 통한 접근으로 간단하고 기본적인 인수분해에 대한 구조를 이해할 수 있게 되어 뇌터가 대수구조의 통합적 방법의 길을 열 수 있게 된다.

뇌터의 환의 정의는 프랜켈의 정의에서 불필요한 조건을 버리고 추상적인 공리를 써서, 오늘날까지 쓰이는 것과 비슷한 환을 정의한다. 그러나 [37]의 논문에는 유한성 조건(Endlichkeitbeddingung)을 만족하는 가환환, 즉 모든 아이디얼이 유한기저를 갖는 가환환에 대하여 연구한다. 뇌터는 논문의 시작부터 유한성조건과 a.c.c.(ascending chain condition)가 동치임을 증명하고, a.c.c.는 데데킨트와 라스커의 정의와 같지만 그들은 보다 제한된 방법으로 사용했음을 밝히고 있다. 특히 수론이나 다항식에 대한 이론에 쓰인 a.c.c.를 그의 추상적 아이디얼 이론에 적용시키는 과정은 구체적인 경우보다 개념화를 통하여 대수를 구조적으로 접근하는데 필요한 결정적인 전환점이 되었다.

또한 뇌터는 소아이디얼이 기약이 됨을 보이는데, 이것 또한 뇌터가 이룬 한 업적으로 생각된다. 쿠머의 이론 중에 기약수(irreducible number)가 소수가 아닌 영역이 있었는데 이것이 동기가 되어 데데킨트가 대수적인 수의 이론으로 일반화하였고, 이런 관점에서 보면, 뇌터의 연구는 기약 아이디얼, 소아이디얼, primary 아이디얼, 서로 소인 아이디얼 등으로의 더 높은 차원의 일반화를 얻어냈다고 볼 수 있다. 서로 소인 아이디얼을 이용한 아이디얼의 분해에 대하여 Ore(1899~1968)는 추상대수의 기초에 대한 연구([42], [43])에서 이 관계를 자세히 설명하고 중요성을 강조하고 있다.

[37]에서 다룬 네 가지 형태의 소인수 분해는 다항식의 영역(domain of polynomials)에 대하여는 그 당시 이미 알려진 것들이다. 그러나 뇌터 자신이 논문에서 밝힌 대로, 이미 존재했던 증명은 모든 다항식이 기약다항식의 곱으로 유일분해 된다는 사실에 의존하는 것이고 이는 실수체와 복소수체의 성질로부터 바로 유도되는 다항식의 성질에 의존하는 것이나, 뇌터의 방법에서는 가장 중요한 결과로 아이디얼의 분해는 실제로 다항식의 이런 성질과는 독립적으로 이루어지고, 이는 완전히 구조적인 성질(structural property)이라고 할 수 있는 a.c.c.에 의하여 이루어짐을 보였다. 더구나 뇌터는 그 당시까지는 부분적이고 조직적이지 못한 방법으로 설명되어 온 분해의 유일성을 새로운 방법으로 분명히 증명하고 있다. 또 이 과정에서 전통적인 대수학은 수의 체계를 중심으로 발달하여 왔지만, 뇌터는 수의 체계와 추상적으로 정의되는 체계를 동등한 입장으로 대하고 있음을 알 수 있다. 예를 들면 판 데르 베르덴이 뇌터의 논문 [37]은 다항식의 이론으로 접근하는 힐베르트의 방법의 의미 있는 계기라고 한 것이 맞는 말이기는 하지만, 근본적으로 힐베르트와 뇌터의 입장 차이는 대단

히 크다. 즉, 힐베르트나 라스커는 특정한 대수적 체계가 주어지면, 유한성 조건을 증명하여 사용하지만, 뇌터는 유한성조건을 만족하는 대수적 체계로부터 문제를 접근하고 있다. 또, 논문 [37]에서 뇌터는 비가환환에 대한 분해를 생각하여 [41]에서 이미 취급했던 비가환환에서의 아이디얼의 분해를 추상적인 용어로 재구성하면서 처음으로 현재의 모듈(module over a ring)을 정의한다. 여기서 환의 가환성이 없이 모듈의 분해를 연구하면서 뇌터는 분해의 이론의 중요성을 점점 강하게 인식하게 되고, 특히 분해의 성질이 환의 부분영역의 포함관계로 연결되어 그 성질이 나타남을 인지하고, 따라서 다음 연구([38], [39]. [40])로 연결되어 대수의 구조적 연구에 기여한다.

1926년 뇌터는 분해의 문제를 [37]에서보다 더 공리적인 틀에 맞게 정리한 논문 [38]을 발표한다. 그는 지금 우리가 데데킨트 domain이라고 부르는 환을 다섯 개의 공리로 정의하는데, 두 개는 chain condition에 관한 것이고 세 개는 곱에 관한 것이어서 1935년에 크룰이 쓴 아이디얼론에서는 이를 "multiplicative theory of ideals"라고 했다[29]. 아이디얼의 곱에 대한 이론은 전술한 데데킨트의 아이디얼의 곱에 대한 방법으로부터 바로 영향을 받은 것이다. 그는 분해에 대한 증명을 하기 전에 각주에서 환의 추상적인 정의는 주어진 특정한 성질을 가지는 두 개의 연산과 congruence를 가지는 집합으로 정의한다. 뇌터의 설명을 보면 프랜켈의 환에 대한 논문을 인용한 것 같은 감이 강하게 들지만 뇌터의 관점으로는 이 congruence가 환의 구조를 밝히는데 중요한 역할을 한다고 본 것 같다. 또 상대수를 통하여 동형정리(isomorphism theorem)를 추상적으로 다루었다. 이는 이미 군, 환에 대하여 알려져 있었지만, 그는 임의의 대수계에서 성립함을 보였다. 뇌터는 다섯 개의 공리들에서부터 얻어지는 결과를 통하여 환의 구조 및 아이디얼의 구조를 밝히고 있다. 또 이 논문에서 선택공리(axiom of choice)와 정렬원리(well-ordering principle)를 사용하고, Jordan-Hölder 정리의 일반형을 증명한다.

뇌터의 추상 아이디얼론은 대수의 새로운 구조적인 이론을 만드는 중요한 전환점이 된다. 한편으로, 그의 연구는 대수적 수론에 기반을 가지는 데데킨트의 방법에서 출발했으므로, 힐베르트의 invariants와 대수적 수론의 연구와, 라스커와 매콜리의 연구에 충분히 가까워서, 그 직접적인 뿌리와 동기가 바로 보여질 수 있다. 데데킨트의 이론과 방법을 전적으로 따라서 연구를 했음에도 뇌터가 데데킨트와 다른 점은 그 결과의 더 큰 일반화와 더 분명한 공리적인 표현에 있다. 데데킨트가 수의 모임이나 함수의 모임의 개념에 기초하는 분해정리의 일반화로 문을 열었고, 뇌터는 한 걸음 더 나아가 수에 의하여 제한되는 틀을 버리고 추상환의 추상적인 원소의 용어로 데데킨트의 개념을 확장하였다. 그는 다음과 같이 수학에서 구체적 접근과 추상적 접근사이의 관계에 대하여 말하였다.

"In mathematics, as in knowledge of the world, both aspects are equally valuable; the accumulation of facts and concrete constructions and the establishment of general principles which overcome the isolation of each fact and bring the factual knowledge to a new stage of axiomatic understanding."

뇌터가 아이디얼 이론에서 사용되고 있는 방법론과 또 그 결과를 통하여 많은 수학자들에 영향을 줌으로 대수학은 대수적 구조의 연구라는 방향으로 발전할 수 있었다.

4. 결론

20세기 수학의 가장 큰 특징은 수학을 구조적으로 접근하는 것인데, 이는 19세기와 20세기에 걸쳐서 갈루아 이론으로부터 파생되는 새로운 방법론의 도입과 이에 따르는 군, 체 등의 추상적 개념의 도입, 칸토어(Cantor, 1845-1918), 데데킨트 등에 의하여 시작되는 집합론의 방법이 수학에 이입되고, 힐베르트 등에 의하여 공리화, 형식화가 이루어지고, 마지막으로 대수적 수론과 다항식환의 소인수 분해의 체계적인 연구가 시작됨으로 이루어진다. 다른 수학의 분야에서도 여러 가지 시도가 있었으나, 대수학 분야에서 이 방향으로 전환하는데 가장 중요한 역할을 한 아이디얼 이론은 1870년대에 데데킨트가 도입한 후 50여년이 지나서 구조적 입장을 택할 수 있게 되었다. 이는 역사적으로 그 당시의 수학자들의 관심을 갖고 있는 분야에 따라서 방법론, 대응되는 개념의 도입이 결정되므로 긴 기간이 필요하게 되었다. 또 데데킨트와 같이 주위의 학생이나 그의 학파가 형성되지 않으므로 그의 획기적인 연구 결과가 반응을 얻지 못하였지만, 뇌터는 여성수학자로 대학에 취직하는데는 어려움이 많았지만 그의 주위에 항상 많은 수학자들과 학생들이 같이 연구하는 분위기를 형성한 것도 추상화의 길을 여는데 중요한 역할을 하였다. 수학의 발전에 연구 결과 또는 내용도 중요하지만, 주위 환경과 수학자의 능력도 매우 중요한 인자가 됨을 보여준다.

참고 문헌

1. Bourbaki, N., *Eléments de Mathématique*, 10 vol., Hermann, Paris, 1939.
2. Corey, L., *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser, Basel, 1996.
3. Dedekind, R., *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg. Braunschweig, 1872.
4. Dedekind, R., "Sur la théorie des nombres entiers algébriques," *Bulletin des sciences mathématiques et astromomiques* 11(1876), 278-288.
5. Dedekind, R., "Sur la théorie des nombres entiers algébriques," *Bulletin des sciences mathématiques et astromomiques* 12(1877), 17-41, 69-92, 144-164, 207-248.
6. Dedekind, R., *Über die Anzahl der Ideal-Classen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers*, Braunschweig, 1877.

7. Dedekind, R., *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*, Braunschweig, 1879.
8. Dedekind, R., *Was sind und was sollen die Zahlen*? Vieweg. Braunschweig, 1888.
9. Dedekind, R., *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*, in Dirichlet 1894, 434-657.
10. Dedekind, R., "Über die Begründung der Idealtheorie," *Nach. König, Ges. Wiss. Göttingen*(1895), 106-113.
11. Dedekind, R. and H. Weber, "Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen," *J. für die reine und angewandte Mathematik* 92(1882), 181-290.
12. Dieudonné, J., "The work of Nicholas Bourbaki," *Amer. Math. Monthly* 77(1970), 134-145.
13. Dirichlet, P. G. L., *Vorlesungen über Zahlentheorie* (4th ed.), edited and with supplements by R. Dedekind(1st ed. 1863; 2nd ed. 1871; 3rd ed. 1879), Braunschweig, 1894.
14. Eisenstein, F. G., "Lois de reciprocite," *J. für die reine und angewandte Mathematik* 28(1844), 53-67.
15. Ewald, W., *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics*, Vol. I, II, Clarendon Press, Oxford, 1996.
16. Fraenkel, A., "Axiomatische Begründung von Hensels p-adischen Zahlen," *J. für die reine und angewandte Mathematik* 141(1912), 43-76.
17. Fraenkel, A., "Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen," *J. für die reine und angewandte Mathematik* 145(1914), 139-176.
18. Fraenkel, A., *Über gewisse Teilbereiche und Erweiterungen von Ringen*, Teubner, Leipzig, 1916.
19. Gauss, C. F., *Disquisitiones Arithmeticae*, Leipzig, 1801.
20. Hensel, K., "Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen," *J. Deutschen Math. Veriningung* 6(1889), 83-88.
21. Hensel, K., *Zahlentheorie*, Göschensche Verlag, Leipzig, 1913.
22. Hilbert, D., "Die Theorie der algebraischen Zahlkörper (Zahlbericht)," *J. Deutschen Math. Veriningung* 4(1897), 175-546.
23. Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie,* Teubner, Leipzig, 1899.
24. Hölder, O., "Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen," *Math. Annalen* 34(1889), 26-56.
25. Kronecker, L. "Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen," *Monat. BA*(1853), 365-374.
26. Krull, W., "Algebraische Theorie der Ringe I," *Math. Annalen* 88(1922), 80-122.
27. Krull, W., "Algebraische Theorie der Ringe II," *Math. Annalen* 91(1923), 1-42.

28. Krull, W., "Algebraische Theorie der Ringe III," *Math. Annalen* 92(1924), 183-213.
29. Krull, W., *Idealtheorie*, Ergebnisse der Mathematik, Bd. 4, Springer, Berlin, 1935.
30. Kummer, E. E., *De numeris complexis, qui radicibus unitatis et numeris integris realibus constant,* Grat. Univ. Breslau, 1844.
31. Kummer, E. E., "Zur Theorie der complexen Zahlen," *J. für die reine und angewandte Mathematik* 35(1847), 319-326.
32. Lasker, E., "Zur Theorie der Moduln und Ideale," *Math. Annalen* 60(1905), 20-115.
33. Loewy, A., *Grundlagen der Arithmetik*, Veit, Berlin, 1915.
34. Macaulay, E. S., "On the resolution of a given modular system into primary systems including some properties of Hilbert numbers," *Math. Annalen* 74(1913), 66-121.
35. Minkowski, H., "Peter Gustav Lejeune Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik," *J. Deutschen Math. Veriningung* 14(1905), 149-163.
36. Mollin, R. A., *Algebraic Number Theory*, Chapman & Hall/CRC, New York, 1999.
37. Noether, E., "Idealtheorie in Ringbereichen," *Math. Annalen* 83(1921), 24-66.
38. Noether, E., "Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionkörper," *Math. Annalen* 96(1926), 26-61.
39. Noether, E., "Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie," *Math. Z.* 30(1929), 641-692.
40. Noether, E., "Nichtkcommutative Algebren," *Math. Z.* 37(1933), 514-541.
41. Noether, E. and W. Schmeidler, "Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differenzial- und Differenzausdrücken," *Math. Z.* 8(1920), 1-35.
42. Ore, O., "On the foundations of abstract algebra, I," *Ann. Math.* 36(1935), 406-437.
43. Ore, O., "On the foundations of abstract algebra, II," *Ann. Math.* 37(1936), 265-292.
44. Steinitz, E., "Algebraische Theorie der Körper," *J. für die reine und angewandte Mathematik* 137(1910), 167-309.
45. van der Waerden, B. L., *Modern Algebra,* 2 vols., Springer, Berlin, 1930.
46. Weber, H., "Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie," *Math. Annalen* 43(1893), 521-549.
47. Weber, H., *Lehrbuch der Algebra,* Vol. 1, 1895, Vol. 2 1896, 2nd. ed. 1898-1899, Braunsweig.
48. Weyl, H., "Emmy Noether," *Scripta Math.* 3(1935), 200-220.
49. 홍성사, 홍영희, "Categorical Topology의 역사," *Historia Mathematica* 10(1997), No. 2, 11-23.
50. 홍영희, "격자론의 기원," *Historia Mathematica* 12(1999), No. 2, 15-23.
51. 홍영희, "初期 群論의 歷史," *Historia Mathematica* 13(2000), No. 2, 33-40.