Historia Mathematica Vol. 14, No. 2, 2001, 13-20

수렴구조의 역사*

숙명여자대학교 수학과 **한용현**

Abstract

The topological structure of a topological space is completely determined by the data of convergence of filters on the space. We study the origin of convergence structure in the setting of filters and nets and their ramifications.

0. 서론

우리가 실수 π를 3.14159⋯로 나타내는 것은 π를 무한급수로 이해하는 것이고 무한급수의 수렴의 개념은 근본적으로 무한수열의 수렴의 개념의 한 부분이다. 또한, 함수의 연구에 있어 함수를 함수열의 극한이나 급수로 나타냄으로써 이를 보다 쉽게 다룰 수 있다. 위의 사실과 실직선의 위상구조나 $\mathbb{R}-\mathbb{R}$함수의 연속성이 실수열의 수렴구조에 의하여 결정됨에 착안하여 1906년에 프레셰(Fréchet, 1878-1973)는 수열을 대상으로 수렴공간의 개념을 도입하고 이를 연구하였다[12]. 또한, 1914년에 하우스도르프(Hausdorff, 1868-1942)가 그의 저서 Grundzüge der Mengenlehre[17]에서 하우스도르프공간을 위상공간으로 도입함으로써, 위상수학의 기원을 이룩하였다.

그러나 실직선의 경우와는 달리 일반적인 위상공간에서의 수열의 역할은 그리 만족스럽지 못하다. 그리하여 수열의 일반화로서 1922년에 E. H. 무어(E. H. Moore, 1862-1932)와 스미스(Smith)에 의해 그물(net)의 개념이[26], 그리고 1937년에 카르탕(Cartan, 1904-)에 의해 필터(filter)의 개념이 도입되었고[6], 위상공간의 위상구조가 그물이나 필터의 수렴구조에 의해 결정됨이 밝혀졌고, 그물과 필터의 수렴구조가 서로 동치(equivalent)임이 브룬스(Bruns)와 슈미트(Schmidt)에 의해 밝혀졌다[5]. 이에 따라, 필터를 대상으로 한 수렴공간의 개념이 쇼케(Choquet, 1915-)[7], 코발스키(Kowalsky)[24], 피셔(Fischer)[11] 등에 의해 도입되었다. 본 논문의 목적은 수렴구조가 도입되는 과정을 조사하는 것이다.

---

* 본 논문은 2001년도 KISTEP 여자대학 연구기반 확충사업 지원에 의하여 수행되었음.
2000 Mathematical Subject Classification - 01A60, 54-03, 54A20.

1절에서는 수렴공간의 개념의 기원과 정의의 배경, 이의 연구에 대한 공로자들을 살펴보았다. 2절에서는 그물과 그의 수렴의 개념의 창안자인 무어의 미국 수학의 발전에 기여한 업적을 살펴보았다. 그는 당시 미국의 수학 연구 기관인 American mathematical research community의 창설과 발전에 많은 기여를 하였으며, 특히 1892년부터 1900년까지는 이를 이끌고 시카고 대학 수학과를 개설하고 이 과를 미국 최초의 탁월한 수학 연구 교육 기관으로 육성하는 데 크게 공헌하였다. 그는 또한 많은 제자를 배출하였는데 그의 제자중의 하나인 R. L. 무어(R. L. Moore, 1882-1974)는 그의 독창적인 수학교수법으로 잘 알려져 있는 바, 이를 소개하였다.

1. 수렴공간의 연구

실직선의 부분집합 A와 실수 x에 대해, $x \in \mathrm{Cl}\, A$일 필요충분조건은 x로 수렴하는 A 위에서의 수열이 존재하는 것이다. 이러한 사실은 실직선의 위상구조가 실수열의 수렴구조에 의해 완전히 결정됨을 뜻한다. 또한, $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$함수 f가 점 a에서 연속일 필요충분조건은 수열 (x_n)이 a로 수렴하면 $(f(x_n))$이 $f(a)$로 수렴하는 것이다. 즉, $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$함수의 연속성도 실수열의 수렴구조에 의해 완전히 결정됨을 뜻한다. 또한, 우리가 실수를 무한소수로 표현하는 것은 실수를 유리수의 급수로 이해하는 것이고, 급수 역시 수열의 극한이다. 그리고, 초월함수 등을 멱급수로 나타낸다든지, 주기함수를 푸리에 급수로 나타냄으로써 이들을 나타내고, 분석할 수 있는 데, 이것도 수열의 수렴구조를 이용한 것이다. 이에 착안하여 수열의 수렴구조를 일반화하려는 노력이 1906년에 프레셰[12]에 의하여 시작되었다.

아다마르(Hadamard, 1865-1963)의 학생이었던 그는 학위논문에서 다음과 같이 $\mathcal{L}$-space를 정의하였다.

집합 X 위에서의 모든 수열 (x_n)의 집합을 $S(X)$라 하고 $L \subset S(X) \times X$ 라 하자. $((x_n), a) \in L$ 이면 $(x_n) \to a$ 로 표기하고 수열 (x_n)이 a로 수렴한다고 하자. (X, L)이 다음의 조건을 만족할 때, 이를 $\mathcal{L}$-space라 한다.

(L1) $(x_n) \to a$ 이고 $0 < k_1 < k_2 < k_3 \cdots$ 이면 $(x_{k_n}) \to a$.

(L2) 모든 n에 대해 $x_n = a$ 일 때, $(x_n) \to a$, 즉, $(a) \to a$.

즉, a로 수렴하는 수열의 부분수열이 역시 a로 수렴하여야 한다는 것과, 모든 항이 상수 a인 수열이 a로 수렴해야 한다는 것을 공리로 한 것이다. 그러나 이러한 정의 하에서는 $X = \{0, 1\}$, $L = \{((0), 0), ((1), 1)\}$이라 하면 (X, L)은 $\mathcal{L}$-space이지만 여기에서 수열 1, 0, 0, 0, …은 수렴하지 않는다.

이러한 점을 보완하여 1923년에 알렉산드로프(Alexandrov)와 유리존(Urysohn)은 $\mathcal{L}$-space (X, L)가 다음의 조건을 만족할 때, 이를 $\mathcal{L}_1$-space라 하였다 (자주, $\mathcal{L}^*$-space라 한다)[1].

(L3) (x_n)이 a로 수렴하지 않으면 부분수열 (x_{n_k})가 존재하여, (x_{n_k})의 어떤 부분 수열도 a로 수렴하지 않는다.

$\mathcal{L}^*$-space 위에서는 수열에서 유한 개의 항을 빼내거나 덧붙이더라도 수렴성에 변화를 주지 않게 된다.

이렇게 수열을 대상으로 하는 수렴구조에 대한 연구는 두들리(Dudley, 1938-)[10], 쿠트닉(Koutnik)[23], 노바크(Novak)[27] 등에 의해 계승되었다.

수열은 실수의 위상구조의 연구에서 뿐 아니라, 거리공간이나, 유사거리공간, 제1가산공간 등의 연구에서도 매우 중요한 역할을 한다. 실제로 수열의 수렴구조에 의해 위상구조가 결정되는 공간을 sequential space라고 하며, 이는 앞의 공간들을 포함한다.

그러나 일반적인 위상공간에서의 수열의 역할은 실직선에서의 경우에 비해 매우 약하다. 한 예로, D가 두 점 0과 1로 이루어진 이산공간(discrete space)일 때, X를 D의 멱공간 $D^{\mathbb{R}}$라 하고 X의 점 $(0)(=(a_r),\ a_r=0$ for all $r \in \mathbb{R})$와 X의 부분집합 $A=\{(x_r) \mid$ 유한 개를 제외한 모든 $r \in \mathbb{R}$에 대해 $x_r=1\}$를 보면 A가 X의 조밀한 부분집합이므로 $(0) \in \mathrm{Cl}\, A$이다. 하지만 A 위에서의 어떤 수열도 (0)로 수렴할 수 없다. 이것은 X에서의 수열의 수렴구조가 X의 위상구조를 결정할 수 없음을 뜻한다.

그리하여 실직선에서 수열이 하던 역할을 위상공간에서 대신할 수열의 일반화를 찾게 되었던 바, 먼저 1922년에 무어와 스미스[26]에 의해 그물과 이들의 수렴의 개념이 도입되었다. 이들은 집합 X 위에서의 수열이란 자연수의 집합 N에서 X로의 함수이며 N이 유향집합(directed set)임에 착안하여, 유향집합에서 X로의 함수를 X 위에서의 그물이라고 정의하고, 위상공간에서의 그물에 대해 수렴의 개념을 정의함으로써, 한 위상공간에서의 그물들의 수렴구조에 의해 그 공간의 위상구조가 결정됨과 위상공간 사이의 함수의 연속성도 그물들의 수렴구조에 의해 결정됨을 밝힐 수 있었다. 이는 다음 절에 다시 언급하려 한다.

다음으로 1937년에 카르탕[6]에 의해 필터와 이들의 수렴의 개념이 도입되었으며, 결국, 위상공간의 위상구조와 위상공간 사이의 함수의 연속성이 해당 공간상의 필터들의 수렴구조에 의해 완전히 결정됨이 밝혀졌다. 즉, 위상공간 X의 부분집합 A와 한 점 x에 대해, x가 A의 폐포(closure)의 점일 필요충분조건은 A를 원소로 갖고 x로 수렴하는 X 위에서의 필터가 존재하는 것이다. 그리고, 위상공간 사이의 함수 $f: X \to Y$가 X의 한 점 x에서 연속일 필요충분조건은 x로 수렴하는 X 위에서의 필터 $\mathcal{F}$에 대해 $f(\mathcal{F})$가 $f(x)$로 수렴하는 것이다.

위상구조의 일반화로서 수렴공간의 개념이 쇼케[7], 코발스키[24], 피셔[11] 등에 의해 도입되었고 이에 대한 연구가 시작되었다.

이러한 과정을 좀더 자세히 살펴보기 위하여 수렴공간의 정의를 소개하겠다. 집합 X에 대해 $F(X)$를 X 위의 필터들의 집합이라 하고, $P(X)$를 X의 멱집합이라 하자. $\lim : F(X) \to P(X)$가 함수일 때, lim을 X에서의 수렴구조(convergence structure on X)라 하고, 순서쌍 $(X, \lim)$을 일반수렴공간(general convergence space)이라 한다. X 위의 필터 ξ와 X의 점

x에 대해 $x \in \lim \xi$이면 ξ가 x로 수렴한다고 하고, 기호로는 $\xi \to x$로 나타낸다. X의 점 x에 대해 $x \in \lim \xi$이 성립하는 필터가 존재할 경우에, $\bigcap\{\xi \mid \xi \to x\}$를 x의 근방필터(neighborhood filter of x)라 하고 $N(x)$로 나타낸다.

일반수렴공간 $(X, \lim)$에 대해 다음과 같은 공리를 생각하자. 여기서 ξ, ψ, ρ는 X 위의 필터다.

LI: X의 모든 점 x에 대해 $x \in \lim \dot{x}$이다. 여기서 $\dot{x}$는 x에서의 극대필터(ultrafilter)를 뜻한다.

LII: $\xi \subset \psi$이면 $\lim \xi \subset \lim \psi$이다.

C: $x \in \lim \xi$이면 $x \in \lim \xi \cap \dot{x}$이다.

Lim: $\xi, \psi \to x$이면 $\xi \cap \psi \to x$이다.

LIII: 필터 ξ와 X의 점 x에 대해, $\psi \supset \xi$이면 $\rho \supset \psi$이고 $x \in \lim \rho$인 필터 ρ가 존재할 때, $x \in \lim \xi$이다.

Ps: $\xi \to x$이기 위한 필요충분조건은 ξ를 포함하는 모든 극대필터가 x로 수렴하는 것이다.

Pr: $N(x)$가 존재하면 $N(x) \to x$이다.

T: X의 모든 점 x와 모든 집합 $V \in N(x)$에 대해, 집합 U가 $N(x)$에 존재하여 $U \subset V$이고 U의 모든 점 y에 대해 $V \in N(y)$이다.

LI과 LII를 만족하는 일반수렴공간을 L-공간이라 하고, C를 만족하는 L-공간을 수렴공간(convergence space)이라 한다. Lim를 만족하는 L-공간을 limit space라고 한다. L-공간의 경우, LIII와 Ps는 동치이고, 이를 만족하는 L-공간을 L^*-공간 또는 유사위상적(pseudo-topological) 공간이라 한다. Pr를 만족하는 L-공간을 U-공간 또는 준위상적(pretopological) 공간이라 하며, T를 만족하는 준위상적 공간을 위상적(topological) 수렴공간이라 한다[20]. 위상적 수렴구조로부터 위상구조를 유도할 수 있고 역도 성립한다. 한 위상적 수렴구조로부터 위상구조를 유도하고 이로부터 수렴구조를 유도하면 이는 원래의 수렴구조와 일치하고, 역도 성립한다. L-공간에 대해, Pr $\Rightarrow$ Ps $\Rightarrow$ Lim $\Rightarrow$ C 이다.

앞에서 보았듯이 프레셰는 수열을 대상으로 수렴공간을 정의하였는데, LI과 LII는 그의 수열에 대한 공리를 필터에 적용한 것임을 알 수 있다. 또한, LIII는 알렉산드로프와 유리존[1]의 수렴공간의 수열에 대한 공리를 필터에 적용한 것이다.

쇼케[7]는 L^*-공간을 연구하였고, 코발스키[24]와 피셔[11]는 limit 공간을 연구하였다. 이들의 뒤를 이어 Harbarth[16]도 수렴공간의 연구에 많은 기여를 하였다. 또한, 수렴공간의 상공간(quotient)에 관하여 Fischer[11], Gähler[14], Kent[21] 등이 연구하였으며, 군과 벡터공간의 수렴구조에 관하여는 Fischer[11], Binz와 Keller[3], Wloka[30], Frölicher와

Bucher[12], Kutzler[24], Binz[2] 등이 연구하였다.

Schroder[28]는 수렴공간의 cover 구조(system of coverings)를 이용하여 콤팩트 수렴공간을 확정지었으며 국소적 콤팩트 수렴공간의 개념을 도입하였다. 또한, Grimeisen[15], Cook와 Fischer[9], Cook[8], Kent[20] 등도 수렴공간의 연구에 많은 기여를 하였다.

그 후, Herrlich[18] 등에 의해 limit 공간의 카테고리가 Cartesian closed임이 밝혀짐으로써 위상공간의 카테고리가 Cartesian closed가 아니고 여러 면에서 불편한 점에 비하여 위상공간의 확장으로서 수렴공간의 개념의 유용성이 밝혀졌다.

2. E. H. 무어와 R. L. 무어

이 절에서는 1절에 언급된 바 있는 그물의 수렴구조에 대해 살펴보고, 이 개념의 창안자인 E. H. 무어가 미국 수학계에 남긴 업적과, 그의 제자인 R. L. 무어의 독특한 수학교수법을 소개하려 한다.

위상공간 X의 부분집합 A와 한 점 x에 대해, x가 A의 폐포(closure)의 점일 필요충분조건은 x로 수렴하는 A 위에서의 그물이 존재하는 것이다. 그리고 위상공간 사이의 함수 $f: X \to Y$가 X의 한 점 x에서 연속일 필요충분조건은 x로 수렴하는 X 위에서의 그물 S에 대해 $f^\circ S$가 $f(x)$로 수렴하는 것이다. 그러므로 위상공간 X의 위상구조나 $f: X \to Y$의 연속성이 해당하는 공간에서의 그물의 수렴구조에 의해 결정됨을 뜻한다.

집합 X 위에서의 모든 그물의 집합을 $N(X)$라 하고 $C \subset N(X) \times X$일 때, C가 소정의 조건을 만족하면 C를 X 위에서의 convergence class라 한다[19]. 모든 convergence class는 한 위상공간 X로부터 유도되며, 이로부터 X 위의 한 위상구조가 유도되는데, 이것이 원래의 위상구조와 일치하고, 역도 성립한다. 이러한 사실로부터, 그물의 수렴구조의 중요성과 유용성을 알 수 있다.

이제 E. H. 무어의 공적에 대해 알아본다. 1892년에 시카고 대학이 창설되었는데 수학과도 이때에 같이 개설되었다. 이 수학과는 비록 미국 최초의 탁월한 연구성과를 남긴 고등교육기관이라고 할 수는 없으나, 중요한 수학적 연구 업적을 이룩하는 오랜 전통을 다지고, 다음 세대의 과학자들을 육성하는 데 성공한 최초의 교육기관이라 할 수 있다. 무어는 이 수학과를 개설하고 이를 선도적 과학센터로 발전시키는 데 있어 중심적 역할을 한 인물이다.

시카고 대학 수학과가 생기기 이전에는 수준급의 수학 공부를 하기 위하여 미국 학생들이 택할 수 있는 길은 독일의 대학으로, 그 중에서도 특히 괴팅겐 대학으로 유학을 떠나는 것이었다. 시카고 대학 수학과의 성공은 이러한 관행에 대한 대안을 제시할 수 있었다는 점에서 매우 높게 평가되었다. 무어와 함께 이 수학과를 창설한 볼차(Bolza, 1857-1942)와 마쉬케(Maschke, 1853-1908)는 이를 매우 역동적인 과로 이끌어 감으로써, 많은 젊고 재능 있는 대학원생들을 끌어 모을 수 있었다.

이 같은 시카고대학 수학과의 성공적 출발은 1876년에 설립되어 활발한 활동을 펴나가던

American mathematical research community가 1900년까지 이룩한 세 가지 업적 중의 하나라고 할 수 있다. 그 중의 첫 번째는 1876년부터 1883년에 걸쳐 실베스터(Sylvester)의 주도하에 존스 홉킨스(Johns Hopkins) 대학의 수학과를 개설한 것이고, 두 번째는 1884년부터 1993년까지 클라인(Klein)의 주도하에 많은 젊은 수학도 들을 독일로 유학 보내어 공부하게 한 것이고, 세 번째가 바로 1892년부터 1900년까지 무어의 주도하에 시카고 대학 수학과를 개설하고 이의 명성을 굳힌 것이다.

E. H. 무어의 제자인 R. L. 무어는 1920대부터 1970년대까지 텍사스 대학의 중요하고도 영향력 있는 교수였다. 그는 강직하고 단순한 성격의 소유자로서, 매우 독특한 수학교수법을 창안하였다. 이것을 무어의 교수법이라고 하는 데, 이 방법은 그의 제자들과 추종자들에 의해 널리 행해졌다. 여기에 무어의 교수법을 소개하고자 한다.

무어는 대학의 초급수학강의부터 대학원의 고급의 수학강의까지 그의 모든 강의에 이 방법을 사용하였다. 학생들은 무어가 어떤 교수인지, 그가 어떤 것을 기대하는지 전혀 알지 못한 채로 첫 시간을 맞이하게 된다. 교수는 학생들에게 몇 개의 정의, 공리, 정리가 등사된 종이를 나누어준다. 그리고는 “자, 누가 앞에 나와 첫 번째 정리를 증명할 텐가?”고 묻는다. 그러면 어리둥절한 학생들은 그저 침묵으로 답할 뿐이다. 많은 학생들은 정의가 무엇이고, 공리가 무엇이며, 정리는 무엇인지, 증명은 어떻게 하는 것인지도 모르고, 심지어 기본적인 논리 법칙도 알지 못한다. 그러나 무어는 이를 개의치 않는다. 그는 의자에 앉아 묵묵히 기다린다. 대개의 경우 말 한마디 없이 한 시간이 지나간다. 흔히, 두 번째 시간도 그렇게 지나가고, 많은 경우에 세 번째 시간도 그렇게 지나간다. 마침내 한 용감한 학생이 칠판 앞으로 나와 첫 번째 정리의 증명을 시도한다. 그러면 무어는 그를 철저히 추궁한다. 이런 식으로 그의 강의는 계속된다.

매 시간, 한 학생이 앞으로 나아가 자신이 엮어 낸 증명을 적어 나가면, 나머지 모든 사람들-교수와 학생들-은 이 증명에 대해 철저히 비판한다. 그가 의지할 만한 것은 아무 것도 없다. 무어는 이 학생이 증명을 완성하는 데 아무런 도움도 주지 않는다. 다만, 학생들의 말에 적절히 대응할 뿐이다.

무어의 학습의 강점은 그의 학생들은 학습내용을 완전히 이해하게 된다는 것이다. 누군가 앞에 나아가 잘못된 내용을 제시하게 되면 그는 냉혹한 비판을 받게 될 것이고, 제대로 된 증명을 제시할 경우, 침묵 속에 진정한 찬사를 받게 된다.

무어는 학생들이 책이나 논문을 읽는 것을 허용하지 않는다-심지어는 그의 대학원생에게까지도. 물론, 수학과 도서실의 도서 구입비도 배정하지 않았다. 그가 도서실에서 학생을 발견하자 그를 도서실 밖으로 내던졌다는 일화가 전해져 내려오고 있다. 이런 과정을 통하여 학생들은 나름대로의 학문체계를 갖추게 되는 것이다. 그의 교실은 학생들의 수준이 비슷할 때, 가장 효과적으로 운영된다. 교실 밖에서는 학생들은 책을 읽는 것도, 서로 협동하는 것도 허용되지 않는다. 무어는 수업에 비협조적이거나 적응하지 못하는 학생은 냉혹하게 쫓아냈다.

무어의 교수법에 대해서는 찬성론과 반대론이 팽팽하게 대립하고 있다. 무어의 경우, 이러

한 교수법이 성공할 수 있었던 것은 그의 강직한 성격과 이 방법에 내재한 도전성에 기인한 것이라 하겠다. 그의 학생들, 특히 그의 대학원생들은 흔히 무어의 교수법의 신봉자가 되었다. 이 교수법은 널리 전파되었고 오랜 동안 실시되었다. 1960년대와 1970년대에는 이 교수법에 대해 듣거나 직접 경험하지 않고는 수학자가 될 수 없었을 정도이다.

3. 결론

수열의 수렴구조가 실수의 위상구조와 실함수의 연속성를 결정한다는 사실과 해석학에서의 함수열의 여러 가지 수렴구조의 중요성에 착안하여, 프레셰에 의해 수열을 대상으로 한 L-공간의 개념이 도입되었고, 다시 위상공간의 일반화, 또는 수렴구조의 추상화로서 필터를 대상으로 한 수렴공간의 개념이 도입되었다. 그런데 위상공간의 카테고리 **Top**은 Cartesian closed가 아닌데 비하여, 수렴공간의 카테고리 **Conv**는 Cartesian closed이라는 등, 여러 가지의 좋은 성질을 갖고 있음이 밝혀졌다. 이런 관점에서 수렴공간을 위상공간의 좋은 확장으로 볼 수 있다. 수학에서는 처음에는 단순한 일반화나 추상화의 과정으로 도입되었던 개념이 후에 그의 중요성과 효용성이 밝혀지는 경우가 자주 있는 데, 수렴구조의 경우도 그 중의 한 예라 할 수 있다.

참고 문헌

1. Alexandrov, P. and P. Urysohn, *C. R. Paris* 177(1923), p. 1274.
2. Binz, E., "Bemerkungen zu limitierten funktionenalgebren," *Math. Ann.* 175(1968), 169-184.
3. Binz, E. and H. H. Keller, "Funktionenräume in der Kategori der Limesräume," *Ann. Acad. Sci. Fenn.* Ser. A I 383(1966), 1-21.
4. Bourbaki, N., *General Topology,* Addison-Wesley, Reading, 1966.
5. Bruns, G. and J. Schmidt, "Zur Äquivalenz von Moore-Smith Folgen und Filtern," *Math. Nachr.* 13(1955), 169-186.
6. Cartan, H., "Théorie des filtres; filtres et ultrafiltres," *C. R. Acad. Sc. Paris* 205 (1937), 595-598; 777-779.
7. Choquet, G., "Convergences," *Annales Univ. Grenoble* 23(1948), 57-112.
8. Cook, C. H., *Topological structures and filters*, Univ. of Oklahoma, Norman, Oklahoma 1966.
9. Cook, C. H. and H. R. Fischer, "Regular convergence spaces," *Math. Ann.* 174(1967), 1-7.

10. Dudley, R. M., "On sequential convergence," *Trans. Amer. Mat. Soc.* 112(1964), 483-507,
11. Fischer, H. R., "Limesräume," *Math. Ann.* 137(1959), 269-303.
12. Fréchet, M., "Sur quelques points du calcul fonctionnel," *Rend. del Circ. Mat di Palermo* 22(1906), 1-74.
13. Frölicher, A. and W. Bucher, *Calculus in vector spaces without norm,* Lecture Notes in Math. 30, Berlin-Heidelberg-New York 1966.
14. Gähler, W., "Beiträge zur Theorie der Limesräume," *Theory of Sets and Topology, Berlin 1972,* 161-197.
15. Grimeisen, G., "Topologische Räume, in denen alle Filter konvergieren," *Math. Ann.* 173(1967), 241-252.
16. Harbarth, K., *Untersuchungen zur Theorie der Limesräume,* Thesis, Univ. of Greifswald GDR 1961.
17. Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre,* Veit, Leipzig, 1914.
18. Herrlich, H., "Cartesian closed topological categories," *Math. Coll. Univ. Cape Town,* 9(1974), 1-16.
19. Kelley, J. L., *General Topology,* New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1955.
20. Kent, D. C., "Convergence functions and their related topologies," *Fund. Math.* 54 (1964), 125-133.
21. Kent, D. C., "Convergence quotient maps," *Fund. Math.* 65(1969), 197-205.
22. Kim, C. Y., S. S. Hong, Y. H. Hong, P. U. Park, *Algebras in Cartesian Closed Topological Categories,* Lecture Note Ser. 1, Yonsei Univ., 1979.
23. Koutnik, V., "On sequentially regular convergence spaces," *Czechoslovak. Math. J.* 17 (92)(1967), 232-247.
24. Kowalski, H. J., "Limesräume und Kompttierung," *Math. Nachr.* 12(1954), 301-340.
25. Kutzler, K., "Eine Bemerkun über endlich-dimensionale, separierte limitierte Vectorräume," *Archiv Math.* 20(1969), 165-168.
26. Moore E. H., and H. L. Smith, "A general theory of limits," *Amer. Journ. Math,* 44 (1922), 102-121.
27. Novak, J., "On convergence spaces and their sequential envelopes," *Czechoslovak. Math. J.* 15 (90)(1965), 74-100.
28. Schroder, M., *Continuous convergence in a Gelfand theory for topological algebras,* Ph. D. Thesis, Queens Univ., Kingston, Canada.
29. Urysohn, P., "Sur les classes (£) de M. Fréchet," *Ens. Math.* 25(1926), 77-83.
30. Wloka, J., "Limesräume und Distributionen," *Math. Ann.* 152(1963), 351-409.