Historia Mathematica Vol. 14, No. 1, 2001, 83-100

수리철학의 변화와 수학교육관*

관동대학교 수학교육과 **김종명**

Abstract

The paper analyzes the philosophy of mathematics and outlook on the mathematics education as the philosophy of mathematics in the history of mathematics. We have found that various views of the human society have led us to the various philosophy of mathematics. This change of philosophy have important implications to the didactics of mathematics. This study tries to find out the direction of outlook on the mathematics education in the future.

0. 서론

단순한 수학의 시작은 언어와 마찬가지로 고대 문명의 발상지 등에서 일상생활에서 경험한 것들을 생각하고 정리하여 실용적인 지식으로 축적되었다. 고대로부터 정리되어온 수학은 인류의 문화유산이다. 여러 지역에서 인류가 수많은 고민과 시행착오들로 이루어진 그들만의 합리적 사고의 역사이기 때문이다.

증명 수학은 고대 그리스의 철학적 물음에서부터 시작되었다. 만물의 본질과 근원은 무엇인가? 이 세계가 어떻게 시작되었으며 어떤 원리와 진리가 성립되는지? 이런 물음과 생각을 신화적인 표현이 아니고 구체적인 언어로 논리적이고 합리적인 절차에 따라 분명하게 표현함으로 철학과 수학이 시작되었다. 실생활의 필요성과는 관계없이 '지식을 위한 지식'이 이루어졌다.

수학이 학문으로 자리잡기 시작하던 그리스 시대의 수리철학은 오늘날에도 여전히 유효하다. 수리철학과 수학교육관의 변화는 수학이 발전하고 사회의 지적 경향에 따라 바뀌었고 변화했다.

과거에 어떻게 수리철학이 변화하였고 성장하였는지, 그에 따라 수학교육관은 어떻게 변화하였는지 알아본다면 적어도 멀지 않은 미래에 대한 수학교육의 방향도 예측 가능하

* 본 논문은 2001학년도 관동대학교 학술연구비 지원에 의한 결과임.

리라고 생각된다.

수학교육관의 출발은 논리적이고 어려운 수학을 학생들에게 어떻게 가르쳐야 하나? 하는 고민 가운데 시작되었다.

수학교육의 현실에서 진정한 수학교육의 목적은 무엇이고, 수학 내용을 어떤 순서대로 어떻게 가르칠 것인가? 등 여러 가지 수학교육의 문제와 의문을 가지게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 역사적으로 수리철학과 수학교육관을 조망해 봄으로서 수학교육관에 대한 폭넓은 이해로 수학교육의 지향점을 발견할 수 있게 될 것이다. 수리철학은 수학에 대한 학문적 성격, 수학의 인식론과 방법론, 수학적 개념 등을 관찰하게 하고 수학의 학습 방법과 학습이론 등에 영향을 주고 교육학적 특성을 발견하게 한다.

여러 가지 측면에서 수학과 수학교육을 객관적으로 바라봄으로서 보다 나은 방향을 찾아가는 노력이 수학교육관에 나타나 있다. 따라서 수학교육관은 수학을 가르치는 방법보다는 교사가 학생들에게 어떻게 영향을 주어야 할지? 어떤 수학교육 철학을 가지고 이상적인 방향을 제시할 수 있을 것인가? 수리철학에 의해서 영향을 받는 수학교육관을 중심으로 연구할 것이다.

1. 전통적 실용주의

기원전 3000년경부터 인류는 측량이나 수의 계산 등 수학적 활동을 하였던 기록들이 남아있다. 대표적인 곳이 고대문명의 발상지인 이집트, 바빌로니아, 인도, 그리고 중국이다. 중국의 황하는 봄에는 몹시 가물고 여름에는 홍수가 심하여 풍토와 기후가 거칠고 혹독하여 자연에 대한 어떤 불가지(不可知)의 힘에 의해서 압도되었다. 따라서 중국인들은 자연에 순응하는 천명(天命)사상과 겸양과 인내심의 기질을 갖게되었다. 거칠은 자연의 품에서 자연의 은총을 기원하는 겸허함이 있을 따름이었다. 하늘을 대신하여 지배하는 천자에게 복종하는 것은 하늘의 뜻을 따르는 것이었다. 질서와 규칙이 있는 자연법칙의 존재를 명확히 확인 할 수 없었다. 자연현상에서 모순과 혼돈이 있는 것은 당연한 것이었다. 동양수학에는 논리적이고 증명하는 유클리드 기하학과 같은 학문적 체계와 실증적인 실험방법이 없었다. 중국은 지리적으로 고립되어 타문화와 접촉이 힘들었고, 수학적 기호의 발전도 없었다. 근대과학은 수공업적 기술의 전통과 학자의 정신적인 순수한 사유(思惟) 활동의 결합에서 이루어진다. 그러나 동양은 상인과 관료가 철저히 분리되어 있었다.

동양에는 기하학적 모델을 이용한 자연의 설명이나 뚜렷한 우주관이 없었다. 동양철학은 인간과 자연이 조화를 이루면서 무신론에 가까운 철학이었다. 이러한 사상의 그늘 아래에서 인문학을 중요시하고 산학은 잡기로 여길 정도로 천시되었다. 사농공상 계층적 사회구조에서 관료중심으로 수학이 세습되었다.

수학 문제집인 산학 책이 한자로 되어있기 때문에 일반인에게는 어려웠다. 산학은 산학자 집안에서만 배우고 전수 받을 수 있는 중인들끼리 세습하는 독점적인 전문 지식이었다. 수

학문제의 풀이법은 일반인들에게는 비밀스런 비법으로 여겨지는 전문기술이었다. 마방진의 경우 산학이 신비(神秘) 사상을 벗어나지 못했기 때문에 순수한 수의 이론을 발전시키지 못하였다.

산학에 관한 문제를 형이상학적 수리사상인 음향오행설과 역(易)의 관점에서 많이 다루었고, 자연과 인간관계의 조화와 중용(中庸)을 강조하는 인문학을 숭상하였다. 전통사회의 전통을 중요시하는 관습 때문에 수학의 발전에 많은 저해가 되었다.

과학과 수학의 내용이 모두 실용적인 발명품과 계산과 기술뿐이었고 자연현상의 일반적인 원리, 이론, 법칙 등 본질적인 성질들을 발견하지 못했다.

고대 그리스의 이전의 이집트, 바빌로니아 등 동양에서는, 수학적 지식은 실생활에 활용되고 적용되는 객관적이고 구체적인 지식의 집합체로 보았다. 수학의 내용은 실제생활에서 경험할 수 있는 수학문제들로 되어 있다. 수학 책의 구성은 문제의 성격에 따라 체계적으로 분류하고 선택하여 만든 수학문제집이다. 대표적인 중국의 수학 교과서로는 **구장산술**이 있다.

수학교육에서 학습내용이나 지도방법은 수학교과서를 중심으로 지식을 전수하는 전통적인 교육을 한다. 수학 교과서의 내용은 표면적으로는 실용수학의 내용이지만 정신 도야재의 성격을 가지고 있다. 자연에서 실험과 실측을 통하여 검증된 수학을 활동적인 학습방법으로 수학의 문제들을 이해하도록 지도한다. 수학교육의 목표는 실생활에서 실제 활용도 중요하지만, 시험점수를 어떻게 높일 수 있는가에 있다. 따라서 어떻게 문제를 쉽게 문제를 잘 풀 수 있게 하느냐에 초점이 있고, 교육방법도 문제를 잘 풀 수 있는 방법과 기능을 강조하게 된다. 또한 교과서의 내용을 빠짐없이 가능한 많은 지식을 전달하고, 많은 문제를 접하여 풀어보도록 하여, 간단하고 정확한 공식과 풀이법을 제공한다. 평가에 있어서는 모든 학생들에게 똑같은 문제가 제공되며 중간의 풀이과정에 관계없이 정답만을 요구한다.

이렇게 고대 그리스의 이전과 동양에서는 이미 만들어진 문제와 지식을 전달하여 학생들은 받아들이고 암기하는 기능적인 지식을 전수하는 전통적 실제주의(realism) 수학교육관과 전통적 실용주의 수리철학이 있었다.

2. 플라톤주의

진리의 탐구는 자연에 대한 호기심에서 시작되었다. 탈레스(Thales, BC 624-546)는 '자연은 무엇으로 구성되어 있나?'하는 의문을 가지고 있었다. 그는 신(神)이 우주를 창조하였을 것이라고 가정하고 세계를 구성하고 있는 근본이 되는 것을 찾았고, 만물전체의 변화를 설명할 수 있으며, 자연의 복잡한 현상 속에는 어떤 확실한 원리와 근본이 되는 것이 숨어 있을 수 있다는 것을 파악하였다. 그는 우주와 자연의 세계는 완전하게 구성되어 있으며, 또 원리와 질서가 있어서 그것들의 구성과 규칙들은 인간의 정신으로 이해하고 설명할 수 있다고 생각했다. 그는 물질세계에서 스스로 변하지 않으면서 모든 물질변화의

기본이 되는 실체를 '물(水)'이라고 결론을 지었다. 이러한 생각은 자연현상과 다양한 물질들의 변화를 설명하는 새로운 방법이었다. 우주와 자연에서 일어나는 자연현상을 인간의 이성으로 설명할 수 있다는 생각을 가지고 자연을 바라볼 수 있었기 때문이다. 탈레스의 정신을 이어받은 그리스의 자연철학자들은 논리적인 방법으로 절대적이고 영원한 진리인 자연의 원리를 발견하고 이 이론으로 자연의 세계를 설명하려고 했다.

플라톤주의(Platonism)는 이러한 그리스의 자연철학으로부터 나왔다. 그들은 수학의 이론과 내용이 영원 불변한 절대적 진리라 생각한다. 플라톤주의는 수학의 절대적인 기초와 존재성이 우주에 감추어져 있다는 그리스인들의 수리철학이다. 수학적 대상과 원리들은 시간과 공간을 초월하여 실재한다. 현실적인 사물들은 진정한 존재의 본질인 '이데아'의 그림자로서 존재하며 수학적 대상의 실재성은 진리인 이데아에 있다. 수학적 지식은 인간과는 무관하게 독립적으로 존재하며, 인간에 의해서 창조되거나 변하거나 소멸되지 않는 영원 불변한 진리인 것이다. 수학의 이론은 자명한 이상적인 이데아로 존재하였다. 또한 수학은 우주와 자연의 현상을 설명하는 가장 정확하고 객관적인 도구였다. 수학은 인간의 영혼을 어둠속에서 진리와 빛으로 이끌어 주고 자연과 현상세계에 대한 설명과 충분한 지혜를 줄 수 있는 학문이라고 믿었다.

조물주는 자연과 인간의 이성을 동시에 창조하였기 때문에 자연현상을 탐구하고 관찰하기 이전에 인간의 정신에 수학적 개념들이 각인되어 있어서 회상을 통하여 선험적으로 진리를 지각할 수 있다고 생각했다. 인간의 정신구조는 세계를 이해하고 선을 인식하고 신을 알 수 있도록 창조되었다.

그리스의 수학자들은 '모든 진리는 증명되어야만 그 명제의 확실성을 보장받는다.'는 생각 때문에 정확한 증명이 필요했다. 또한 '신은 수학적으로 사고한다.'는 철학을 가지고 플라톤의 이상적인 진리를 찾기 위해서는 완벽한 공리와 체계의 수학이 필요하였다[3].

수학의 이론적 체계는 명백한 공리와 공준을 토대로 시작해서 치밀한 논리적 추론에 의해서 단계적으로 이론을 전개하여 숨겨진 진리를 발견했다.

플라톤주의에 의하면 수학자는 경험과 추론을 통하여 이미 존재하고 있는 수학적 원리를 발견하고 증명하는 경험적 자연 과학자이다. 이러한 관점에서 자연에서 발견한 수학의 이론들은 절대적이고 객관적이므로 완전한 절대진리로 축적되었다. 그리스 수학의 발전은 수학의 구성과 이론들이 학문적으로 체계화되었다.

수학의 이론들이 치밀하게 논리적으로 전개되어 실제생활과 먼 순수이론들이 일반화와 추상화로 체계적이고 집약적인 수학적 원리들로 구성된다. 이러한 수학적 이론들은 모아서 체계적이고 구체적인 표현으로 학문적인 수학 책을 만들게 된다. 이러한 이론적인 수학 교과서를 가지고 학생들에게 절대로 변하지 않는 학문적 수학을 가르치게된다. 이러한 수학교육관을 '절대적 학문주의(Academicism) 수학교육관'이라 한다.

그리스의 수학자들은 '신은 수학적으로 자연을 창조했다.'고 생각하여 완전한 이론들을 발견하였다. 또한, '수학의 명제는 변할 수 없는 진리이다.'라는 확고부동한 플라톤(학문)주의 수리철학을 가지고 수학을 지도하게 되었다. 수학은 외적이고 정적이며 한계가 있으며 수학

의 이론은 고정된 불변의 진리로 생각한다. 수학을 지도하는 방법적인 면에 관심을 가지고 지식을 전수하는 전통적인 수학교육관으로 전통적 실재주의와 같으나, 수학의 본질은 논리성이며 논리를 체계적으로 전개할 때 가장 좋은 학습방법으로 본다. 수학의 본질은 의미보다는 형식 속에 존재한다는 형식주의, 논리주의, 수학은 절대적 지식 체계로써 이데아(idea)의 세계를 이상적으로 생각하는 플라톤주의 등은 모두 절대적 학문주의 수학교육관에 포함된다[5].

절대적 학문주의의 대표적인 교과서는 유클리드의 기하학 **원론**이 있다. 수학 교과서를 중심으로 교육이 이루어지고, 수학은 실제생활에 활용할 수 있다는 유용성과 인간 삶에서 광범위하게 필요하고 미래의 시대에 중요하다는 인식 없이 수학을 배우게된다. 단지 수학의 필요성은 경쟁시험에서 높은 점수를 받기 위한 것일 뿐이다. 수학은 논리적이고 합리적이어서 생각하는 즐거움이 있고, 타 교과와 관계가 있으며 인간의 삶과 정신적 활동분야에서 활용할 수 있다는 언급이 없어서 학생들은 수학의 즐거움이나 호기심 없이 딱딱하고 지루한 교과로 생각하게 된다. 학생들은 수학적 지식을 교사로부터 전수 받아 암기하는 지식으로 여기게 된다.

3. 진보적 학문주의

서양 근대수학은 학문주의 풍토에서 '자연을 수학적으로 설명할 수 있다'는 인간의 적극적인 의지와 신념으로 시작되었다. 자연을 관찰하여 변할 수 없는 자연법칙을 귀납적으로 종합하고 분석하여 연역적으로 모순이 없는 완전한 자연법칙의 이론들을 실험하여 실증적으로 증명하고 발견하였다.

이렇게 변화된 과학적 세계관은 1637년 데카르트(Descartes, 1596-1650)의 논문 "모든 과학에서 이성을 바르게 이끄는 진리를 탐구하기 위한 방법서설(方法序說)"에서, 그는 체계적인 회의를 통하여 명확하고 엄격한 개념에 도달하고, 그 개념으로부터 타당한 결론을 많이 이끌어 낼 수 있기를 희망하였다. 과학에도 이 방법론을 적용하여 만물은 물질과 운동으로 설명할 수 있다는 가설에 도달했다. 온 우주는 정지하지 않고 계속 소용돌이치는 물질로 구성되어 있다. 따라서 모든 현상은 물질들이 부딪쳐 생겨나는 힘에 의해 기계적으로 설명된다는 것이다[13]. 그는 철학의 방법론적 근거는 수학에 있으며 수학의 방법론적 핵심은 이성(理性)과 논리성이라고 보았다.

다른 방법은 자연현상 속에서 직관적인 가설과 의문으로 새로운 문제를 발견하면 치밀한 조사와 탐구활동으로 새로운 수학적 도구와 수학적 이론을 만든다. 수학은 자연과학의 일반적인 이론을 분석하고 설명할 수 있으며, 과거의 수학체계에 새로운 이론이 누적되면서 체계화할 수 있는 지식의 체계로써 진보적으로 발전할 수 있다고 보았다. 자연의 움직임과 변화를 묘사하여 설명하고 분석하는 근대 서양수학은 근대과학의 핵심인 우주를 물체의 운동과 그 원천인 힘을 생각하는 역학적 세계관이 탄생되었다. 자연현상에서 주어진 초기조건이

있을 때 자연법칙을 적용하여 미분방정식을 풀면 미래의 현상까지도 완전히 예측할 수 있다는 수학주의가 있었다. 즉 미래가 미리 정해져 있어서 주어진 법칙과 조건에 의해 미래를 예측할 수 있다는 결정론(決定論)적인 사상이 있었다. 뉴턴의 과학이 수학적으로 체계화가 이루어지고 과학이 합리적, 경험적, 실험적 방법에 의해서 성공을 거두었다는 믿음은 인문사회학계에도 큰 영향을 주었다. 과학지상주의 사고, 즉 이것은 수학으로 모든 문제를 밝혀낼 수 있다는 수학지상주의 사고였다.

서양 근대수학의 영향을 받은 수학교육관은 진보적 학문주의(progressive academicism) 교육관이다. 자연현상 속에서 자연을 설명할 수 있는 수학적 문제를 발견하여 논리적으로 새로운 수학적 도구와 수학적 이론을 만들고 구성할 수 있다고 본다. 수학을 객관적이고 절대적이라는 관점으로써 절대적 학문주의 교육관과 기본적으로 같으나 수학은 자연의 문제를 해결할 수 있는 이론체계로써 점진적으로 발전할 수 있고 수학의 창조성을 인정한다. "수학은 고정된 지식의 집합체가 아닌 인간의 창조적 활동에 의해 형성된 지식 체계로서 위대한 문화적 성취로 본다." 인간이 새로운 문제에 직면했을 때 끊임없는 탐구와 논리적인 사고를 통하여 문제를 해결하며 이런 과정 속에서 수학적 지식과 능력이 성장하고 변화된다고 본다. 이 교육관은 모든 사람에게 문제를 해결할 수 있는 능력이 있으므로 각 개인의 능력을 찾아내어 개발할 수 있다고 본다[3].

이 수학교육관은 먼저 구체적으로 행동할 수 있는 학습목표를 제시하고, 다음 학습내용의 단계와 순서별로 논리적인 내용의 학습자료를 만들고, 다양한 학습방법의 기법과 전략을 개발한다. 학생들에게 의욕과 흥미를 위하여 교육보조재료를 적극 활용하고 연습과 훈련을 통한 학습평가와 행동변화를 관찰하여 지도한다. 학생들은 수학적 지식을 전수 받아 끊임없는 연습과 반복적 활동을 통해서 수학적 지식을 획득할 수 있고, 인간의 창조적 활동에 의해서 지식을 누적할 수 있다는 관점이다. 그러나 행동에 의한 수학지식의 획득과정은 교사의 입장을 강조하고 학습자 각 개인의 입장을 간과한 외형적이고 관찰 가능한 교육으로 많은 한계점이 지적되었다.

4. 기초주의(수학 기초론)

자연현상에서 변하지 않는 이론을 발견하고 설명하는 절대 진리인 수학은 비유클리드 기하학의 발견으로 절대 진리라는 황제의 자리를 위협받게 되었다. 직관적으로나 논리적으로 완전한 학문으로서의 수학이기를 수학자들은 원했다. 그러나 미적분과 집합론의 발전과 연구는 직관으로 이해할 수 없는 미분 불가능한 연속 곡선과 러셀의 역리가 발견되어 완전한 수학의 기초가 흔들리게 되었다.

이런 위기를 극복하고 수학의 확실성을 재확립하고자 하는 시도로 수학 기초론이 등장하였다. 수학자들은 수학의 기초를 기하학이 아니라 산술에서 찾았다. 해석학과 기하학을 산술로 환원하려는 노력의 일환으로 실수와 무한집합이 도입되었다[7].

4-1. 논리주의

아리스토텔레스는 경험할 수 있는 세계에 대하여 연구했으며, 합리적 사고력을 강조하고 논리학을 확립하였다. 그는 과학을 주제와 방법에 따라 몇 개의 분야로 분리하고 생물학, 천문학 정치학 등 관찰과 논리적 사고를 강조하였다.

수학적 개념을 논리적으로 전개하여 구체적으로 환원시키는 연구는 데데킨트와 프레게에 의해서 시행되었다. 논리적 기호를 사용한 수학적 정리의 서술은 페아노에 의해 시도되었다. 프레게(Frege)가 집합론의 연산을 사용하여 자연수를 공집합으로부터 구성할 수 있는 방법을 밝힌 이후로 집합론은 모든 수학을 구성할 수 있는 초석이 될 수 있다고 여겨졌다.

화이트헤드와 러셀(Russell)은 수학 전체를 논리학으로 상세하게 환원시키는 것이었다. 그후 비트겐슈타인, 치비스테크, 람지, 랑포드, 카르납, 콰인 등에 의해 수정되고 정교하게 되었다[16].

논리학이 수학을 전개하는 기초적 역할을 할 수 있다고 생각하고 의심할 여지가 없는 확실성을 수학에 부여함으로써 수학의 기초에 확실성을 제공하려고 한 것이다. 기본적인 개념과 명제들로부터 수학적 개념과 정리를 집합론을 사용하여 자연수로부터 전개한다.

모든 수학이 집합론으로 환원될 수 있다고 보았다. 그러나 집합론에서 모순이 발견되었고, 러셀의 역리로 불리는 이 문제로 인해 직관적 논리에 의해서 완벽한 수학을 구성하려는 작업은 공리적일 수밖에 없었다. 프레게와 러셀은 이 집합론의 모순을 피하기 위하여 형태이론을 도입하였다. 집합론을 재구성하여 역설들을 배제시키는데 성공하였지만, 이로 인해 공리론적 집합론은 복잡한 구조를 갖게 되었다. 환원공리, 무한공리, 선택공리 등 받아들이기 힘든 공리가 필요하였다. 결국 수학은 집합론을 토대로 하여 논리학처럼 전개할 수가 없음을 알게되었다.

수학적 대상이 관념적인 비물질적 세계를 형성하고 있다면, 인간의 정신이 어떻게 이 세계를 설명할 수 있을까? 수학이 자연을 잘 설명할 수 있다면 그 이유는 무엇인가? 플라톤주의와 칸트의 철학은 이 정신적인 기능이 직관이라고 말하고 학문적 이론을 탐구하고 연구할 때 직관을 존중하였다.

4-2. 직관주의

직관주의는 크로네커와 푸앵카레도 주장했지만 네델란드의 수학자 브로우베르(Brouwer)에 의해 제안되었다. 수학은 유한한 구성적 방법에 의해서 직관적으로 자연수를 기초로부터 건설되어야 한다. 자연수열과 같이 유한번의 단계와 연산을 사용해서, 모든 수학적 대상을 구성적인 방법으로 전개해야 한다. 따라서 무한에 대한 증명에서는 귀류법을 받아들여지지 않았다. 수학적 대상은 유한 번의 단계 내에 구성되지 않으면 존재한다고 볼 수 없다고 생각했다.

확실한 직관적 구성방법으로 수학적 지식을 전개하여 수학의 확실한 기초를 제공할 수 있

다고 생각했다. 1930년 헤이팅에 의해서 직관주의 기호논리학을 전개하는데 성공했다. 이 결과는 수리논리학이 수학의 한 분야가 되었다.

그러나 비록 논리주의에서와 같은 역설이나 모순은 피할 수 있었지만, 수학의 내용을 지나치게 제한하게되어 대부분의 수학자들이 소중하게 생각하는 고전적인 수학의 많은 부분을 포기하게 되었다[16].

비판적인 의견으로는 어떻게 수학의 결과가 자연현상에 대한 설명을 하고 응용될 수 있는가 하는 것이다. 직관주의가 주장하는 주관적 직관이 어떻게 객관성을 갖게 되는지에 대하여 적절한 설명을 하지 못했다. 수학적 진리가 언어의 매개 없이 인간의 정신을 구성할 수 있겠는가 하는 문제가 있다.

4-3. 형식주의

'수학은 가설'이라는 신념으로 공리를 설정하여 가장 완벽한 수학을 건설하려고 했던 수학자는 힐베르트(Hilbert)이다. 그는 수학은 형식적인 기호체계에 관한 학문이다. 공리를 자명한 사실(진리)로 생각했던 그리스 수학과는 달리, 단지 '이론에 대한 가정'으로 공리의 개념으로 인식하고, 형식적인 공리를 토대로 하여 연역적인 방법으로 이론을 전개하고 구성하여 수학을 만들 수 있음을 보여주었다. 유클리드의 기하학의 미비점을 보완하여 모순 없는 완전한 기하학의 새로운 체계를 세우려고 노력하였다. 공리를 새롭게 설정하여, 유클리드 기하학뿐만 아니라 기하학이 무수히 많이 있음을 보여 주었다.

이 때까지는 자연과 우주에서 법칙과 모델을 발견하여 수학을 만들었으나, 힐베르트 이후 수학은 자연과 인간의 자유로운 상상으로 만들어 내는 수학이 되었다. 이 학파에는 베르나이스, 아커만, 폰 노이만 등이 있다.

힐베르트는 수학을 공리의 기초 위에 형식적 언어와 추론의 형식적 규칙을 도입하여 논리와 기호들을 가지고, 전개하는 형식적인 논리체계로 바꾸어 놓았다. 수학의 공리들을 기호화된 식이나 기호의 모임으로 표현하고, 확립된 논리식이나 기호로 연산한 것에 논리적으로 전개하고 유도하여 논리식이 참이라는 증명은 논리식들을 전개하여 얻어진다.

그는 공리체계와 논리를 명확하고 간결하게 기호를 사용하였다. 논리주의와 직관주의 장점을 사용하고 단점을 보완하면서 수학적 방법의 확실성을 확립하려고 하였다[7].

따라서 수학은 엄밀하고 형식적인 체계의 모임이 되었다. 수학이 자연세계와 함께 사회와 정신세계까지도 수학의 대상으로 수학적 모델을 만들어 연구를 할 수 있는 보다 큰 사고의 체계가 되었다.

그러나 괴델은 1931년 다음과 같은 불완전성 정리를 증명하였다. '현재의 산술 공리계를 포함하는 무모순 공리계는 불완전하다. 즉 그 공리계의 산술적인 명제 중에는 그 공리계 안에서는 긍정도 부정도 할 수 없는 것이 존재한다.'

또 다른 문제는 일반 연속체가설, 구성가능성(constructible)공리, 선택공리 등 긍정이나 부정 어느 쪽도 증명할 수 없는 공리를 집합론에 가감할 수 있나 하는 것이다. 이 문제에 대하여 괴델은 무모순 공리계에 일반 연속체가설이나 선택공리를 첨가하여도 무모순이다 라

는 결과를 얻었다. 코헨은 위 공리 중 하나를 부정하여 집합론의 공리에 첨가하여도 새로이 모순이 생기지 않는다고 증명하였다. 그러므로 일반 연속체가설, 선택공리, 구성가능성공리는 집합론의 공리계에 독립적이라는 것이 증명되었다[3].

괴델의 불완전성 정리에 의해 수학이 모순이 없는 완전한 세계임을 증명하려던 형식주의자들의 꿈은 깨어진다. 힐베르트의 형식적 체계 내의 결정 불가능한 정리들이 존재함을 보였다. 긍정도 부정도 할 수 없는 이론이 존재하고, 형식체계 자체의 안정성을 보장할 수 없었다. 따라서 형식주의자들의 최종 목표였던 수학의 무모순은 보장될 수 없었다.

4-4. 구조주의

구조주의는 심리학(Piaget), 언어학(Jakobson), 사회이론(Marx) 등으로부터 영향을 받아, 수학에서는 부르바키(Bourbaki)학파가 출현하였다. 논리주의와 형식주의의 실패에도 불구하고 집합론의 공리계는 여전히 모든 수학을 건설하는 데 바람직한 기초로서 여겨졌다. 부르바키 학파는 적절한 공리들을 선택하여 이 공리에 따라 수학의 복잡한 내용을 공리적 체계로 될 수 있는 대로 명쾌하게 전개시키려고 하였다. 수학의 많은 분야에서 일반적인 공리적 체계를 세워 수학적인 구조로 표준화하였다. 집합론을 기본으로 하여 단순한 것에서 복잡한 것으로, 일반적인 것에서 특수한 것으로 논리적인 구조를 가진 질서 있는 수학을 만들려고 했다. 이 학파는 집합론을 토대로 하여 기본구조에서부터 시작하여 수학의 모든 분야를 야심에 찬 계획을 가지고 재 개편하려고 했다. 이와 같은 작업은 논리적으로 엄밀하게 적용하여 구조를 만들어 각 분야의 수학 책을 출판하였다. 그러나 집합론의 공리계에 대한 무모순성은 아직 증명되지 않았다[12]. 또한 지나친 구조주의는 엄밀성을 강조하여 수학을 어렵게 구성하여서 수학을 고립화시키고 완성된 지식으로 화석화 시켰다.

이러한 기초주의 수리철학은 모두 수학의 절대적 확실성에 대한 믿음을 가지고 있었으며 그 기초를 완전하고 확실하게 확립하려고 노력하였다. 따라서 수학은 자연현상이나 인간생활과는 관계없이 논리, 형식, 직관, 구조 속에 존재해야 한다고 보았다. 이 때의 교육관은 재건주의(reconstructivism) 수학교육관이라고 한다. 수학은 하나의 건축물처럼 이론적 구조물로 창조되며, 이론적 모순이 있을 때 다시 재구성하여 완전하게 만들 수 있으나 전체적으로 완전한 이론은 없다는 교육관이다. 재건주의 수학교육관은 지금까지 발전되어 온 교육관의 장점을 취하고 단점을 보완하는 교육관이다[3].

수학은 수학적 이론을 형식화하는 인간의 활동이라 할 수 있다. 따라서 교사는 지식의 전달자와 학습의 안내자로써 학습목표를 설정하여 수학적 활동 즉 추측하고 논리적으로 추론하여 자신의 생각을 설명하고 정당화하며 비판적으로 검토하는 과정을 통하여 개념의 구조와 관계 등을 파악하며, 학생들의 인지적 구조변화를 유도하도록 한다.

브루너(Brunner)[2]는 지식의 구조이론과 발견 학습법으로 나선형 방식의 교재배열 등의 이론을 연구하였다. 그는 '지식의 구조를 학습한다는 것은 그 지식을 이해, 기억, 적용할 수 있도록 학습하는 것을 의미하고, 구조를 파악하면 이해가 잘되고, 기억하기 쉽고, 전이효과가 있고, 고등지식과 초보적 지식 사이의 간격을 좁혀준다.'고 주장하면서 학문의 구

조가 되는 기본원리들을 가르쳐야 된다고 하였다. 나선형 교육과정은 각 학문분야에서 가르쳐야할 기본개념은 많지 않은 것으로 가정하고 기본구조의 점진적, 위계적, 반복적인 학습을 강조하고 있다.

교과서와 교육목표는 논리, 형식, 구조 등이 나타나고 수업은 수학적 이론들을 효과적으로 전수시키는 방법으로 전개된다. 수학의 활용은 수학적 이론을 확실히 이해를 한다면 가능하며 수학은 변하지 않는 논리, 형식, 구조 속에 있음으로, 잘 기억하여 응용하도록 해야한다고 본다. 그러나 학문주의와 다른 점은 기본적 지식체계를 토대로 적용하여 구조와 체계를 수정하여 새로운 수학으로 만들 수 있다는 것이다.

교육내용이나 방법 그리고 교육의 한계점 등은 진보적 수학교육관과 같으나 다른 점은 창조적 수학 능력을 기르기 위해서는 학습에서 엄밀한 논리, 직관, 형식과 구조를 강조하여 지도하는 수학교육이다.

교과서는 집합개념과 수학의 구조(structure), 논리적 엄밀성, 발견적 학습, 나선식배열 등 학문중심교육으로 통합화와 구조화를 강조하였으며 수학의 내용이 추상화와 일반화가 되어 학생들에게 수학이 어렵다는 인상을 주었다. 또한 학생들의 적극적인 활동은 기대할 수가 없었다.

5. 구성주의

수학의 완전성과 확실성을 보장하고, 수학의 본질을 찾고자 하는 수학 기초주의에 대한 노력이 실패하였다. 따라서 수학은 공리를 설정하여 논리적으로 전개하여 수학적 이론들을 체계화하고 그 공리적 세계에서는 절대적인 이론들이지만, 오류 가능한 이론이 있음을 인정하는 상대주의 수리철학이 나오게 된다.

이제는 수학이 절대적 확실성과 객관성의 학문이 아니고, 역사 속에서 지식사회 구성원들의 창조와 합의에 의해서 이루어지는 학문체계로 바뀌었다.

수학의 공리와 정의는 인간의 무한한 상상에 의해서 창조되어 수학의 이론들을 구성하게 되었다. 현대수학의 특징 중 하나는 구성적이고 정적(靜的)인 수학이다. 이것은 칸토어가 집합의 개념을 도입하여 수학을 연구할 때 나타난다. 무한집합은 한없이 셀 수 있는 것이지만 무한집합 전체를 하나로 보면 유한적인 대상으로 다룰 수 있다. 즉 폐쇄적이고 정적인 무한집합을 생각하고 집합들 사이의 관계와 성질들을 조사하여 이론들을 구성해 가는 수학이 되었다. 이러한 수학은 많은 분야에 응용되고 다양한 양상 가운데 가장 핵심적인 개념만을 대상으로 하기 때문에 수학이 추상화되고 여러 개념들 사이의 관계와 구조(構造)를 연구하는 수학으로 발전하게 되였다. 수학은 만들어진 수학적 개념들의 관계와 구조를 연구하며 응용하는 과학으로 모든 사람들에게 문제해결 등 현대생활에서 응용되는 필요한 지식이 되었다.

수학이 자연세계와 함께 사회와 정신세계까지도 수학의 대상으로 수학적 모델을 만들어 연구를 할 수 있는 보다 큰 사고의 체계가 되었다. 이러한 형식적인 공리를 토대로 수학을

창조해 가는 것을 구성적(constructive) 공리주의라 한다.

수학적 구조는 추상적 개념으로 이루어진 구조물로 완전히 인간의 정신으로부터 나온 아름다운 구성적 창조물이다. 자연의 비밀과 사회의 역동적 구조와 정신세계의 구조를 파악하는데 활용할 수 있는 지식이 되었다.

5-1. 준 경험주의

절대적 학문주의는 자명하다고 생각되는 공리를 기초로 하여 논리적으로 전개하여 수학적 이론체계를 만들어 간다. 그러나 경험에 의한 주관적인 이론과 가설들을 증명과 반박의 논리를 통해 비판과 추측으로 끊임없이 개선되어 수학적 지식이 성장한다는 것이 준 경험주의(Quasi-empiricism)이다.

준 경험주의는 20세기 중반에 라카토스(Lakatos)에 의해서 시작된다. 공리적 공간에서는 절대적인 이론들로 이루어져 있지만 오류가 있을 수 있는 이론도 있음을 인정하는 상대주의 또는 오류주의 수리철학이 등장하게 된다.

준 경험주의자는 Lakatos, Davis와 Hersh, Tymoczko 등이 있고, 수학은 공리를 기초로 연역적 전개의 학문이 아니고 거꾸로 자연에서 발견한 참인 이론들에서 수학적 공리가 결정된다는 수리철학이다. 수학은 오류 가능하며 인간의 창조적 활동의 산물이라고 주장한다.

그들은 이전까지의 수학을 지배해온 형식적이고 연역적인 학문주의에 대한 비판에서 시작되었다. 완성된 지식으로서의 수학의 측면만을 강조해 왔던 전통적인 학문주의 보다는 역사적으로 수학적 개념들이 발전하고 발생되었던 과정으로서의 측면을 강조한다. 수학이 본질적으로 불완전하다고 해도 수학은 수학자들의 연구에 의해서 지식이 축적되고 수정되어진 인간적인 창조활동의 결과이다. 수학적 결과가 결코 최종적이고 완전한 것으로 생각할 수 없기 때문에 새로운 것이 출현할 수 있고, 엄밀성의 기준이 변화할 수도 있다. 수학은 그 역사와 경험적 과학에 적용에서 고립된 것으로 볼 수 없다는 것이다.

수학에 대한 전통적인 철학은 수학을 정적이고 완성된 지식체계로 보도록 하였으나 라카토스는 수학도 과학처럼 경험을 강조하면서 수학적 발견의 논리로 증명과 반박의 반복적인 활동으로 개선된 추측으로 새로운 이론이 나오게 된다. 즉 수학은 증명과 반박의 논리에 의해 추측과 비판의 끊임없는 개선을 통하여 변증법적으로 성장한다. 이처럼 수학의 역사적 측면과 인간적인 측면을 강조함으로써 수학의 비 형식적 측면을 부각시켰다. 수학의 형식적인 측면보다는 인간적인 경험과 추측으로 이론을 만들고 증명과 반박으로 이론들을 수정하여 개선하는 수학으로 보았다[12].

준 경험주의는 수학이 절대적으로 변하지 않는 학문이 아니라 인간의 활동으로 살아서 성장하여 얼마든지 변화할 수 있는 수학을 강조하였다. 학문적 틀 속에서 구조적으로 갇혀있는 구조주의의 경직성을 알려주었다.

이러한 설명은 수학 분야의 발달을 모두 설명할 수는 없다. 그러나 수학의 절대성에 대한 약점을 지적함으로 수학을 바라보는 새로운 관점은 우리에게 보여주었다.

5-2. 조작적 구성주의

조작적 구성주의는 수학을 공리를 기초로 하는 논리적인 구조의 절대 불변의 수학이 아니고 아동들의 발달단계와 같이 수학도 계속적인 수정과 변화를 거쳐서 구성되어진 지식이라고 본다. 구성주의의 인식론적 바탕은 피아제(Piaget)의 조작적 구성주의에 그 뿌리를 두고 있다. 그는 인식론적 측면에서 학생들이 경험을 기초하여 주관적으로 지식을 구성한다고 보았다. 아동이 유아기에 감각운동의 구조가 나타나고 다음으로 행동의 일반화와 반영적 추상화가 일어나 구성된 조작활동으로 자신의 환경에 상호작용으로 적응하여 지식을 형성한다. 아동들의 정신적 구조의 발달은 감각적 운동단계를 거쳐 사물을 자기관점에서 보는 단계와 구체적, 형식적 조작단계로 발전한다. 아동의 심리발달의 실험을 통하여 계속적인 수정된 조작활동으로 정신능력이 성장한다는 정신구조는 수학의 개념발달과 무관하지 않음을 보여주었다.

5-3. 급진적 구성주의

수학은 경험세계와의 상호작용에 의해서 개인의 인지과정에 의해 구성되는 지식이며, 수학적 지식의 타당성은 수학자들의 합의에 의해서 이루어진다. 학습자의 자신의 활동에 의해서 지식이 구성되며 수동적인 주입에 의해서 이루어지지 않는다.

폰 글라저펠트(von Glaserfeld)는 개별 주체가 경험하는 환경에 적응하기 위해 지식을 구성하는 것이다. 지식의 이해과정은 이용 가능한 내용을 주관적으로 개념구조를 구성하기 때문에 다양하게 이해하게 된다고 하였다[12].

급진적 구성주의는 수학의 절대성을 부정하고 얼마든지 수정하고 보완할 수 있는 지식이다. 자기 나름대로 주관적 지식으로 객관성을 부여할 수 없다. 지식은 인식하는 주체에 의하여 능동적이며 개별적으로 구성되며, 인식의 기능은 경험 세계에 적응하고 문제를 해결하기 위해서 인지구조를 형성하는 주체가 된다. 구성활동으로 구성과정은 반복적이고 주체가 경험 세계를 조직하는데 도움을 주는 것이다. 급진적 구성주의는 언어의 비공유성과 의미의 주관성을 전제로 하기 때문에 의사소통은 단지 우연적으로 형성된 합의 영역에 의하여 이루어진다. 수학적 타당성은 자연의 세계에 실재하여 발견되는 것이 아니라 자연과 경험의 세계에 응용될 수 있는지 검증하여 수학자들의 동의에 의해서 이루어진다.

5-4. 사회적 구성주의

사회적 구성주의는 수학은 인간과 사회적 활동에서 발생되고 삶의 환경과 상호작용에서 나타난 수학적 표현으로 다양하게 구성될 수 있다. 수학은 사회적 환경에 따라 구성되는 사회적 구성물로서, 절대적 불변의 수학적 지식은 없으며 오류도 있을 수 있다. 수학은 가치 독립적이지 않으며 다른 지식과 문화, 언어의 관습, 사상 등과 관계가 있다. 수학의 객관성의 근거는 사회적인 언어 관습과 사회적인 합의에 있다. 사회적 구성주의는 수학적 지식의 정당화보다 발생의 과정에서 언어의 관습을 기초로 하는 주관적 지식으로부터 증명과 반박에 의한 검정과정을 통해서 새로운 객관적 지식으로의 순환 이행 과정을 거친다. 이러한 사

회적 상호 작용에 의해서 지식이 형성하며 새로운 객관적 지식들은 구성되어 체계화를 이루게된다.

사회적 구성주의는 지식은 보편적인 형태가 있는 것이 아니라 각 개인의 정신으로부터 새롭게 창출되어야 한다. 직접적인 활동을 통하여 경험을 바탕으로 가설의 타당성과 논리적 전개와 수학적 증명을 하게 된다. 개인의 경험과 정신 활동에 의해서 이론을 추측하고 서로간의 대화로 상호작용과 의사소통으로 이론을 검증하여 객관화와 체계화한다고 본다. 따라서 수학의 학습에서는 언어를 매개체로 대화하고 변증법적 방법으로 객관적 지식을 내면화하고 재구성하는 과정으로 주관적 지식을 만드는 순환과정을 거치게 된다[12].

구성주의(constructivism)에서는 수학은 항상 절대적인 진리가 아니고 어떤 가정과 조건에서 진리인 지식 체계이다. 또한 얼마든지 수학의 개념들을 창안하고 구성할 수 있다고 본다. 따라서 무한히 발전하며 변화하는 지식으로 수학도 하나의 사회적 이론 구조물로서 모순이 있을 수 있으며, 또한 모순을 고칠 수 있다는 수리 철학이다. 이러한 수학관을 가지고 학생들 각 개인의 개성을 중요시하는 수학교육관이 구성주의이다.

수학을 배운다는 것은 다른 사람으로부터 전수 받는 것이 아니고, 각 개인이 수학의 내용을 생각하고 행동하므로 알아 가는 것에 초점을 두는 교육관이다. 학생들이 스스로 능동적이고 의도적인 활동을 통하여 유연한 사고로 개념을 이해하도록 한다. 아주 명백한 사실도 비판적 사고를 가지고 토론하고 탐구하여 확실성을 확보해야 한다. 추상화와 창의적 사고를 가지고 증명하고 적용하므로 수학적 지식을 획득할 수 있다. 수학 지식의 획득은 학생들의 개인적이고 개별적인 사고와 논리적 구성으로 이루어진다고 보기 때문에, 학습은 학생입장에서 다양하게 구성된다.

구성주의는 학생들이 스스로 생각하여 자신의 생각과 이론을 발표하고 이론에 대한 대화와 토론으로 정당성을 점검하도록 교육한다. 따라서 능동적으로 자신의 잠재력을 확대하고 신장하며, 수학적 이론을 자신의 경험과 추측에 의해서 구성한다.

구성주의 수학교육관은 학생들이 스스로 학습내용과 목표를 인식하고 설정하여 수업에 직접 참여하여 이끌어 가는 능동적 활동과 구성을 통하여 수학적 지식을 배울 수 있다는 교육관이다. 수학적 지식은 수동적으로 받아들여지는 것이 아니고, 학습자의 능동적이고 의지적으로 추상화하고 창안하여 증명하므로 적용하는 활동으로 얻어진다.

폴리아는 "수학의 역사적 발전 단계에 따라 발견에 참여하도록 할 때 수학을 가장 잘 이해한다."고 생각했다. 또한 자신의 경험을 조직화해 가는 적응과정을 통하여 학습자 스스로 지식을 구성하고 지식을 발견하여 알게된다는 것이 구성주의의 기본적 관점이다[5].

학생들은 수학의 학습내용을 단순히 모방하지 않고 동화(同化), 즉 이해하여 자기 것으로 만들며(Piaget), 수학적인 생각과 지식의 구성을 자신들이 창안한 방법으로 학습한다. 따라서 학생들이 수학적 지식을 구성할 수 있는 분위기를 만들어 줘야 한다. 이런 관점에서 학생들이 서로 협동하며 토론에 의해서 추측하고 판단하며, 추론을 통하여 문제 해결력을 기를 수 있도록 도와주어야 한다[3].

"교사가 구성하고 있는 지식과 학생이 구성하는 지식이 얼마든지 서로 다를 수 있다. 그

러나 학생들이 구성한 지식이 다른 사람들에게 얼마나 납득시킬 수 있느냐에 따라 평가가 이루어져야 한다."[5] 교사의 의도적인 교육으로 학생들이 의욕을 가지고 의지적으로 어려움을 극복하며, 즐거움과 기쁨을 주는 기회와 환경을 지속적으로 만들 수 있도록 도와주어야 한다.

수업방법으로는 전체적인 목표만을 제시하고 구체적이고 세부적인 학습 목표를 가지고, 학습에 대한 동기유발을 갖게 한다. 동기유발을 통하여 학생들 스스로 수업에 참여해 나가면서 자신의 흥미와 관심, 수준 등을 고려하고, 인식은 학습자의 경험으로부터 이끌어진다는 생각으로 수업을 진행한다. 구체적인 상황을 배경으로 지식을 제공함으로써 학습자의 인지 구조에 따라 자신의 지식을 스스로 구성한다.

구성주의 수업은 자신의 생각을 명확히 할 수 있도록 구체적 자료를 제공하여, 추상적으로 지식을 제공하는 수업에 비하여 주어진 과제에 대한 근본적인 이해를 도울 수 있다.

창안한 자신의 생각을 다양하게 적용하여 학습한 후 형성된 자신의 지식이나 개념을 다른 사람과 논의도 필요하다. 학습 환경에 있어서 협동적 분위기를 형성함으로써 사람마다 얼마나 다양한 생각과 견해를 가지고 있는지를 배우게 한다.

자기 자신의 지식을 바탕으로 스스로 구성할 수 있는 주관적인 수학적 지식을 가지고 비판하고 검증할 수 있는 적극적인 학생들은 많지 않다고 본다. 지식을 스스로 구성하는 과정에서 시간이 많이 걸려서 비효과적인 학습방법이 될 수도 있다. 또한 학습자의 자발성이 너무 강조되어 교사와 교과내용, 교과과정 등 외적 동기가 무시될 수 있다. 학생 수가 많거나 이해 수준이 서로 다른 집단에서는 오히려 혼란을 일으킬 수 있다. 수학적 이론이나 개념이 학생들이 이미 가지고 있는 지식의 구조와 연결되지 않을 때와 재구성 된 지식의 방향이 잘못될 경우에는 학습에서 실패하게 된다. 따라서 더욱 철저한 준비와 지도가 필요하다.

학생들의 학습에 대한 주인 의식을 갖게 하여 적극적이고 자율적인 학생들의 생각과 지식, 능력을 적극 발휘시킬 수 있는 분위기를 조성해야 한다. 학습 환경에 따라 학습자 스스로 지식을 구성한다고 보고, 교사가 학생들의 사고에 대한 깊은 통찰력을 가지고 있을 때, 의미 있는 학습이 가능하다.

6. 창조적 수학주의

이십세기 초 수학의 전체 내용이 약 80권의 책이면 충분하였다. 이 때 수학의 분야는 12가지 정도로 분류할 수 있었다. 그러나 현재까지 연구되고 만들어진 모든 수학의 내용을 기록하기 위해서는 적어도 10만 권 이상의 책이 필요하고, 수학의 분야도 크게 분류해서 약 70개 이상의 분야가 된다. 오늘날 해마다 약 20만 개의 새로운 수학 정리가 발표되고 있다. 따라서 세 가지 이상 분야에서 최근의 연구에 정통한 사람이 없을 정도로 다양하게 발전하고 있다.

수학의 양적 팽창과 발전으로 수학의 정의도 변하고 있다. 수학은 수, 형태, 운동, 변화,

공간에 대한 연구라는 정의로부터 수학은 대상의 본질적인 성질과 구조를 파악하는 '양식(pattern)'의 과학이라는 정의가 나왔다[15]. 따라서 양식의 과학인 수학은 우리가 살고 있는 물리적이고 생물학적이며 사회학적인 세계와 우리의 정신적인 세계 모두를 관찰하여 원리를 찾아내고 새로운 세계를 만들어 가는 학문이다. 수학의 세계는 완전히 인간의 창조물로서 수학의 연구는 궁극적으로 인간 자체에 대한 연구이며, 우주와 자연 그리고 인간을 포함하는 광범위한 영역을 연구하고 있다.

현대 수학에서 컴퓨터의 출현은 수치해석학의 연구를 강화하고, 연구가 침체되었던 행렬 이론의 연구, 논리학의 중요성, 이산적인 추상구조 이론의 중요성 등을 환기시켰다. 선형계획법과 계산의 복잡도 이론 및 자동화 이론과 같은 새로운 분야의 창조를 유도했다. 현대수학은 집합론에서 다룰 수 없는 애매한 집합인 퍼지(Fuzzy)집합을 창안한 자데(Zadeh)의 퍼지 수학이 있다. 결정론적이 아닌 비 선형 동력학과 카오스 이론 등은 여러 가지 답이 가능하며, 연속이지만 어느 곳에서도 미분가능하지 않은 함수들 중에는 어느 조건에서 미분방정식의 해가 될 수 있나 등 연구되고 있다. 만델브로(Mandelbrot)는 **프랙털**(Fractals)이란 책을 내놓았다. 이 책에서 무질서한 자연현상에서 어떻게 프랙털을 만들어 내는지 밝혔다. 컴퓨터를 이용하여 상당히 흥미 있고 매력적인 도형을 만들어 냈다[15].

불연속적인 현상인 급격한 변화를 수학적 모형의 급변론 등 다양하고 전혀 새로운 수학을 도입되어 해결해야할 문제들이 새롭게 나타나고 있다. 정보와 통신 그리고 구조를 파악하고 분석에 의해서 지배되는 오늘의 세계에서 수학과 컴퓨터의 결합은 더욱 필요하게 되었다.

현대수학에 대한 다양한 견해가 가지는 특징을 오늘날 지도적인 수리철학자의 한 사람인 Hersh(1993)는 다음과 같이 정리했다[8].

"수학은 '인간적'이다. 수학은 인간문화의 한 부분이고 문화와 조화한다. 수학적 지식은 오류 가능하다. 과학처럼 오류를 수정하고 재 수정함으로써 진보한다. 시간과 장소와 다른 어떤 것에 따라 증명이나 엄밀성에 상이한 해석이 존재한다. 증명에 컴퓨터를 사용하는 것은 엄밀성에 대한 전통적이 아닌 해석이다. 경험적 증거와 수치적 실험, 확률적 증명도 수학에서 믿어야 할 것을 결정하는 데 도움을 준다. 수학적 대상들은 사회적, 문화적, 역사적 존재의 한 특수한 종류이다. 이러한 수학관의 획기적인 변화는 20세기 후반에 이성의 절대성과 자아의 명증성, 언어의 도구성 등을 비판하고 과학의 객관성과 합리성을 거부하는 서구 철학의 '반데카르트' 경향과 무관하지 않다. 그리고 실제 과학사에 근거하는 역사적 접근이 새로운 과학철학에서 강조되고 있는 것처럼 오늘날 수리철학도 '수학사적 경향'을 나타내는데 이는 수학자들의 실천을 중시하는 현대수리철학의 당연한 귀결이다."

인간중심 수학교육관은 지금까지 발전되어 온 모든 수학교육관의 장점을 취하고 단점을 보완하는 교육관이다. "수학은 형식화된 명제의 체계이기보다는 형식화를 행하는 인간의 활동 그 자체라고 하는 견해가 많다."[2].

페스탈로치(Pestalozzi, 1746~1827)는 인간 지식의 원천이 직관에 있다고 생각하고, 그 기초가 되는 것으로 "혼돈의 세계에서 개념적 정리의 개념을 수, 형태, 언어에 의해서 분류하고 인간 이성발달의 토대가 되는 참된 도야재로서 수학교육을 강조하였고, 정신체조로서 수

학은 인간성 자체의 본성에 들어맞으며 모든 인식의 기초가 된다."고 생각하였고, "각 개인은 전 인류가 과학을 창조하였던 유사한 경로를 밟아서 지식에 도달하지 않으면 안 된다." 한편, "먼저 실물 계산을 가르치고 구체적인 실험으로 여러 가지 수속을 발견토록 한 다음에 비로소 추상적인 법칙이나 추상적인 과제를 주지 않으면 안 된다."[2]는 아동에 대한 애정 어린 교육사상을 주장했다.

인간은 지적 호기심만 자극한다면 자발적으로 학습도하고 노동도 한다고 한다. 수학시간에 문제 중에서 수학의 이야기, 퍼즐문제, 정보화 시대에 수학의 필요성과 컴퓨터의 발전으로 교과서 문제들의 시각화 등은 수학의 흥미를 끌어 낼 수 있는 양념 역할을 할 수 있다.

이런 관점에서 오늘날에도 고대로부터 변화해온 모든 수학교육관들의 장점들이 다 필요하다. 교사는 단순히 지식의 전달자가 아니고 학습의 안내자로써 학생들이 스스로 학습목표를 설정할 수 있도록 하여 능동적이고 자발적인 협동으로 수학적 활동, 즉 추측하고 논리적으로 추론하여 자신의 생각을 설명하고 정당화하며 비판적으로 검토하는 과정을 통하여 개념의 구조와 관계 등을 파악하며, 학생들의 인지적 구조변화를 유도하도록 해야 한다. 문제에는 해답이 없는 것들이 있으며 풀이과정도 얼마든지 다르게 나올 수 있으며, 정확한 풀이과정이 없는 문제들도 얼마든지 있다. 이런 문제들은 어떻게 푸는 것이 경제적이고 간편한가 생각할 수는 있지만, 다양한 풀이 방법이 있으며 자신의 논리적 사고로 풀이를 전개해 나가면 완전한 학습이 된다는 유연한 사고를 촉진시킬 수 있는 언어구사력과 학습환경을 만들도록 도와주어야 한다.

세계화와 정보화 시대는 과거 산업사회와는 달리 지식의 양이 폭발적으로 증가하며 사회의 변화가 다양하게 되어서 여기에 적응하여 살아갈 자율적이고 창의적인 인간을 기르기 위해서는 철저히 수학을 가르쳐야 한다. 왜냐 하면 수학을 통하여 논리적이고 합리적인 사고력을 길러 학생들의 두뇌를 개발하고, 끈기와 치밀성을 배움으로 인격을 수양할 수 있기 때문이다. 또한 미래를 예측하고 문제를 탐구하고 논리적으로 추론하는 능력과 문제 해결능력 등 창의력을 기르기 때문이다. 이러한 수학교육은 대화와 토론 등 즉 협력하는 수학적 활동을 통하여 인간관계를 증진시키며, 컴퓨터 등 교육보조재료를 이용한 다양한 지도와 평가가 요구된다.

학생들에게 지식을 수동적으로 주입시키는 일이 아니고 학생이 능동적이고 활동적으로 스스로 생각하여 진리를 깨달을 수 있도록 도와주어야 한다. 학습자가 깊이 생각하게 하기 위해서는 학습에 흥미를 느끼게 하여 학생이 가지고 있는 잠재력을 확대하고 신장하도록 도와주어야 한다. 학생의 자발적인 행동과 독자적인 활동으로 학습의 발전적 변화도 발견학습에 포함된다. 문제를 풀 때 처음 떠오르는 수학적 아이디어와 풀이법의 발견은 학생 스스로 감격을 느낄 수 있어야 한다. 이런 수업을 위해서 교사는 학습의 내용과 질문 등 철저한 준비가 필요하다.

학생 스스로 배우려는 의욕과 자신감을 가지고 능동적인 탐구와 자신의 학습방법을 가지고 수학적 활동을 통하여 스스로 발견할 수 있도록 도와주어야 한다. 지금까지는 교사의 관점에서 수업을 설계하고 실행하고 평가하였다. 그러나 미래에는 인간 중심적인 교육으로 학

생의 입장에서 수학의 내용을 선택하고 수업을 실행하고 평가하여야 한다.

다양한 수학교육관의 장점을 살리고 단점을 보완하여 교육하면서, 활기차고 즐거운 학교생활을 위하여 계열별 구분 없이 자기의 능력과 진로 또는 취향에 맞는 수학과정을 선택하게 해야 한다. 따라서 미래에는 수학학습에서 알아 가는 기쁨을 주는 인간 중심적인 교육이 되어야 할 것이다.

7. 결론

급변하는 정보화의 현대사회에서 잘 적응하여 앞서가기 위해서는 우수한 수학교육이 필요하다. 수학교육을 통하여 사고력과 창의력 배양, 의사 소통능력과 인간관계 증진, 문제 해결능력과 통찰력 등을 기를 수 있기 때문이다. 또한 각자의 전문적인 분야에서 부드러운 인간관계, 평생 학습해야하는 지식사회의 일원으로 누구와도 어울려서 협력하여 일할 수 있는 능력은 합리적인 수학적 사고에서 길러지기 때문이다. 수학은 인간정신과 문화의 산물이며 현대과학의 발달과 인간 삶의 모든 곳에 활용되고 인간성의 도야에 필요한 문화적 자산이다.

옛날의 발명은 대부분 원리의 이해보다는 경험적인 발명이 많았다. 그러나 오늘날의 새로운 발명은 과학적 원리에 의한 것이다. 새로운 기술의 창출과 발명 없이는 국가경쟁력이 없게된다. 따라서 수학 학습에서 폭넓게 경험하고, 깊이 있게 사고하고, 수학적이고 합리적인 판단과 활동을 하는 적극적이고 창의적인 인간을 길러내는 일은 국가경쟁력 차원에서도 매우 중요하다.

학생들이 실제생활에서 경험할 수 있고 필요한 수학적 상황과 문제를 만들어 수학의 학습재료를 활용하여 학생들이 현실적인 느낌과 관심을 가질 수 있도록 하여야한다. 수학학습의 목표가 확실한 가운데 형식화와 추상적인 수학의 이론을 이끌 수 있는 실제주의 교육도 필요하다.

구성주의 학습에서는, 수학을 배울 때 수학적 지식은 전수 받는 것이 아니고 자신의 활동으로 탐구하여 새로운 지식을 스스로 구성하여 배우게됨으로 논리성과 창의성을 배울 수 있다. 교사는 학생들에게 학습자료의 제공자와 안내자로서 수학시간에 깊은 사고력을 불러일으킬 수 있는 분위기와 수학에 대한 호기심과 매력을 느끼도록 만들어야할 것이다. 약간의 긴장 속에서 즐거움과 희열을 가질 수 있는 과목이 되게 해야 한다.

학생 스스로 배우려는 의욕과 자신감을 가지고 능동적인 탐구와 자신의 학습방법을 가지고 수학적 활동을 통하여 스스로 발견할 수 있도록 도와주어야 한다. 인간중심의 수학교육은 학생의 입장에서 수학의 내용을 선택하고 수업을 실행하고 평가하여야 한다.

현대 사회는 급변하는 정보화사회이기 때문에 우수한 수학교육이 절실히 필요하며 질 높은 교육을 통하여 미래를 창조해 갈 수 있는 창의적 능력을 학생들에게 길러줘야 할 의무가 우리에게 있다.

참고 문헌

1. 강문봉, **Lakatos의 수리철학의 교육적 연구**, 서울대학교 대학원 박사논문, 1993.
2. 김응태, 박한식, 우정호, **수학교육학개론**, 서울대학교 출판부, 1984.
3. 김종명, "수학사에서 수학의 패러다임 형성과 수학교육관," **한국수학사학회지** 제10권 제2호(1997), 53-63.
4. 나귀수, "증명의 본질분석과 지도방향 탐색," *Math Festival Proceeding* 제2집 제3권 (2000), 160-177.
5. 남승인, "수학교육과 교사의 수학관," *Proceedings of Math. Education*, Vol. 3, The 18th National Meeting of Math. Education(1995), 185-193.
6. 남승인, "교사의 수학관과 구성주의," **초등수학교육**(한국수학교육학회지 시리즈C) 제2권 제1호(1998), 15-26.
7. 박문환, **수학교육의 철학적 기초에 대하여**, 서울대학교 대학원 석사논문, 1989.
8. 박창균, "20세기 수학의 패러다임," **한국수학사학회지** 제9권 제2호(1996), 22-29.
9. 신현성, **수학교육론**, 경문사, 1995.
10. 유연주, 임재훈, "급진적·사회적 구성주의와 포스트 모더니즘," **대한수학교육학회 논문집** Vol. VII, No. 2(1997), 359-380.
11. 임재훈, "플라톤주의, 듀이주의, 구성주의 수학교육철학," *Math Festival Proceeding* 제1집(1999), 212-231.
12. 정영옥, "수리철학의 변화와 수학교육에의 시사점," **대한수학교육학회 논문집** Vol.VII, No.1(1997) 295-316.
13. Boyer, Merzbach 저/양영오·조윤동 역, **수학의 역사**, 경문사, 2000.
14. Davis, Hersh 저/양영오·허민 역, **수학적 경험·하**, 경문사, 1995.
15. Devlin 저/허민·오혜영 역, **수학: 양식의 과학**, 경문사, 1996.
16. Eves 저/이우영·신항균 역, **수학사**, 경문사,1995.