

영의 역사와 영에 얽힌 오류들

대구 카톨릭대학교 수학과 김주영
배재대학교 전산 정보 수학과 김성숙

Abstract

There are two uses of zero which are both important but are different. One use of zero is as a number itself. The number zero is an abstract concept measuring the size of set with no elements in it. The second use of it is as an empty place indicator in our place-value number system. It is the notation. In this paper, we study a history of zero and the mistakes from a few earlier works in connection with some arithmetical operations involving the number zero.

0. 서론

일상생활에서 0의 기호와 수로서의 0이 많이 쓰여지지만 현재 사용하고 있는 숫자 0의 기원은 정확히 알려지지 않고 있다. 어떤 수학자가 0의 개념을 정의하여 그 때부터 0을 쓰게 된 것이 아니기에, 누가 0의 역사에 대하여 질문하여도 한마디로 대답하기에는 어려운 질문이라 생각한다. 다만 인도의 힌두 수학자들에 의해서 기원 후 500년과 800년 사이에 만들어진 것으로 추측할 뿐이다. 그 외 마야인들의 0의 사용이나 다른 문명에서의 0의 사용에 관하여도 많은 수학사학자들 사이에 논쟁이 있다.

우리가 현재 사용하는 숫자는 아라비아 숫자라고 부르는 숫자 표기법으로 아주 뛰어나게 효과적이고 개념적으로 완전한 수 체계이다. 사실 아라비아 숫자는 아랍인들이 발명한 숫자는 아니고 아랍인들이 인도의 힌두 숫자를 사용하다가 유럽으로 전파했다고 알려져 있다. 그러나 처음에는 아라비아 숫자가 받아들여지지 않았다. 그 이유는 아라비아 숫자는 로마 숫자보다 훨씬 쉽게 위조될 수 있었기 때문이며, 아라비아 숫자 사용이 한 때 법으로 금지된 적도 있었다.

기호 0이 존재하기 전에는, 고대 수학자들은 현대인들이 생각하는 방식으로 생각하는 것이 불가능했다. 몇 개의 수를 더하는 것도 아주 숙달된 전문인에 의해서 행해졌다. 숫자 0이

발견된 후에는 수학과 과학의 놀라운 발전이 이루어졌다. 이 논문에서는 가장 많은 수학사 학자들이 동의하는 부분을 중심으로 0에 관한 역사와 0에 얽힌 오류를 소개하려고 한다.

1. 0의 역사

0은 수학적으로 없다는 ‘무(無)’ 또는 ‘영’으로서 실체를 파악하기 위해 사용되었던 무(無)의 수치적인 표현이다. 누군가가 0을 발명했던 것도 아닌데 어느 날부터 0을 사용하기 시작했다. 수학적 문제는 추상적인 문제보다 오히려 “실제적인 ‘생활 속의 문제’로서 시작했기에 수로서의 0이 직관적인 개념이 아니다.”라고 생각할 수도 있다. 초기의 역사에서 수는 오늘 생각하는 추상적인 개념들보다 구체적으로 많이 생각하게 되었다. 처음에 5마리의 소나 5개의 “사과”에서 “5개”까지 그리고 그 다음 “5”의 추상적인 생각으로 발전되었다. 만일 옛날 농부가 얼마나 많은 소를 필요로 하느냐에 관해 문제를 풀면 대답으로서 0 또는 -23은 나오지 않았다.

원래 로마 숫자는 글자를 모르는 사람들이 점수를 기록하기 위해 발명되었다고 한다[9]. 더 복잡한 로마 숫자는 귀족들에 의해 그들의 손가락의 개수를 세면서 사용되어 졌는데 0이란 수에 대응되는 개념인 ‘무(無)’를 볼 수 없었기에 ‘무(無)’를 표현하는 기호는 필요가 없었다. 로마 숫자를 우리 현대 시스템인 아라비아 숫자로 바꾸지 않고 계산하는 것은 불가능하진 않지만 복잡한 문제를 계산하는 것은 무척 어렵다. 예를 들어 다음의 5개의 로마 숫자를 더해보자.

$$\text{CCLXVIII} + \text{MDCCCVII} + \text{DCL} + \text{MLXXX} + \text{MMMDCCCV}$$

아마 주어진 로마 숫자를 더하는 것은 무척 복잡하고 어려울 것이다.[9] 그러나 아라비아 숫자로 바꾸고 나면 $268 + 1807 + 650 + 1080 + 3805$ 가 되어 초등 학생이면 누구나 더할 수 있는 간단한 계산이 된다. 로마 숫자와 대부분의 다른 숫자 시스템은 수판 또는 세고 있는 판자에 의해 하게 되는 계산의 결과를 기록하기에 편리할 뿐 계산에는 도움이 되지 않았다. 그래서 아라비아 숫자가 나오기 전에는 계산하는 것은 매우 숙련된 사람들의 일이었다. 로마 숫자의 계산은 특별히 무지하고 무력한 민중을 억누르는 정치적으로 의도적인 장치이었다. 그러므로 로마에서의 0의 발견과 숫자 계산의 발달은 지체될 수밖에 없었다.

0은 두 가지로 사용된다. 하나는 기호로서의 0이고 다른 하나는 수로서의 0이다. 먼저 기호로서의 0의 발견에 대해 생각해 보고자 한다. 기호로서의 0은 수 시스템에서 빈 자리를 나타내기 위해서이다. 예를 들어 5301과 531은 아주 다른 수이다. 5301에서 0은 53의 자리수를 정확히 표현해 주기 위해 존재한다. 또 다른 0의 사용은 수로서의 0, 즉 개념적으로서의 0이다. 이 두 개의 사용의 어느 쪽도 역사적으로 명확하게 기술되지 않고 있다.

일반적으로 위치의 수 체계(10진법이라면 1의 자리, 10의 자리, 100자리)가 나오자마자 빈

자리를 위한 0이 나왔을 것이라고 생각한다. 그러나 바빌로니아사람들은 약 1,000년 동안 0을 사용하지 않는 위치의 수 체계를 갖고 있었다. 기원전 1700년 전에 만들어져 아직까지 남아있는 바빌론의 진흙 판에 새겨진 기호에 의하면 그들의 수 체계는 지금과 같은 10진법이 아니라 60진법이었지만 그들은 그 때 2106과 216을 분명히 구별하고 있지 않다. 그러나 기원전 400년 전부터 바빌로니아 사람들은 지금의 0 대신에 “를 사용하고 있다. 즉 216과 21”6으로 두 수를 구별하고 있는 것이다. 바빌로니아 사람들이 항상 이 기호만 쓴 것은 아닌 것 같다. 현재 이라크의 남쪽에 있는 옛 메소포타미아 도시인 Kish에서 발견된 돌 판에 의하면 기원전 700년에는 빈 자리를 나타내는 0 대신 3개의 고리모양을 사용하기도 하였다. 그러나 이 기호들은 숫자 사이에만 사용되었지 마지막 자리에는 사용된 적이 없었다. 이 사실로부터 알 수 있는 것은 옛날의 0의 사용은 빈 자리를 나타내기 위해서였고 수로서의 0이 아니었음을 알 수 있다. 그러나 고대 그리스 사람들은 위치의 수 체계를 사용하지 않았다. 이 사실의 이유를 생각해볼 필요가 있다. 즉, 수학적으로 뛰어난 그리스 사람들이 바빌로니아 사람들이 사용한 수 체계를 사용하지 않은 이유는 왜였을까? 이 질문에 대한 답은 여러 가지일 수 있지만 그 중 하나는 근본적으로 그리스인들의 수학적 발전은 기하학에서 시작되었기 때문일 것이다.

비록 유클리드(Euclid)의 원론(*Elements*)이 수 이론을 포함하지만, 그것은 기하에서 시작한다. 바꾸어 말하면 그들은 수를 선의 길이로서 생각하였기에 수를 위한 수 체계가 필요가 없었다. 수는 수학자가 아니라 상인에 의해 사용되었기에, 어떤 분명한 기호가 도입되지 않았다. 사실 천문학에 종사하는 수학자들은 예외였다. 그리스의 천문학자들은 기호 0을 오늘날 사용하는 0의 기호로 사용하였다. 왜 특별히 0이 사용되었는지에 대해서는 이론이 분분하다. 어떤 역사학자들은 0을 그리스어로 ‘무’를 나타내는 *ouden*의 첫 글자인 *omicron*이라고 말하기도 한다. 하지만 그리스의 수 체계는 그들의 알파벳에 근거하고 있기에 *omicron*은 이미 70을 나타내는 수로 쓰였다고 하기에 앞의 이론은 무시되었다. 어떤 역사학자들은 거의 값이 없는 동전 ‘*obol*’을 나타낸다고도 한다. 즉 이 동전이 모래 위에 남기는 자국이 0과 같기에 나온 기호라는 해석이다[8]. 그러나 가장 설득력 있는 것은 인도에서 0이 발명되었을 것이라는 이론이다. 기록된 역사에 의하면 수 체계는 4나라(바빌로니아, 마야, 중국, 힌두) 사람들에 의해서 발달되었다고 한다. 그리고 0의 개념은 3나라(바빌로니아, 마야, 힌두) 사람들에 의해서 생겼다고 한다[9]. 어떤 학설에 의하면 중남미에 살았던 마야 사람들도 기원 후 665년에 이미 20진법에 근거한 수 체계를 갖고 있었고 기호로서 0을 이미 사용하였다고 한다[8]. 그러나 일반적으로 수학 사학자들 간에는 힌두 사람 외에는 완전한 수 체계와 0의 개념을 생각하지 못하고 있었다는 이론이 받아들여지고 있다. 항해의 기술과 천문학의 발달을 위해 그리고 계산의 과정을 기록하기 위해 쓰여지는 계산의 방법론의 발전을 위해 인도에서는 해운학과 천문학에 많은 수학자들이 고용되고 있었다. 이 과학의 발전을 이루기 위해, 쓰여지는 계산에 도움이 되었던 뛰어난 수 체계의 개발은 필연적이게 되었다. Mukherjee는 지금부터 1,700년 전에 이미 0의 개념이 인도에 있었다고 주장한다[6]. 어떤 역사 학자들은 기원 후 200년에 빈자리를 위한 0이 존재하였다고 주장하였지만 나중에 위조임이 판명이 났

다. 확실한 것은 기원 후 650년경에 인도에서 0을 사용하였다는 것이다. 기원 후 500년경에 아리아바타(Aryabhata)가 수 체계를 고안했는데 그 때에는 0이 빈 자리로 쓰여지진 않았다. 그는 빈 자리를 위하여 'kha'란 단어를 사용하였는데 후에 0으로 사용되었다. 또한 고대 인도인들이 빈 자리를 표현하기 위하여 점을 사용하였다는 증거도 남아있다. 역사적으로 돌판에 0의 기록이 확실히 남아 있는 시기는 기원 후 876년이다. 그 돌 판은 Delhi에서 남쪽으로 400킬로미터 떨어진 Gwalior에서 발견되었다. 270과 50이 거의 오늘날 쓰이는 기호 0으로서 표시되어있다[8]. 다만 0이 조금 작고 위에 표시되어 있을 뿐이다. 자리 수를 나타내기 위한 기호 0은, 힌두 사람들의 언어인 산스크리트 단어로, "sunya(슈나)"로서 그 의미는 "빈 자리"이며 점으로 표시되었다. 그리고 0의 기호는 수판의 비어 있는 자리를 위해 쓰여졌다고 한다. 그들은 수판의 각 열에 놓여있는 구슬의 수를 나타내기 위해 기호를 발명했다. 각 열의 숫자를 나타낼 발달된 기호가 있었지만 비어 있는 열을 나타내기 위해 새로운 기호를 발명해야 했다. "sunya"와 sunya가 나중에 아라비아 언어의 "al-sifer", 로마 사람의 "cifra"가 되었던 것이다[1, 8, 9]. 무(無)를 표현하기 위한 기호의 그 발견은 이후 인류 문명의 발전에 중요한 의의를 제공하였다. 이전에는 복잡한 수 계산은 특수한 사람들만 할 수 있었지만 0의 발견은 서민들도 계산을 가능하게 하여 르네상스 동안 과학의 발전을 일으킨 큰 힘이 되었다. 르네상스 후에 지식의 독점은 끝나고 0과 함께 과학적 지식이 많은 사람들에게 퍼지게 되었다. 그래서 보통사람들도 수와 숫자의 0을 사용하여 복잡한 수 계산을 하게 되었다.

이제 수로서 0의 기원을 생각해보자. 역사적으로 수학적 문제는 추상적인 문제보다 실제적인 '생활 속의 문제'로서 시작했다. 즉, 수는 어떤 동물이나 사물의 개수를 나타내기 위한 단어였다. 옛날에 농부가 얼마나 많은 소를 필요로 하느냐에 관해 문제를 풀면 대답으로서 0 또는 -23은 나오지 않았다. 그 후 수의 개념은 5마리의 "소"나 5개의 "사과"에서 '5개'까지 그리고 그 다음 숫자 "5"로 추상적으로 발전되었다. 점점 추상화가 되자 더 이상 물건의 개수를 나타내는 것이 아닌 0과 음수를 생각할 수 있게 되었다. 물론 0과 음수는 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈과 같은 수학적 연산을 생각할 때 나오게 되는 것이다. 브라마굽타(Brahmagupta)는 0을 어떤 수에서 같은 수를 뺄 때 나오는 수라고 정의하였다. 그는 수의 연산을 0과 음수까지 확장하려고 시도한 최초의 뛰어난 수학자였다. 그리고 0에 관한 성질을 다음과 같이 소개하였다.

0을 어떤 수에 더하거나 빼도 그 수는 변하지 않는다. 그리고 0 곱하기 임의의 수는 0이 된다. 0과 음수의 합은 음수이다. 0과 0의 합은 0이다. 그 후 약 200년 후에 마하비라(Mahavira)가 'Ganita Sara Samgraha'라는 책을 저술하였다. 그 책은 9장으로 구성이 되어 있는데 2장에서 수의 연산을 다음과 같이 소개하였다. '0 곱하기 어떤 수는 0이다. 어떤 수 빼기 0은 그 자신이다.'이다. 그 후 약 300년 후에 바스카라(Bhaskara)가 쓴 책에 의하면 여전히 0에 의하여 나누는 것에 대하여 고투하고 있다. 그는 결국 $\frac{n}{0} = \infty$ 라고 정의하였는

데, 이것을 언뜻 보면 맞는 것 같지만 사실은 틀리다. 이것이 사실이라면 0 곱하기 ∞ 는 모두 수 n 이 되어야 하기 때문이다. 인도 수학자들은 어떤 수를 0으로 나눌 수 없다는 결론에는 이르지 못하였다. 그러나 그는 $0^2=0$, $\sqrt{0}=0$ 등은 올바르게 기술하였다.

이 인도 수학자들의 뛰어난 업적은 아랍 수학자들에 의하여 유럽으로 전파되었다. 알콰리즈미(al-Khwarizm)는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9와 0을 근거로 하는 인도 수 체계에 관해 'Al'Khwarizmi on the Hindu Art of Reckoning'라는 책을 기술하였다. 이 책이 지금의 이라크가 0을 기호로서 사용하게 된 최초의 기록이다. Ibn Ezra는 12세기에 인도의 십진법 수 체계와 기호들에 대하여 3개의 책을 기술하였는데, 이 책으로 말미암아, 유럽의 박식한 사람들에게 인도 십진법 수 체계를 전파하는 계기가 되었다. 수에 관한 책에서 정수를 왼쪽에서 오른쪽으로 썼고 0을 원이나 바퀴를 의미하는 galgal이라 표현하였다. 그 후에 al-Samawal은 다음과 같이 쓰고 있었다.

0에서 양의 정수를 빼면 똑같은 수의 음수가 된다. 0 빼기 음수는 양수가 된다.

피보나치(Leonardo Fibonacci)는 유럽에 인도의 수 체계를 도입하는데 공헌한 사람 중의 한 명이었다. L. Pogliani, M. Randic and N. Trinajstic는 [7]에서 다음과 같이 쓴다.

힌두교의 아라비아 언어 수 시스템을 유럽의 수학에 도입한 사람은 이탈리아의 수학자 피보나치(Leonardo Fibonacci)이다.

그는 12세기에 이탈리아의 르네상스 동안 산반서(Liber Abaci)라는 책에서 기호 0과 함께 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 9개의 인도 수를 함께 소개하였다. 그러나 그것은 그 후 오랫동안 널리 사용되고 있지 않았다. 그러나 초기에는 피보나치도 0을 다른 자연수처럼 취급할 만큼 용감하지 않았다. 그는 다른 자연수는 수라고 부르면서도 0은 기호라고 말하였다. 그가 0을 다른 것을 보면 그가 인도의 브라마굽타, 마하비라, 바스카라나 아랍의 수학자 al-Samawal에 미치지 못한 것 같다. 많은 사람들은 수 체계와 0의 도입이 이 때로부터 널리 퍼졌을 것이라라고 생각할지 모른다. 그러나 사실은 그렇지 않다. 카르다노(Cardan)은 3차와 4차 방정식을 0을 사용하지 않고 풀었는데, 그는 0을 사용하면 훨씬 쉽게 풀 수 있다는 것을 1550년대에 알게 되었다. 많은 저항 끝에, 1600년대에 들어 0은 광범위하게 사용되기 시작하였다.

2. 영에 얽힌 오류들

역사는 사람들을 지혜롭게 만든다고 한다. 역사를 공부함으로써 우리 과거에 범한 오류와 실수들을 알게 되고 그 실수들을 반복하지 않게 되기 때문이다. 존스(P. S. Jones)는 다음과

같이 말했다.

수학사를 사용하는 한 가지 이유는 수학의 발전을 방해하였던 개념적인 어려움과 오류를 학생들로 하여금 깨닫게 하는 것이다.

밀러(G.A. Miller)는 심지어 다음과 같이 말했다.

수학 선생들은 과거의 뛰어난 수학자들의 뛰어난 성공적인 논문보다는 실수가 있었던 논문으로부터 더 많은 것을 얻을지도 모른다.

이 절에서는 수 0이 관계된 수학연산에서 일어났던 오류에 관해 알아보려고 한다. 다음의 예들은 실수와 0의 이해의 부족에서 온 것들이다. 이 절의 내용은 많은 부분은 [10]을 참조하였다.

2-1. 브라마굽타(598-670)

그는 인도 수학자로 수학과 천문학에 관한 책들을 저술하였다. 그가 628년도에 쓴 유명한 저서 *Brahmasphuta-siddhanta*(우주의 열림)는 25장으로 되어있는데, 18장은 대수에 관하여 저술하면서 0에 관한 많은 수학 연산을 정의하였다. 그는 수학 연산을 음수와 0까지 확장하는 뛰어난 보였었다. 그는 0을 어떤 수에서 같은 수를 빼 때 나오는 수라고 정의하였다. 그리고 0에 관한 성질을 다음과 같이 소개하였다.

0을 어떤 수에 더하거나 빼도 그 수는 변하지 않는다. 그리고 0 곱하기 임의의 수는 0이 된다.

그는 0에 관한 성질도 모두 정확하게 소개하였는데, 오류를 범한 부분은 다음 사실이었다.

0나누기 0은 0이다.

$\frac{0}{0}$ 은 부정으로 정의할 수 없지만, 그 때 그에게는 명확하지 않았었던 것 같다.

2-2. 바하비라(800-870)

그도 인도의 Jaina지역의 수학자로 *Ganita Sara Samgraha*라는 책을 저술하였다. 그 책은 9장으로 구성이 되어있는데 2장에서 수학 연산을 소개하였다. 그는 브라마굽타의 “0 나누기 0은 0이다.”로 정의한 것을 “a 나누기 0은 a이다.”로 확장하려고 하였는데 그것이 오류를 범한 부분이다. 물론 그 때는 무한대 개념이 아직 없던 시절이었다.

2-3. 스피파티(Spipati, 1019-1066)

그는 수학보다는 천문학으로 더 알려진 11세기의 인도의 가장 유망한 수학자였다. 그의 저서 *Ganita-tilaka*는 125절로 이루어진 미완성의 수학 논문들로 이루어져 있다, 그 책에서 “a 나누기 0은 0이다.”라고 서술하였다. 그는 이 논문에서 0으로 ∞ 를 정의하려고 시도한 것 같다.

2-4. 바스카라 II(1114-1185)

바스카라는 인도수학자로 12세기에 수 체계를 이해하고 유럽에서는 생각지도 못한 방정식의 해법을 이해하고 있었다. 그의 유명한 저서 *Lilavati*는 수학에 관한 책으로 아름다움이라는 뜻으로 그의 딸이나 부인의 이름이었다는 이야기가 내려온다. *Lilavati*에서 “ $a \times 0 = a$ ”라고 정의하였다.

2-5. 오일러(1707-1783)

오일러(Leonhard Euler)처럼 뛰어난 수학자도 0에 관한 오류를 범했는데, 동시에 수렴할 수 없는 다음의 두 개의 기하급수를 더한 것이 0이 된다고 하였다.

$$\left(\dots + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \right) + (x + x^2 + x^3 + \dots) = 0$$

2-6. 옴

마르틴 옴(Martin Ohm)은 물리학에서 유명한 옴의 법칙을 발견한 게오르크 옴(Georg Simon Ohm)의 형제로서 독일의 바바리아(Bavaria) 지방의 유명한 수학자였다. 그가 어릴 때부터 그의 아버지는 그에게 수학, 물리, 화학, 철학 등을 가르쳤다. 1828년 그는 $a \neq 0$ 이면 $(a \div 0) \times 0 = 0$ 라고 하였다.

2-7. 아벨(S. G. Abel, 1802-1829)

유명한 닐스 아벨(N.H. Abel)의 아버지인 그는 책에서 $1+0=0$ 이라고 하였다

2-8. 라마누잔(Shinivasa Ramanujan, 1887-1920)

그는 해석학적인 수 이론가로 많은 공헌을 남겼다. 놀랍게도 그는 무한 양항 급수의 합을 다음과 같이 0이라 하였다.

$$12 + 22 + 32 + \dots = 0$$

3. 결론

위에서 보듯이 뛰어난 수학자들도 수학적으로 아주 중요한 오류를 범함을 보게 된다. 사실 현대에도 0이 개입된 방정식에서 많은 학생들이 오류를 범하는 것을 본다. 과거 수학자들의 오류들을 살펴보면 학생들도 다시 한번 0의 성질을 확실히 알게 되는 계기가 되면 좋을 것 같다.

역사를 돌이켜보면 처음 0과 아라비아 숫자가 유럽에 도입되었을 때는 여러 가지 문제가 많았다. 그러나 현대에도 0으로 인한 문제는 존재한다. 1년 5개월 전 많은 사람들이 2000년 1월 1일에 새로운 천년을 축하했다. 서기 0년이 없었기에 진정한 세 번째 천년은 2001년 1월 1일에 시작된다고 천문학자나 수학자들이 주장하였고 어떤 학자들은 2000년 1월 1일에 시작한다고 주장하며 인터넷에 많은 글들을 올렸다. 수학자들의 눈에는 많은 사람들이 단지 1999년의 통과를 축하한 것이다. 비록 Dionysus가 최초의 서기 0년을 세지 않는 오류를 용납하여도, 대부분의 사람들이 세 번째 천년과 21세기가 2001년 1월 1일에 시작되는 이유를 이해하지 못한 것은 놀라만한 일이다. 이렇게 0은 아직도 계속하여 문제를 초래하고 있지만 0이 있었기에 우리 인류가 누릴 수 있었던 문명의 발전을 생각하면 0은 참으로 고마운 수가 아닐 수 없다.

참고 문헌

1. Reid 저/허민 역, *영부터 무한대까지*, 경문사, 1997.
2. Gupta, R.C., "Who invented the zero," *Ganita-Bharati* 17 (1-4) (1995), 45-61.
3. Ifrah, G., *From one to zero: A universal history of numbers*, New York, 1987.
4. Ifrah, G., *A universal history of numbers: From prehistory to the invention of the computer*, London, 1998.
5. Kaplan, R., *The nothing that is: a natural history of zero*, London, 1999.
6. Mukherjee, R., *Discovery of zero and its impact on Indian mathematics*, Calcutta, 1991.
7. Pogliani, L., M Randic and N Trinajstic, "Much ado about nothing - an introductory inquiry about zero," *Internet J. Math. Ed. Sci. Tech.* 29 (5) (1998), 729--744.
8. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history//HistoryTopics/Zero.html>
9. <http://www.neo-tech.com/zero/patr6.html>
10. <http://www.sju.edu/~ambruso/hpm/n146/n146art2.html>
11. <http://ubmail.ubalt.edu/~harsham/zero/ZERO.HTM>