Historia Mathematica Vol. 14, No. 2, 2001, 21-28

파인만 적분에 대한 소고

한양대학교 자연과학부 **장주섭**

Abstract

In this paper we introduce the Feynman integral which is one of the function space integrals. There are so many approaches to the Feynman integral. Here we treat the analytic Feynman integral and the operator-valued Feynman integral.

0. 서론

파인만(Feynman, 1918-1988)은 1965년 노벨 물리학상을 수상한 현대 이론 물리학의 거장이다. 그는 아인슈타인(Einstein) 이후에 가장 잘 알려진 과학자 가운데 한 사람임에도 불구하고 대중에게는 그리 잘 알려져 있지 않다.

그는 1918년 뉴욕 교외의 해변 조그만 마을인 파록커웨이(Far Rockaway)에서 태어났다. 그는 MIT(Massachusetts Institute of Technology)에서 학부 4년을 다녔으며, 1939년경 프린스턴(Princeton)대학원에 진학했다. 프린스턴에 있는 동안 원자폭탄을 만드는 맨해튼 프로젝트(Manhatton Project)에 참여했다. 1946년부터 1951년까지 코넬(Cornell)대학에서 물리학 교수로 근무하였으며, 1951년부터는 칼텍(California Institute of Technology)으로 옮겨 정년까지 교수로 근무하면서 소립자들이 충돌시 일어나는 여러 현상들을 활발히 연구하였다.

그가 코넬에 근무하던 1948년 발표한 논문 "비상대성 영자역학에 대한 시공간 접근"[4]에서는 함수공간에서 한 적분의 존재성을 가정하고, 이 적분이 양자역학에 있어 슈뢰딩거(Schrodinger) 방정식의 초기치 문제를 구하는 데 사용될 수 있음을 보였다. 이 적분을 파인만 적분(Feynman integral)이라 부르며 파인만의 논문은 수학과 물리학에 직접 또는 간접적으로 많은 영향을 주었다. 파인만 적분이 소개된 이후 많은 수학자 및 물리학자들이 이 적분에 관심을 가지고 이 적분을 수학적 이론으로 발전시키려고 노력하였다. 파인만의 정의는 수학적으로 엄밀하지 않았으며 그가 사용한 수학용어도 수학자들이 만족할 만큼 정확한 것은 아니었다.

파인만 적분을 정의하는 방법은 여러 가지 있다. 파인만 적분을 전공하는 학자가 n 명 있

으면 파인만 적분의 정의는 $2n$ 개 존재한다는 가설(?)이 있을 정도이다. 이론물리학, 수리물리학, 확률론, 작용소론, 편미분 방정식, 함수해석학 등 수학적 배경이 다른 여러 분야에서 이 적분에 접근하기 때문이다. 즉, 이 적분의 접근 방법에 따라, 파인만 해석적분, 파인만 수열적분, 파인만 작용소적분, 함수공간 작용소 적분 등이 있다.

필자는 본 논문에서 함수공간 적분들 가운데 하나인 파인만 해석적분(analytic Feynman integral)과 파인만 작용소 적분(operator valued Feynman integral)을 소개한다. 우리는 이들 적분을 정의시 해석접속이라는 개념이 중요한 역할을 함을 알 수 있다. 마지막으로 파인만 작용소 적분의 안정성 정리에 대하여 논하겠다.

1. 파인만 해석적분

이 절에서는 1960년 카메룬(Cameron, 1908-1989)이 해석접속이라는 개념을 이용하여 수학적으로 엄밀하게 다룬 파인만 해석적분(analytic Feynman integral)을 소개한다.

$T=[a,b]$일 때, $C(T)$를 T에서 정의된 연속함수들의 집합이라 하자.

$$C_0(T) = \{ x\in C(T) \mid x(a)=0 \} \tag{1.1}$$

을 위너(Wiener)공간, m을 $C_0(T)$ 위에서의 위너 측도라 하자.

모든 $\lambda > 0$에 대하여, 함수 F의 위너적분

$$J(\lambda) = \int_{C_0(T)} F(\lambda^{-\frac{1}{2}}x)\, dm(x) \tag{1.2}$$

이 존재한다고 하자. 반평면

$$C^{+} = \{\lambda\in \mathrm{C} \mid Re\,\lambda > 0 \} \tag{1.3}$$

에서 함수 $J^{*}(\lambda)$가 해석적(analytic)이고, 모든 양의 실수 λ에 대해서 $J^{*}(\lambda)=J(\lambda)$이면, $J(\lambda)$의 해석접속(analytic continuation) $J^{*}(\lambda)$를 함수 F의 매개변수 λ에 대한 위너 해석적분(analytic Feynman integral)이라 하고 다음과 같이 쓴다.

$$J^*(\lambda) \equiv \int_{C_0(T)}^{anw_\lambda} F(x)\ dm(x) \tag{1.4}$$

q가 0이 아닌 실수이고, 함수 F의 위너 해석적분 $J^*(\lambda)$가 Re λ > 0을 만족하는 모든 λ에 대하여, 존재한다고 하자. 다음 극한이 존재하면 그 극한을 함수 F의 매개변수 q를 갖는 파인만 해석적분(analytic Feyanman integral)이라 한다.

$$\int_{C_0(T)}^{anf_q} F(x) dm(x) = \lim_{\substack{\lambda \to -iq \\ Re\ \lambda > 0}} \int_{C_0(T)}^{anw_\lambda} F(x)\ dm(x) \tag{1.5}$$

1960년 카메룬이 처음으로 파인만 적분을 정의할 때는,

$$\int_{C_0(T)}^{anf_q} F(x) dm(x) = \int_{C_0(T)}^{anw_{iq}} F(x)\ dm(x) \tag{1.6}$$

로 정의하였다.

측도론에서 다루는 두 함수의 동치관계는 측도-a, e.의 개념을 사용한다. 왜냐하면, 측도-a. e.에서 같은 두 함수는 그 적분값이 같기 때문이다. 그러나, 측도-a. e.의 개념을 사용한 동치관계는 파인만 적분에서는 적합한 동치관계가 아니다. 따라서 우리는 새로운 개념인 척도 불변 가측성(scale-invariant measurability)를 필요로 하며 이 개념은 위너 측도 뿐만 아니라 파인만 적분에서도 필수적인 중요한 역할을 한다.

$C_0(T)$의 부분집합 A가 모든 α > 0에 대하여 αA가 위너 측도 가능한 집합이면, 집합 A를 척도 불변 가측집합(scale-invariant measurable set)이라 한다. 척도 불변 가측집합 N이 모든 α > 0에 대하여 $m(\alpha N)=0$이면, N을 척도 불변 영집합(scale-invariant null set)이라 한다.

어떤 성질 P가 척도 불변 영집합을 제외한 모든 $x \in C(T)$에 대하여 성립하면 P는 척도 불변 거의 모든 x (s-a.e. x) 에 대하여 성립한다고 한다. s-a.e. x에서 $F(x) = G(x)$일 때, $F \approx G$로 쓴다.

모든 λ > 0에 대하여, 위너 적분

$$\int_{C_0(T)} F(\lambda^{-\frac{1}{2}} x)\ dm(x) \tag{1.7}$$

이 존재한다는 가정은 F가 s-a.e.에서 정의되고, F의 척도불변 가측성을 요구하는 것이다.

구간 $[a,b]$의 분할이 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{2^n}=b$, $t_j=a+\frac{j(b-a)}{2^n}$ $(j=1,2,\cdots,2^n)$을 만족하고 $x\in C_0(T)$에 대해서

$$S_n(x)=\sum_{j=1}^{2^n}(x(t_j)-x(t_{j-1}))^2 \tag{1.8}$$

으로 놓자. 그리고 이 때 $a>0$에 대하여

$$C_a=\left\{x\in C_0(T)\ \middle|\ \lim_{n\to\infty}S_n(x)=a^2(b-a)\right\} \tag{1.9}$$

으로 놓자.

모든 x에 대하여,

$$F(x)=\chi_{C_a}(x)\ \ (a\neq 0),\ \ G(x)=0 \tag{1.10}$$

이라 하자. 그러면, 모든 $\lambda>0$에 대하여,

$$\int_{C_0(T)} G(\lambda^{-\frac{1}{2}}x)\ dm(x)\ =\ 0 \tag{1.11}$$

이므로 모든 $\lambda\in C^+$에 대하여

$$\int_{C_0(T)}^{anw_\lambda} G(x)\ dm(x)\ =\ 0 \tag{1.12}$$

이다. 따라서 모든 $q\neq 0$에 대하여

$$\int_{C_0(T)}^{anf_q} G(x)\ dm(x)\ =\ 0 \tag{1.13}$$

이다. 반면에 C_1에서 $F=0$이므로, $G=F$ m-a.e. 이다. 한편,

$$\int_{C_0(T)} F(\lambda^{-\frac{1}{2}}x)\ dm(x) = \begin{cases} 1 & (\lambda = \alpha^{-2}\text{인 경우}) \\ 0 & (\lambda \neq \alpha^{-2}\text{인 경우}) \end{cases} \tag{1.14}$$

이므로 (1.14)의 좌변 적분은 C^+ 에서 해석 확장을 갖지 못한다. 따라서 F의 위너 해석적분과 파인만 적분은 존재하지 않는다.

위의 예에서 알 수 있듯이 위너 측도-a.e.의 개념은 파인만 적분에서는 적절한 동치관계가 아니고 s-a.e.의 개념을 사용한 동치관계가 파인만 적분에서는 적절한 동치관계이다. 즉, $F \approx G$ 일 때, 두 함수의 위너 해석적분과 파인만 해석적분이 같음을 우리는 쉽게 알 수 있다[7].

카메룬은 양자역학에서 취급하는 함수

$$\exp\left\{ -\frac{i}{\hbar}\int_a^b V(\lambda^{-\frac{1}{2}}x(s)+v)\ ds \right\} \tag{1.15}$$

을 일반적인 함수 $F(\lambda^{-\frac{1}{2}}x+v)$로 대치해서 위너 적분

$$\int_{C_0(T)} F(\lambda^{-\frac{1}{2}}x+v)\psi(\lambda^{-\frac{1}{2}}x(b)+v)\ dm(x) \tag{1.16}$$

을 가지고 파인만 적분을 정의하고, 이 적분이 슈뢰딩거 방정식

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = -\frac{i}{\hbar}\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + V(u)\Psi(s,u) \right\} \tag{1.17}$$

의 해가 됨을 보였다. 여기서, $\hbar$는 플랑크(Planck) 상수를 2π로 나눈 수이고, V는 위치 에너지 함수이며 $\Psi(s,u)$는 확률진폭(probability amplitude)이며 m은 질량이다.

슈뢰딩거 방정식 (1.17)에서 m을 $i\hbar\lambda$로 대치하면 열방정식(heat equation)을 얻는다. 각 $\lambda > 0$에 대하여 이 열방정식의 해는 다음의 위너 적분으로 표시할 수 있다.

$$\Psi_\lambda(b,v) = \int_{C_0(T)} \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar}\int_a^b V(\lambda^{-\frac{1}{2}}x(s)+v)\,ds \right\} \psi(\lambda^{-\frac{1}{2}}x(b)+v)\ dm(x) \tag{1.18}$$

이 식을 파인만-칵 공식(Feynman-Kac formula)이라 한다.

2. 파인만 작용소 적분

이 절에서는 함수공간 적분인 파인만 작용소 적분을 소개하고 이 적분의 안정성 정리를 논하고자 한다. $C(T)$를 $T=[a,b]$에서 정의된 연속함수들의 집합이라 하자.

$$C_0(T)=\{\ x\in C(T)\ |\ x(a)=0\ \} \tag{2.1}$$

을 위너 공간, m을 $C_0(T)$ 위에서의 위너 측도라 하자. ∞에서 함수값이 0인 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 복소수값을 갖는 연속함수들의 집합을 $C_0(\mathbb{R})$이라 하자.

F는 $C(T)$ 위에서 정의된 복소수값을 갖는 범함수이다. $\lambda>0$, $\Psi\in L_1(\mathbb{R})$과 $\xi\in\mathbb{R}$에 대하여,

$$(I_\lambda(F)\Psi)(\xi)=\int_{C_0(T)}F(\lambda^{-\frac{1}{2}}x+\xi)\,\Psi(\lambda^{-\frac{1}{2}}x(b)+\xi)\ dm(x) \tag{2.2}$$

로 놓자. $I_\lambda(F)$가 Ψ의 함수로서 $C_0(\mathbb{R})$에 속하면 $I_\lambda(F)$는 $\mathcal{L}\equiv\mathcal{L}(L_1(\mathbb{R}),C_0(\mathbb{R}))$의 원소가 되고, 이 때 함수공간 작용소 적분 $I_\lambda(F)$가 존재한다고 한다.

$I_\lambda(F)$가 $\lambda\in(0,\lambda_0)$에서 존재하며, $(0,\lambda_0)$에서는 함수값이 같으며

$$C^+_{\lambda_0}=\{\lambda\in C\ |\ Re\,\lambda>0,\ |\lambda|<\lambda_0\ \} \tag{2.3}$$

에서 해석적(analytic)인 $\mathcal{L}$ 함수가 존재하면 이를 $I^{an}_\lambda(F)$로 나타내고, 함수 F의 λ에 관한 위너(Wiener) 작용소 적분이라 한다.

이제 q가 $|q|<\lambda_0$을 만족하는 실수라 하자. 모든 $\Psi\in L_1(\mathbb{R})$에 대하여 $C^+_{\lambda_0}$ 안에서 $\lambda\to -iq$일 때, $I^{an}_\lambda(F)\Psi$의 약극한(weak limit)을 $J^{an}_q(F)\Psi$로 쓰고, 이를 함수 F의 $-iq$에 대한 파인만 작용소 적분(operator-valued Feynman integral)이라 한다.

1975년 존슨(Johnson)과 스코그(Skoug)는 $\mathcal{L}(L_1(\mathbb{R}),C_0(\mathbb{R}))$에 속하는 파인만 적분을 다룸으로서 1973년 카메론과 스토빅(Storvick)에 의하여 처음으로 소개된 $\mathcal{L}(L_1(\mathbb{R}),L_\infty(\mathbb{R}))$이론을 보다 발전시켰다. 존슨과 스코그는 1976년에 p, q가 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$을 만족

할 때, $\mathfrak{L}(L_p(\mathbb{R}), L_q(\mathbb{R}))$ 에 속하는 파인만 작용소 적분을 얻었다[6].

파인만 적분에 대해 만족할 만한 최초의 안정성 정리는 1984년에 존슨[5]에 의하여 얻어졌다. 진성유계이고 시간과 독립적인 포텐셜(potential) 함수 θ에 대하여 $\mathfrak{L}(L_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R}))$에 속하는 파인만 작용소 적분이 생각되었다. 1987년, 필자([2])는 $\mathfrak{L}(L_1(\mathbb{R}), C_0(\mathbb{R}))$에 속하는 파인만 작용소 적분의 안정성 정리에 대한 만족할 만한 결과를 얻었다.

$r>2$이고 θ가 $[a,b]\times\mathbb{R}$로부터 복소수 값을 갖는 함수로서 $\theta(s,\cdot)\in L_1(\mathbb{R})$이고 $\|\theta(s,\cdot)\|\in L_r[a,b]$라고 하자. 위의 조건을 만족하는 함수 θ들의 집합을

$$L_{1r}\equiv L_{1r}(\ [a,b]\times\mathbb{R}\ ) \tag{2.4}$$

로 나타낸다. 범함수 F는 $C(T)$ 위에서 정의되고 복소수값을 갖으며

$$F(x)=\int_a^b \theta(s,\ x(s))\ ds \tag{2.5}$$

를 만족한다. 그러면 이 때 파인만 작용소 적분은 존재하며 무한급수의 형태로 표현된다[2].

만일 포텐셜 함수 θ_N이 $N\to\infty$로 갈 때, 적당한 조건을 만족시키면 이에 대응되는 파인만 작용소 적분의 안정성 정리를 얻을 수 있다. 또한 초기 확률진폭(probability amplitude) Ψ_N 이 적분가능하며 $N\to\infty$일 때, $\|\Psi_N-\Psi\|\to 0$이면 그리고 $q_N\to q$이면 이 때 대응되는 파인만 작용소 적분의 안정성 정리를 각각 구할 수 있다.

안정성 정리는 파인만 작용소 적분을 제외한 다른 종류의 파인만 적분에서는 아직 거의 연구되지 않은 까닭에 안정성 정리에 관한 파인만 적분의 연구는 앞으로 필요하리라 여겨진다. 또한 최근에 연구가 진행되고 있는 파인만 적분의 연산계산법(operational calculus)[3]도 흥미있는 연구분야 가운데 하나라 여겨진다.

참고 문헌

1. Cameron, R. H., "A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integral," *J. Math. Phys.* 39(1960), 126-140.
2. Chang, J. S., "Stability theorems for the Feynman integral: The $\mathfrak{L}(L_1(\mathbb{R}), C_0(\mathbb{R}))$ theory," *Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* 17(1987), 135

-151.

3. Chang, J. S. and Johnson, G. W., "The Feynman integral and Feynman's operational calculus: The $\mathcal{L}(L_1(\mathbb{R}), C_0(\mathbb{R}))$ theory," *J. Korean Math. Soc. 28*(1991), 99-125.
4. Feynman, R. P., "Space time approach to non-relativistic quantum mechanics," *Rev. of Modern Physics*, 20(1948), 367-387.
5. Johnson, G. W., "A bounded convergence theorem for the Feynman integral," *J. Math. Phys. 25*(1984), 1323-1326.
6. Johnson, G. W. and Skoug, D. L,, "The Cameron-Storvick function space integral: An $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}), L_p(\mathbb{R}))$ theory," *Nagoya Math. J.* 60(1976), 93-137.
7. 장건수, **파인만 적분론**, 민음사, 1994.
8. 장주섭, "함수 공간 적분에 대한 소고(I)," **한국수학사학회지** 제 12 권 제 2 호(1999), 41-46.
9. 장주섭, "함수 공간 적분에 대한 소고(II)," **한국수학사학회지** 제 13 권 제 2 호(2000), 65-72.