한국학교수학회논문집 제 4권, 제 2호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 4, Number 2, 27-32, December 2001

수학적 모델링을 통한 교육과정의 구성원리

신 현 성1)

1. 변화의 문제

2001년 5월에 한국학교수학회 논문집 제4권 1호에 발표된 논문에서는 실세계 적응을 위한 수학교육과정의 방향을 제시했고, 이의 장점으로 몇 가지를 제시한 바 있다. 무엇보다도 실세계 적응 프로그램(교수요목)은 현재의 학교수학과 실세계에서 일어나는 수학적 상황사이에 존재하는 틈을 해소 해준다는 점이다. 이러한 실세계 적응 수학 중에서 으뜸인 소재는 수학적인 모델링(mathematical modelling)이 될 수 있는데 Peel(1979)은 다음과 같이 말했다.

> 대부분의 사람들은 문제가 유일한 해로 잘 정의된 것만을 선호한다. 이러한 문제는 모든 정보를 모으고 잘못 정의된 문제를 바로 잡고, 잘못된 또는 취약한 정보를 바르게 해석하는 기술이 필요하다. 따라서, 수학적인 모델링은 교실에서 흔히 말하는 문제 해결보다 더한 능력을 요하는 활동이라고 말할 수 있다.

이와 같이 변화의 문제로써 모델링은 현행교육과정을 실세계에 적응 프로그램으로 들어가게 하는 동기를 부여할 수 있다.

이 글은 고등학생과 대학교 1, 2학년을 대상으로 한 실험연구로써 위의 변화의 문제를 교육과정에 도입할 수 있는지 그 가능성을 관찰하는 논문이다. 때문에 많은 표본을 선정하여 가설로 설정한 교육과정을 검증하는 목적이 아니고, 학생들이 모델링을 소화할 수 있는지, 모델링과 현행 교수요목 사이에 통합 가능성이 있는지 등을 알아보는 데 있다. 따라서, 최종 목표는 모델링을 교육과정에 도입하기 위한 구성원리를 찾는 데 있다.

2. 문제의 정의

모델링은 잘못 정의된 질문을 적절한 방법으로 정보를 수집하여 잘 정의된 문제로 수정해 가는 과정을 특징으로 하기 때문에 학교수학에 알맞는 모델링을 선택하는 데는 그 수준을 고려할 수밖에 없다. 이를테면, 학생들이 정보를 수집하는 과정이 복잡한 실세계 과제도 있고, 좀 단순한 과제도 있기 때문에 교실에서 사용할 수 있는 모델링을 몇 가지 수준으로 분류할 수 있다.

1종 모델링 : 문제를 해결하는데 필요한 정보가 그 속에 거의 있고 질문이 열린형인 것을 말하는데, 이를테면, NCTM(1991)의 우체부 직원의 여행이 이에 속한다.

2종 모델링 : 문제의 정의가 거의 분명하고 문제를 구성하는 정보를 학생들이 수집하여 풀이를 완성하는 것으로, NCTM(1991)의 우체국 또는 전화국의 요금체계 또는 할인매점의 회계원 배치가 이에 해당된다.

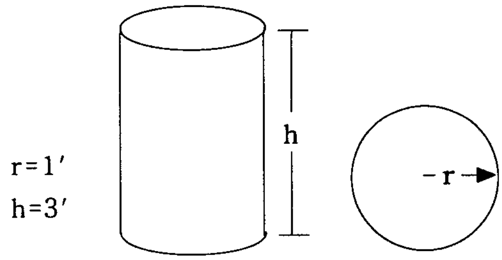
3종 모델링 : 문제의 정의가 쉽지 않고 이를 위한 접근방법이 명확하지 않는 실세계 상황으로 모델링을 주로 하는 학습자에 따라 문제의 정의가 약간 변경될 수 있는 것을 말하며, 대표적인 과제로

1) 강원대학교 수학교육과

Ansell(1979)이 제시한 "해뜨는 시각의 패턴"과 Pratt(1979)의 "공사장에서 흙을 실어 나르는 덤프트럭의 최적의 대수"를 들 수 있다.

위에서는 각국에서 교육용으로 활용하는 모델링 소재를 연구에 알맞게 분류했지만, 모델링의 참모습은 3종 모델링으로 들 수 있다. 이유는 1, 2종은 학습자들이 수집해야 할 상당한 양의 정보가 이미 주어진 문제에 있기 때문에 열린 질문 이외에는 교과서의 문제에서 약간 진보된 형태이기 때문이다. 그러나, 여러 장점도 있기 때문에 이 실험에서는 실험 초기에 1, 2종의 모델링을 장려했고, 3종은 후반기에 몇 개 문제만 취급했다. 각종의 모델링을 한 문제씩만 소개하면 다음과 같다.

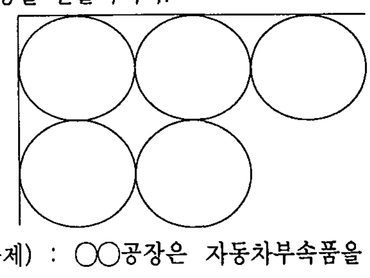
(1종 문제) : ○○유통회사를 운영하는 김씨는 회사에서 만든 175개의 그림과 같은 원기둥 모양의 통을 2개월 보관할 창고를 찾고 있다.



회사 옆에 있는 창고에서는 3종류의 임대조건을 다음과 같이 제시 그런데 이 창고의 높이는 10피트였다. 특히 창고 담당자는 원통형의 이들 물건을 쌓아 올리는 방법은 다음과 같다고 말했다.

11피트×11피트 한 개 - 월 65달러
11피트×22피트 한 개 - 월 125달러
11피트×33피트 한 개 - 월 145달러

최소 비용을 산출하여라.



(2종 문제) : ○○공장은 자동차부속품을 생산하는 회사이다. 회사의 사장은 3대의 생산기계가 일직선상으로 배치가 되어 있고, 기계들 사이의 간격은 서로 다름을 알고 있다. 문제는 최근 새로 구입한 포장기계를 이 기계들 사이에 설치하여 만든 제품이 포장기계로 가게 하여 최종 손질을 포장기계에서 끝마치게 하려한다. 최소경비를 계산하기 위하여 사장은 다음 조건을 만족하는 위치에 포장 기계를 설치하려한다.

조건 : 포장기계와 각 생산기계 사이의 거리 총합이 최소가 된다.

(3종 문제) : 페르시안 걸프지역에서 염수를 식용수로 바꾸는 일은 매우 비용이 높기 때문에 과학자들은 남극지방(9600km)에 있는 거대한 빙산을 수송하여 식수로 전환하는 문제를 권고하고 있다. 빙산을 옮기는 데는 운반비용도 많이 들어가는데, 배 연료비 및 기타 경비는 속도와 거리에 달려있다. 이들 경비는 다음과 같이 계산이 되었다.

선단규모	작은크기	중간크기	대규모크기
일일비용 (파운드)	4.00	6.00	8.00
최대용량 (m^3)	500000	1000000	10000000

표1. 수송선 데이터

빙산부피(m^3) / 수송선 속도(km/h)	10^7	10^6	10^5
1	12.6	10.5	8.4
2	16.2	13.5	10.8
3	19.8	16.5	13.2

표2. 빙산의 녹는율(m^3/일)

극으로 부터 거리(km) / 수송선 속도(km/h)	0	1000	>4000
1	0	0.1	0.3
2	0	0.15	0.45
3	0	0.2	0.6

표3. 연료비용(파운드/km)

이들 문제는 이미 개발된 것으로 이 연구에서는 우리의 학교실정에 맞게 약간의 수정을 해서 총 17개 문제를 택했으며, 1주당 1시간씩 매시간에 1문제를 할당했다. 즉, 실험에 들어간 문제는 1종 문제는 7개, 2종 문제는 6개, 3종 문제는 4개였으며 각 문제에는 본 문제를 변형하여 풀어보는 탐구문제가 약간씩 첨부되었으며 주로 소집단 토론문제로 이용되었다.

3. 실험과정

모델링 문제는 여러 사람이 정의한 바와 같이 모델이 뒴직한 실세계 상황설정→조직적 토론과정→모델설정→모델의 타당성 검토 등으로 이어진다(Ball, 1973 ; Waldie, 1983 ; Kapur, 1979). 이를 교실에서 수행할 경우 조직적 토론과정을 많은 학생들이 참여할 수 있도록 교실 환경을 조직하는 일이 문제가 되며, 교사와 학생간의 협의에 의한 수업 모델의 설정이 매우 어렵다. 이를테면 본 실험에서 도입한 3종 모델링의 경우를 살펴보자.

○○유통은 사과즙을 이용한 여름음료를 히트시킨 청량음료회사이다. 이 회사는 소비자가 찾는 질 좋은 제품은 좋은 사과를 경제적으로 구입하는데서 얻어진다는 사실을 잘 알고 있다. 두 종류의 A, B에 해당하는 사과가 있는데 사과를 구로 볼 때 A급은 지름이 6㎝이고 1파운드에 4개정도, 가격은 24p/1b인 반면 B급은 지름 4㎝에 가격은 22p/1b라는 것이 이미 알려져 있다. 이 회사는 보통 A급인 큰 사과를 주로 선호한다. 왜냐하면, 사과 한 개에서 버려지는 양이 전체부피의 10%(속 부분)이고 껍질은 2㎜정도만 벗기면 되므로 낭비되는 양이 상대적으로 적기 때문이며, 대체적으로 이 공장에 들어가는 시간도 적은 편이다. 그러나, 사장의 입장에서는 경제적인 이익이 최대가 되는 공정을 택할 수밖에 없다.

<u>조직적 사고</u> : 대부분의 토론집단에서는 애매한 부분을 명확히 하기 위한 작업을 진행했다. 시간이 걸렸지만 비교적 일찍 상황을 정리한 집단에서는 몇 가지 가정 또는 알려진 사실을 정리하기 시작했다.

· 사과는 구이다.
· 거의 비슷한 질(quality)를 가진다.
· 어느 사과이든 전체부피의 10%가 버려야할 속(core)이고, 깍아 내야할 껍질은 0.2㎝의 두께이다.
· 작업에 들어가는 시간과 기타 비용은 A, B급 종류 모두 비슷하다.

이들로부터 몇 가지의 가시적인 계산과정이 토론되었으며, 먼저 이 과정을 제시한 집단이 칠판에 그 과정을 발표했다.

<u>모델설정</u> : 이용되는 사과의 양은 (전체 사과 부피)-(버리는 속 부피)-(껍질 부피)로 계산이 되기 때문에 다음과 같은 계산법을 적용하였다.

r이 사과 반경이고 d가 깍아내는 껍질 두께라면 사용 가능한 사과 부피 $Vnet$는

$$Vnet = \frac{4}{3}\pi r^3 - 0.1 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 - 4\pi r^2 d$$
$$= 4\pi r^2(0.3r - 0.2)cm^2 \ (d = 0.2cm)$$

따라서, n개의 (사과/1 b)에 대하여 사용 가능한 (부피/1 b)를 Vu라 하면

$$Vu = 4\pi n r^2(0.3r - 0.2)cm^3/1b$$

만일 c가 (사과개수/1 b)의 비용이라면, 단위 비용당 사용가능부피 Ve는

$$Ve = \frac{4\pi n r^2(0.3r - 0.2)}{c}\ cm^3/p$$

이를테면, $r = 6, n = 4, c = 24$라면 $Ve(A) = 120.6cm^3/p$이다. 한편, B급 사과에 대해서는 $r = 4, c = 22$밖에는 아는 것이 별로 없으나, B급 사과 (개수/1 b)를 n으로 놓고 A, B급 모두 질이 비슷하다는 위의 요약에 따라 같은 밀도 ρ를 가지고 있음을 짐작할 수 있다. 즉, B급 사과 (개수/1 b)는

$$4 \cdot \frac{4}{3}\pi r_A^3 \rho = \frac{4}{3} n\pi r_B^3 , \ \rho = 1$$

$$즉, \ n = 4(\frac{r_A}{r_B})^3 = 13.5$$

$$(r_A = 6cm, \ r_B = 4cm)$$

따라서, 단위 비용당 B급 사과의 이용가능 부피는 $Ve(B) = 123.4cm^3/p$ 이다.

<u>모델타당성</u> : 위의 계산에서는 B급 사과가 A급 사

과보다 약간의 높은 수치를 가지고 있지만, 실제적으로 이 모델을 수용하기 위해서 A급 4개를 처리하는 공정이 B급 몇 개를 처리할 수 있는지 좀 더 데이터를 조사해볼 필요가 있다.(이를테면, 이것의 작업분석에 의하면 A급 4개에 B급 13개가 처리된다는 관찰이 있다.)

위에서 살펴본 바와 같이 3종 모델링은 우리 교실에 도입하기가 쉽지 않다. 그러나, 1, 2종 모델링 문제는 이보다 모델설정이 훨씬 단순하기 때문에 학생들이 가설설정이 훨씬 쉬어진다. 이들 문제는 고등학교 5명, 대학교1년 25명에 한 학기동안 실험되었다.

4. 실험관찰 및 토론

전반적으로 실험은 성공적이었으나, 초기 3주는 학생들의 당황함 속에서 실험이 진행되었다고 볼 수 있다. 이 기간 중에 일어난 가장 큰 문제는 몇 가지로 관찰이 되었다. 첫째는 모델링으로 표현되는 문제의 정의를 이해하는데 어려움이 있었으며, 둘째는 데이터 수집과정에서 어떤 종류의 데이터를 얻어야 할지를 결정하는데 많은 시간이 소요되었고, 셋째는 지극히 틀에 박힌 종래의 문제를 푸는 기법이 별 소용이 없는 경우 모델링에 알맞은 접근방법을 생각하는데 토론시간이 길어졌으며, 넷째는 토론 기술이 부족했다. 그러나 새로운 발견으로는 이런 과정에서도 종래 수능시험에 잘 관리된 우수한 문제해결자들이 역시 모델링의 문제를 쉽게 접근하고 있다는 사실을 알 수 있었다. 다시 말하면, 두 접근 사이에는 중요한 호환성이 있음이 관찰되었다는 점이다. 이들 모델링 문제는 과연 교육될 수 있는가에 대한 국내의 실험 결과가 없었기 때문에 대략 영국의 개방대학에서 제안한 교수과정을 택했다. 즉, 앞에서 언급한 두 과정에 자신이 구한 해의 과정을 분석하는 시간과 보고서를 쓰는 과정을 더해주었다. 대학생인 경우는 이 교수과정을 시간이 흐를수록 무리 없이 수행했으나, 고등학생은 진행과정에서 상당한 시행착오가 발생했다. 몇 가지 관찰된 사실을 기술하면 다음과 같다.

첫째는 모델링의 교육에서 초기에 제약조건이 약한 열린 문제는 오히려 모델링의 과정을 약화시킨다. 우리 나라 학생들은 오랫동안 모든 정보가 한 문제에 주어진, 그리고 유일한 해가 존재하는 문제해결만 교실에서 취급했기 때문에 위의 열린문제의 해결 접근에 많은 어려움을 가진다. 실험에 활용된 대표적인 모델링 문제로 '슈퍼마켙에서 감시포인트의 수가 마켙의 이익을 늘리는가?' 를 들 수 있다. 이 문제는 실세계의 모델링문제로 적절하지만, 제약 조건이 거의 없는 관계로 학생들이 상황을 접근하는데 어디서부터 출발해야할지 몰랐으며 데이터수집에 실패했고, 이 과정에서 필요한 확률분포의 모델도 활용을 하지 못했다.

둘째는 컴퓨터는 모델링의 도입에서 필수적인데, 학생들의 사용능력은 이들 진행과정을 따라가지 못한다. 컴퓨터를 이용하여 자료를 수집 분석하는 활동이 모델을 설정하는데 중요한데, 이를 원활하게 사용못하므로 복잡한 모델링은 취급할 수 없었다. 이를테면, ○○공장에서 강물에 버리는 공해물질을 시의회에서 제안한 $5 \cdot 10^{-4}$g/㎥ 이내로 하는 문제에서 컴퓨터는 이를 해결하는데 중요한 도구지만 실제 프로그램능력 결여되어 실험도중에 문제를 포기한 경우가 있었다.

셋째는 모델링에 적합한 실세계 소재의 상황 분석에 많은 시간을 교실에서 연수시켜야 했다. 이 실험에서 가장 힘든 문제는 모델링에 적합한 실세계 상황의 분석에 있었다. 수학활동이 거의 전부인 상황(예, 우리 학교 캠퍼스 잔디 깔기)에서는 그 들이 쉽게 해결 과정을 산출해 냈지만, 슈퍼마켙 문제나 공해 물질 배출의 최소화 문제는 수학적 공식, 개념의 조사활동보다 관련과제의 전문자료수집을 전제로 해야하기 때문에 상황분석에 많은 약점을 실험집단이 가지고 있었다.

넷째는 모델링을 문제해결의 한 분야로 취급했지만, 교실에서는 이보다 상위개념으로 모델링을 분류하여 발견전략 또는 해결과정의 단계를 새롭게 정의할 필요가 있다. 이의 필요성은 단순 모델링과 복잡한 모델링의 실험과정에서 보인 학생들의 성취도와 학습에 대한 그들의 태도에서 관찰된 내용이다. 특히, 폴랴 관점의 발견전략은 모델링에서는 너무 모호하며, 상황분석에 알맞는 이의 설정이 필요하다. 이 실험에서는 구체적인 데이터를 대입하기를 많이 활용

했다.

다섯째는 모델링의 문제는 주위 학문과 수학과의 연관성이 없이는 해결되지 못하기 때문에, 이들 학문과 통합된 접근방법이 강조된다. 특히, 이 실험에서는 물리, 화학과 수학의 통합된 접근이 중요한 과제로 떠올랐다. 이를테면, 자동차의 최소정지거리에 관한 연습에서 물리의 속도개념이 모델링문제에 쉽게 들어와야 하는데, 그렇지 못하여 수업활동에 큰 지장을 주었다. 즉, 학교에서 수학시간의 운영방법이 개선되지 않는 한 모델링을 교실에서 자연스럽게 도입하는 것은 어렵다.

이 실험과정에서 얻을 수 있는 위의 관찰을 통해 수학과 교육과정에 모델링을 도입하는데 참고되는 몇 가지 구성원리를 이끌어낼 수 있다.

원리1. 교육과정에 모델링의 도입초기는 제약조건을 많이 둔 문제로부터 출발하며, 시간이 갈수록 제약조건이 적은 문제를 준다. 우체국 배달부의 여행등이 좋은 예이다.

원리2. 교육과정에 데이터 조작을 많이 하는 모델링문제는 가급적 피하고, 이들 문제를 특성화하여 수학반 활동 또는 특기적성시간에 도입한다. 얼마동안 이의 실행결과를 보면서 교육과정에 이들을 인접개념에 통합시킨다.

원리3. 교육과정에는 모델링의 상황 분석을 강조하는 활동을 꼭 제시한다.

원리4. 교육과정에 모델링을 완전하게 또는 성급하게 도입하는 것보다, 현존하는 교수요목 중 친밀한 교수요목에 이들을 통합시키고, 다음에 덜 친밀한 모델링 문제는 교육과정의 한 구석에 제시해야한다. 따라서, 교육과정의 운영에 대한 교사들의 재량권을 많이 줄수록 좋다.

원리5. 컴퓨터와 계산기는 모델링 수업활동에 적극적으로 활용되어야한다. 특히, 수학의 공식을 강조한 단순 모델링의 문제에서는 컴퓨터의 활용이 거의 없겠지만, 복잡한 모델링 문제에서는 이들의 활용은 필수적이다.

원리6. 문제 해결안에 모델링문제를 포함시키기보다는 문제해결의 상위시스템으로 모델링을 도입하는 것이 바람직하다. 따라서, 학생들의 모델링과정의 세부단계, 상황분석의 방법, 모델링문제의 정의 등을 포함하여, 발견전략의 개념을 모델링에 알맞게 정립할 필요가 있다.

참 고 문 헌

Berry, J. S., Savage, M. D., and Williams, J. S. (in press). Case Studies in Modelling in Mechanics. In Teaching Mathematics and its Applications

Burghes, D. N. and Huntley(1982), I. Teaching Mathematical Modelling, Reflections and Advice. In International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol 13, No 6, 735~754

Christensen(1985), Mathematical Modelling for Marketplace: Graphs and Digraphs in Everyday Life. Baltimore: Loyola College

Hart, K.(1981), Childrens Understanding of Mathematics: 11-16. London: John Murray

Koestler, A. The Sleepwalkers: Man's Changing Vision of the Universe. Penguin

Peel, O. A. in Modelling and Simulation in Practice. (Eds. M. Cross et al.), Pentech Press

Lesh, R(1981). Applied Mathematical Problem Solving. In Educaational Studies in Mathematics, 12(2)

Niss, M.(1987), Applications and Modelling in the Mathematics Curriculum. In International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol 18, No 4, 487~506

Williams, J. S.(1987) Practical Applied Mathematics, Part 1, Part 2. In Mathematics Teaching, (1986, p116) and (1987, p118)

Williams, J. S.(1988) Practical Mechanics: Mechanics in Action. In Mathematics in schools, 17, No 2

Design of the Mathematics Curriculum through Mathematical Modelling

Shin, Hyun-Sung[1]

Abstract

The paper describes some principles how we design the mathematics curriculum through mathematical Modelling. since the motivation for modelling is that it give us a cheap and rapid method of answering illposed problem concerning the real world situations. The experiment was focussed on the possibility that they can involved in modelling problem sets and carry modelling process. The main principles could be described as follows.

principle 1. we as a teacher should introduce the modelling problems which have many constraints at the begining situation, but later eliminate those constraints possibly.

principle 2. we should avoid the modelling real situations which contain the huge data collection in the classroom, but those could be involved in the mathematics club and job oriented problem solving.

principle 3. Analysis of modelling situations should be much emphasized in those process of mathematics curriculum.

principle 4. As a matter of decision, the teachers should have their own activities that do mathematics curriculum free.

principle 5. New strategies appropriate in solving modelling problem could be developed, so that these could contain those of polya's heusistics

1) Dept. of Mathematics Education, Kang-won University