Historia Mathematica Vol. 14, No. 1, 2001, 27-34

바나하 시대의 바나하 공간 이론

한양대학교 수학과 **조종만**

Abstract

In this paper, we investigate the development of Banach space theory in the early stage in historical point of view.

0. 서론

16세기 말부터 17세기 초, 즉 갈릴레오(Galileo, 1564~1642)와 케플러(Kepler, 1571~1630) 시대에 천문학이 급속히 발전했던 바와 같이 19세기 말부터 20세기 초에 걸쳐 수학이 획기적으로 발전되었다. 화이트헤드(J.H.C. Whitehead, 1861~1947), 힐베르트(D. Hilbert, 1862~1943), 르베그(H. Lebesgue, 1875~1941), 브로우베르(L.E. Brouwer, 1881~1966) 등이 이 시대의 수학 발전에 기여했던 수학자들이다. 특히 현대 수학은 1930년부터 1940년에 걸쳐 전성기를 맞았으며 이 무렵 파리 대학의 부르바키(Bourbaki) 수학자 일단, 모스크바 대학의 콜모고로프(Kolmogrov), 독일에서는 괴팅겐 대학의 힐베르트(Hilbert)를 중심으로 연구가 활발히 이루어졌다. 히틀러의 유태계학자들에 대한 탄압으로 괴팅겐 연구팀이 붕괴하면서 아인슈타인(A. Einstein), 바일(H. Weyl), 폰 노이만(J. von Neuman) 등의 학자들이 미국 프린스턴 대학의 고등 연구소(Institute of Advanced Study)에 합류하고 고등 연구소가 수학 연구의 중심지가 되었다.

이와 같은 무렵에 동구라파에서는 폴란드의 바나흐(S. Banach, 1892~1945)를 중심으로 마주르(S. Mazur), 리츠(F. Riesz), 슈타인하우스(H. Steinhaus) 등의 학자들에 의하여 새로 탄생한 바나하 공간 이론의 연구가 활발히 진행되었다. 현재 바나하 공간은 수학의 여러 분야에서 많이 응용되고 있는 선형 함수 해석학의 주류를 이루고 있다

이 논문에서는 바나하 시절(1920년경부터 약 20년 간)의 바나하 공간 이론의 연구 업적과 연구 동향을 살펴보기로 한다. 편의상 1920년부터 바나하 책 [3]이 출판된 1932년까지의 기간을 전기라 칭하고, 1932년부터 10여 년 간을 후기라 칭하기로 한다.

1. 전기의 바나하 공간 이론

노옴 공간(normed linear space)이 선형 대수학이나 실변수 함수론에서 분리되어 새로운 분야로 발달하기 시작한 기점은 1918년에 발표된 리츠의 논문 [41]까지 거슬러 올라간다[14, p. 122]. 그리고 바나하 공간(당시의 espace du type (B), space of type (B))에 관한 연구는 1920년 바나하의 박사학위 논문(*Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, University of Leopol, June 1920)에서 처음으로 나타나며 이 논문은 2년 후에 *Fund. Math.* 3(1922), p. 133~181에 출판된다.

물론 1910년대에도 르베그 공간 L_p 등 몇몇 특수 공간에 관해서는 알려진 바가 상당히 많았다. 오늘날 리츠의 표현 정리(Riesz representation theorem)로 널리 알려진 정리에서 L_p $(1<p<\infty)$의 경우는 1910년 리츠에 의하여 증명되었고[40], L_1의 경우에는 1919년 슈타인하우스에 의하여 이미 증명되었다[50]. 일반 바나하 공간에 대한 연구는 바나하의 박사학위 논문이 나온 후부터 본격적으로 시작되었다. 이 무렵에 바나하, 리츠, 슈타인하우스, 마주르, 샤우더(J.P. Schauder), 슈르(M.J. Schur) 등의 학자들이 바나하 공간 연구에 참여했다. 현재 대학원 과정 실해석학 교과서에 흔히 볼 수 있는 여러 가지 중요한 정리와 바나하 공간 이론의 기초가 되는 여러 가지 정리가 이 시기에 이미 발견되어 바나하 공간 이론의 초석이 놓여졌다. 예를 들면 여러 형태의 한-바나하의 확장 정리(노옴 공간 X의 부분공간에서 정의되는 유계 선형 범함수는 그 범함수의 노옴을 유지하면서 X 전체로 확장시킬 수 있다는 사실과 이 결과에 의하여 얻어지는 여러 가지 사실들)는 1927년 한(Hahn) [20]과 1929년 바나하 [2]의 연구 결과이다. 그리고 바나하-슈타인하우스의 정리의 원형(original form) 역시 1927년에 증명되었다[6]. l_1의 슈르 성질(l_1 내에서 수열의 약수렴이나 노옴수렴이 일치한다는 사실)은 1921년에 발견되었고[45], 오늘날 바나하-마주르의 정리로 알려진 함수 공간 $C[0,1]$의 universality 성질(모든 separable Banach space는 $C[0,1]$ 내로 isometrically embedded 된다는 사실)은 1927년경에 증명되었다[3, p. 185].

1920년대 말까지 알려진 지식들은 1932년에 출판된 바나하의 책 *Théorie des Opérations Linéaires*에 잘 요약되어 있으며 1930년대에 발견된 바나하 공간 이론에 관한 논문들은 1929년에 창간된 *Studia Math.*에 많이 출판되었으며 1930년대 후반부터 세계 각처의 수학 학술지에 출판되기 시작했다.

2. 후기의 바나하 이론

1920년 전후부터 가속화된 바나하 공간의 연구는 1930년대부터 연구 방법도 다양해지기 시작했는데 크게 나누어 기저 이론, 바나하 공간의 기하학, 바나하 속의 세 방향으로 연구되

고 발전되었다.

기저 이론

기전 이론(basis theory)은 바나하 공간에 일종의 좌표계(즉 basis)를 도입하여 그 공간을 연구하는 이론이다. 바나하 공간 이론에서 기저(basis)라 함은 샤우더 기저(Schauder basis)를 뜻하며 이 개념은 1927년 샤우더에 의하여 소개되었다[43]. X가 바나하 공간일 때 X 내의 수열 (x_n)이 X의 기저라 함은 임의의 $x \in X$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - x \| = 0$을 만족하는 스칼라 수열 (a_n)이 유일하게 존재한다(즉, x는 유일한 급수 전개식 $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$을 갖는다)라는 뜻이다. 이 경우에 x와 수열 (a_n)을 동일시하여 기저를 갖는 바나하 공간 X를 수열 공간이라 부르기로 한다. 우리가 자주 접하는 고전 바나하 공간은 기저를 갖는 공간이 많다. e_n을 n째 항이 1이고 모든 다른 항이 0인 수열이라 할 때 (e_n)이 c_0나 $l_p\,(1 \le p < \infty)$의 기저를 형성하며 또 구간 $[0,1]$에서 스칼라 체로의 연속 함수들의 바나하 공간 $C[0,1]$이 기저를 갖는다는 사실은 일찍이 샤우더에 의하여 증명되었다[43, 44].

기저를 갖는 바나하 공간은 근사 성질(approximation property)을 갖고 기저를 갖는 바나하 공간 사이의 유계 선형 작용소는 행렬(matrix) 표현을 갖는 등 수열 공간이나 수열 공간 사이의 선형 작용소에는 여러 가지 좋은 성질이 있다. 따라서 어떤 바나하 공간이 기저를 갖느냐 라는 문제가 학자들의 관심을 끌었다. 기저를 갖는 바나하 공간은 분해 가능(separable)함을 쉽게 알 수 있다. 그렇다면 모든 분해 가능 바나하 공간이 기저를 갖는가? 이 문제를 기저 문제(basis problem)라 부르는데, 바나하가 제기한 문제로써[3] 40여년 간 미해결 문제로 남아 있던 중 1971년 엔플로(P. Enflo)가 그 당시 함수 해석학의 또 하나의 유명한 미해결 문제인 다음을 해결함으로써 기저 문제까지 동시에 해결하였다[16].

"The approximation problem: Does every separable Banach space has the approximation property?"

엔플로는 $l_p\,(1 \le p < \infty)$ 내에 근사 성질을 갖지 않는 부분공간이 존재함을 증명함으로써 위 미해결 문제 등을 해결하였다[16].

기저 이론은 1930년대에는 바나하, 마주르, W. Orlicz, 1940-50년대에는 M. Grinblium, C. Bessga, B. Gelbaum, A. Pelczynski, 1960-70년대에는 M. Kadec, J. Lindenstrauss, A. Pelczynski, I. Singer, P. Enflo, W. Johnson 등의 학자들에 의하여 연구가 계속되었으며 그 연구 결과는 I. Singer의 *Bases in Banach spaces* 및 J. Lindenstrauss와 L. Tzafriri의 *Classical Banach Space I*에 요약되어 있다.

바나하 공간의 기하학

바나하 공간 X의 성질은 X의 노옴에 의하여 결정되고 그 노옴은 X의 폐단위구 $B(X)=\{x\in X : \|x\| \leq 1\}$의 민코우스키 범함수이다. 따라서 X의 성질이 $B(X)$ 또는 단위구면 $S(X)=\{x\in X : \|x\| = 1\}$의 모양에 따라 결정된다는 사실이 바나하 공간의 기하학적 연구의 필요성을 말해준다. 바나하 공간의 기하학에는 수직의 개념도 있고 볼록 집합(convex set)과 초평면(hyper-plane)에 관한 연구 등 많이 있으나 그 중에서도 단위구면 $S(X)$의 여러 형태의 매끈함(smoothness)과 여러 형태의 볼록함(convexity)이 바나하 시절의 주요 연구 대상이었다.

바나하 공간에서 매끈함의 정의는 따로 있지만 그 공간의 노옴의 미분 가능성으로 설명된다[15, Ch. II]. 미분기하에서 함수의 매끈함을 그 함수의 미분 가능성으로 정의하는 것과 같은 원리이다. 바나하 공간 X가 점 $x\in S(X)$에서 매끈하기 위한 필요 충분 조건은 X의 노옴이 $x\in S(X)$에서 Gateau 미분 가능함이다(즉, $y\in S(X)$일 때는 항상 다음 극한이 존재함이다).

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$$

위 극한이 $y\in S(X)$에 균등하게(uniformly in $y\in S(X)$) 존재하면 X의 노옴이 x에서 프레셰(Fréchet) 미분 가능이라 하고, 그리고 위 극한이 $x, y\in S(X)$에 균등하게 존재하면 X의 노옴이 균등하게 프레셰(uniformly Fréchet) 미분 가능이라 부른다. X의 미분 가능성은 X의 매끈함을 측정해주기도 하지만 쌍대 공간 X^*의 볼록함과도 관계가 많다. 바나하 공간 X가 순볼록(strictly convex)이라 함은 $S(X)$가 nontrivial segment를 포함하지 않는다는 뜻이고 그보다 강한 개념이 균등 볼록함(uniform convexity)이다.

바나하 공간의 기하학적인 연구는 전기부터 시작되었다. 바나하는 자기의 책 [3, p. 246]에서 convex body와 supporting hyperplane에 관한 마주르와 자신의 연구 결과에 관하여 기술했다. 이와 관련된 연구에는 1930년 전후에 Ascoli [1], Gillespie and Hurwitz [18], Zalcwasser [15] 등이 가담했다. 매끈함에 관한 연구는 마주르 [29], Šmulyan [47, 48, 49] 등이 활발히 하였으며, 특히 1933년 마주르 [29]는 바나하 공간 X가 분해 가능할 때 $S(X)$ 내의 smooth point는 $S(X)$ 내에서 조밀함을 증명하였다. 균등 볼록함(uniform convexity)의 개념은 1936년 A. Clarkson [10]에 의해 소개되고 연구되었으며, 그 후 B.J. Pettis [38], M. M. Day [11, 12, 13] 등에 의해 연구가 계속되었다. 특히 1939년 Pettis [38]는 균등 볼록(uniform convex) 바나하 공간은 reflexive임을 증명했다. 수직(orthogonality)의 개념은 G. Birkhoff [7]에 의해 소개되고 연구되었으며 R.C. James [21] 등이 연구에 가담했다.

바나하 공간의 기하학은 바나하 속 내에서 더 좋은 결과를 가지고 있다. 이에 관한 좋은 참고서는 Lindenstrauss와 Tzafriri의 *Classical Banach Spaces II*이며 일반적인 바나하 공간의 기하학에 관해서는 Diestel의 *Geometry of Banach Spaces and Selected Topics*이다.

바나하 속

f와 g가 집합 A에서 실수로의 함수이고 모든 $x \in A$에 대하여 $f(x) \le g(x)$일 때 $f \le g$라 정의할 수 있으므로 함수 해석학에서 만나는 많은 함수 공간은 자연스럽게 정의되는 부분순서를 갖는다. 그리고 이 부분순서는 노음과 서로 긴밀하게 연관되어 있어 바나하 공간의 연구에 중요한 역할을 하고 있다. 실수체 $\mathbb{R}$ 상의 바나하 공간 X가 부분순서 "$\le$"를 가지며 모든 $x, y, z \in X$와 양의 실수 α에 대하여 다음 조건을 만족할 때 X를 바나하 속(Banach lattice)이라 부른다. 조건:

(i) $x \le y$이면 $x+z \le y+z$이다

(ii) $x \ge 0$이면 $\alpha x \ge 0$이다.

(iii) $x \vee y$ (least upper bound)가 X내에 존재한다

(iv) $|x| \le |y|$ 이면 $\|x\| \le \|y\|$ 이다. 단, $|x| = x \vee (-x)$.

부분순서 "$\le$"를 갖는 벡터공간 X가 조건 (i), (ii), (iii)을 만족할 때 X를 벡터 속(vector lattice) 또는 리츠(Riesz) 공간이라 부른다.

바나하 속에 관한 연구는 1935년경 리츠 [39], H. Freudenthal [17], L.V. Kantorovitch [24, 25, 26]가 서로 독립적으로 또 서로 다른 방향에서 보다 일반적인 벡터 속의 연구로부터 시작되었다. 그 후 1940년 전후에 H. Nakano [30, 31, 32, 33], K. Yosia [52, 53, 54], S. Kakutani [22, 23], H. F. Bohnenblust [9]에 바나하 속에 관한 많은 업적을 내었다. 이 시대 바나하 속의 발전에 관한 특색은 짧은 기간에 급속히 발전했다는 사실이다. 바나하 속에 관련된 현재까지 가장 잘 알려진 정리는 S. Kakutani [22, 23]의 추상 L_p공간과 추상 M공간에 관한 표현 정리라 하겠다. 대충 말하자면, $1 \le p < \infty$에 대하여 르베그 공간 $L_p(\mu)$의 특성을 갖는 바나하 속 X는 결국 어떤 측도 ν에 대하여 $L_p(\nu)$로 표현되며, 콤팩트 하우스도르프 공간 K 상에서 연속인 실함수들의 공간 $C(K)$의 특성을 갖는 바나하 속 X 역시 어떤 콤팩트 하우스도르프 공간 F에 대하여 $C(F)$로 표현된다는 내용이다[28, p. 14~19]. 이 정리를 증명할 무렵에는 속론(lattice theory)이 상당히 발달되어 있었으며[7], 1936년에 발표된 M.H. Stone [51]의 불 대수(Boolean algebra)에 관한 표현 정리(훗날 M.H. Stone이 필즈(Fields) 상을 받도록 도와준 주요정리라고 함)를 Kakutani가 잘 이용하므로 정리를 증명할 수 있었다.

바나하 속 이론은 고전 바나하 공간과 작용소론 특히 양작용소(positive operator) 이론에 초석이 되고 있으며 바나하 공간의 기하학과에 많은 역할을 하고 있다. 바나하 속 이론의 좋은 참고서는 Schaefer의 *Banach Lattices and Positive Operators*, Lindenstrauss와 Tzafriri의 *Classical Banach Spaces II* 또는 Luxemburg와 Zaanen의 *Riesz Spaces* 등이다.

참고 문헌

1. Ascoli, G., "Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà liniari," *Ann. Math. Pura Appl.* (4) **10**(1932), 33-81, 203-232.
2. Banach, S., "Sur les fonctionalles linéares," *Studia Math.* **1**(1929), 211-216 .
3. ______, *Théorie des opérations linéaires,* Warszawa: Monografje Matematyczne, 1932.
4. ______, "Sur la divergence des séries orthogonales," *Studia Math.* **9**(1940), 139-155.
5. Banach, S. and S. Mazur, "Zur Theorie der linearen Dimension," *Studia Math.* **4** (1933), 100-112.
6. Banach, S. and H. Steinhaus, "Sur le principe de la condensation de singularités," *Fund. Math.* **9**(1927), 50-61.
7. Birkhoff, G., "Orthogonality in linear metric spaces," *Duke Math. J.* **1**(1935), 169-172.
8. ______, *Lattice Theory*, (Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. 25), 1st ed. 1940, 2nd ed. 1948, 3rd ed. 1967.
9. Bohnenblust, H.F., "An axiomatic characterization of L_p-space," *Duke Math. J.* **6** (1940), 627-640.
10. Clarkson, J.A., "Uniformly convex spaces," *Trans. Amer. Math. Soc.* **40**(1936), 396-414.
11. Day, M.M., "Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces," *Bull. Amer. Math. Soc.* **47**(1941), 313-317.
12. ______, "Some more uniformly convex spaces," *Bull. Amer. Math. Soc.* **47**(1941), 504-507.
13. ______, "Uniform convexity in factor and conjugate spaces," *Ann. of Math.* (2), **45** (1944), 374-385.
14. ______, *Normed Linear Spaces*, Academic Press, 1962.
15. Diestel, J., *Geometry of Banach spaces-Slected Topics*, Lecture Note in Mathematics 485, Springer-Verlag, 1975.
16. Enflo, P., "A counter example to the approximation property in Banach spaces," *Acta Math.* **130**(1973), 309-317.
17. Freudenthal, H., "Teilweise geordente Moduln," *Proc. Acad. of Sc. Amsterdam* **39** (1936), 641-651.
18. Gillespie, D.C. and W. A. Hurwitz, "On sequences of continuous functions having continuous limits," *Trans. Amer. Math. Soc.* **32**(1930), 527-543.
19. Grinblium, M.M., "Certains théorémes sur la base dans un espace du type (B)," *Doklady Akad. Nauk SSSR* **31**(1941), 428-432.
20. Hahn, H., "Über linearer Gleichungen in linearen Räumen," *J. Rein U. Angew. Math.*

157(1927), 214-229.

21. James, R.C., "Orthogonality in normed linear spaces," *Duke Math. J.* **12**(1945), 291-302.
22. Kakutani, S., "Concrete representation of abstract L-spaces and the mean erogodic theorem," *Ann. of Math.* **42**(1941), 523-537.
23. ______, "Concrete representation of abstract M-spaces," *Ann. of Math.* **42**(1941), 994-1024.
24. Kantorvitch, L.V., "Sur un espace des fonctions à variation bornée et la différentiation d'une série terme à terme," *Comptes Rendus de l'Acad. Sc. Paris* **201**(1935), 1457-1460.
25. ______, "Sur les propriétés des espaces semi-ordonnés linéaires," *Comptes Rendus de l'Acad. Sc. Paris* **202**(1936), 813-816.
26. ______, "Linear partially ordered spaces," *Math. Sbornik (N.S.) (2)* **44**(1937), 121-168.
27. Lindenstrauss, J. and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
28. ______, *Classical Banach Space II*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
29. Mazur, S. "Über knovexe Mengen in linearen normierten Raumen," *Studia Math.* **4** (1933), 70-84.
30. Nakano, H., "Über das System aller stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum," *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **17**(1940-41), 308-310.
31. ______, "Über normierte, teilweise geordnete Moduln," *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **17** (1940-41), 311-317.
32. ______, "Eine Spektraltheorie," *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* **23**(1941), 485-511.
33. ______, "Teilweise geordnete Algebra," *Japanese J. of Math.* **17**(1941), 425-511.
34. Orlicz, W., "Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen I," *Studia Math.* **1**(1929), 1-39.
35. ______, "Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II," *Studia Math.* **1**(1929), 241-255.
36. ______, "Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus B," *Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Ser. A.* (1932), 207-220.
37. ______, "Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen I," *Studia Math.* **4**(1933), 33-37.
38. Pettis, B.J., "A proof that every uniformly convex space is reflexive," *Duke Math. J.* **5**(1939), 249-253.

39. Riesz, F., "Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires," *Ann. of Math.* **41**(1940), 174-206, (translation of a 1937 Hungarian paper).
40. ______, "Untersuchungen über systeme integrierbarer funktionen," *Math. Ann.* **69**(1910), 449-497.
41. ______, "Über lineare Funktionalgleichungen," *Acta Math.* **41**(1918), 71-98.
42. Schaefer, H.H., *Banach Lattice and Positive Operators*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.
43. Schauder, J., "Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen," *Math. Zeitschr.* **26**(1927), 47-65.
44. ______, "Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystem," *Math. Zeitschr.* **28** (1928), 317-320.
45. Schur, J., "Über lineare Transformationen in der Theorie der unedlichen Reinen," *J. Rein Angew. Math.* **151**(1920), 79-111.
46. Singer, I., *Bases in Banach spaces I*, Springer-Verlag, 1970.
47. Šmulyan, V.L., "On some geometrical properties of the unit sphere in the space of the type (B)," (Russian), *Math. Sbornik* **6**(1939), 77-94.
48. ______, "Sur la derivailité de la norme dans l'espace de Banach," *Doklady (CR Aad. Sci. URSS)* **27**(1940), 643-648.
49. ______, "Sur la structure de la sphere unitaire dans l'espace de Banach," Math. Sbornik **9**(51)(1941), 545-561.
50. Steinhaus, H., "Additive und stetige Funktionaloperationen," *Math. Z.* **5**(1919), 186-221.
51. Stone, M.H., "The theory of representations for Boolean algebras," *Trans. Amer. Math. Soc.* **40**(1936), 37-111.
52. Yosida, K., "On vector lattice with a unit," *Proc. Imp. Acad. Yokyo* **17**(1940-40), 121-124.
53. ______, "Vector lattice and additive set functions," *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **17**(1940-41), 228-232.
54. ______, "On the representation of the vector lattice," *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **18** (1941-42), 339-342.
55. Zalcwasser, Z., "Sur une propriété du champ des fonctions continues," *Studia Math.* **2**(1930), 63-67.