韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2001, 5. 제 40권, 제 1호, 15-25.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2001, Vol. 40, No. 1, 15-25.

수학교육에서 직관과 그 오류에 관한 고찰

이 대 현 (한국교원대학교 대학원)
박 배 훈 (한국교원대학교)

I. 서 론

오랜 수학의 역사를 통하여 수학의 기초에 관한 논쟁은 직관적인 접근과 엄밀성을 강조하는 연역적 접근이 두 축을 이루어 왔다. B. C. 2000년경, 이집트인과 바빌로니아인들은 그 당시의 사회생활에 필요한 수학적 지식을 수량과 공간적 관점에서 끌어낸 경험적이고 실용적인 수학을 발전시켰다. 이러한 경험적 수학은 일상생활을 위한 일종의 도구였지만, 그리스인들의 수학 발달의 서곡이 되었다(Kline, 1985).

그리스인들은 수학의 추상적 개념을 다루었고, 기존의 수학 지식을 논리적으로 체계화하였다. 그리스인들은 서로간에 차이는 있지만, 연역적 추론을 진리를 얻는 유일한 방법으로 간주하였다. 특히, Euclid는 원론(Elements)에서 만인이 인정하는 몇 개의 공리를 설정하고, 이를 근거로 논리적·연역적 방법을 적용하여 정리를 유도함으로써 수학을 학문적으로 체계화하였다. 이것은 오늘날까지 중등학교에서 가르쳐지고 있는 중요한 기하학이기도 하다.

수학을 '연역적으로 정리한 지식의 결정체'라는 그리스 수학의 전통은 수학교육에서 지나치게 형식적이고 연역적인 측면을 강조하게 만들었으며, 학습자의 내부에 잠재되어 있는 수학적 능력을 발굴해 낼 수 있는 학습의 기회를 박탈하는 결과를 초래하였다. 이에 대해, Pestalozzi는 수학교육에서 학생들이 그들의 수학적 능력을 표출시킬 수 있는 효과적인 방법으로 학습자의 '직관'을 바르게 인도하는 것이 중요하다고 주장하였다. 그의 교육 사상은 '직관의 ABC'로 대변된다(김정환, 1976). 이런 면에서 Pestalozzi의 교육사상은 직관적인 수학의 상징으로 받아들여진다.

특히, 수학교육에서 직관은 논리·연역적인 사고를 중시하는 측면과 더불어 큰 축을 이루고 있다. 직관이 수학 문제해결 과정에서 중요한 역할을 하고 있음을 유명한 수학자들의 일화를 통하여 알 수 있다(Hadamard, 1945).

직관이 수학 문제해결 과정에 긍정적인 영향을 끼치는 것이 사실이지만, 반대로 직관이 문제해결 과정에서 오류를 일으키는 원인이 되기도 한다. 이러한 오류의 원인은 인간이 가지고 있는 감각(특히, 시각)에 의한 것이거나, 문제에 내포되어 있는 의미의 잘못된 직관적 해석에 기인한다. 따라서, 수학교육에서 직관에 의한 오류를 확인하는 것은 학습자가 문제에 대한 첫인상으로 인해 잘못된 문제해결 경로로 들어서는 것을 막고, 오류의 발생 원인을 처치할 수 있도록 한다. 그러므로 직관에 의한 오류를 확인하는 것은 수학교육자에게 중요한 문제로 인식되어져야 한다.

이에 본 논문에서는 수학교육에서 직관의 의의에 대하여 알아보고, 감각에 의한 직관의 결함과 문제해결 과정에서의 직관에 의한 오류 발생의 경우들을 예시한다. 마지막으로 이러한 오류를 처치할 수 있는 방안을 제시해 보도록 한다.

II. 수학교육에서 직관의 의의

Euclid 기하학이 연원인 논증기하는 최근까지 가설-연역적인 증명 위주의 학교교육에서 중심이 되어 왔다. 이는 수학적 진리가 인간의 경험이나 감각 등에 의한 직관을 통해 발견되기보다는, 적은 수의 공리로 많은 정리를

---

* 2001년 1월 투고, 2001년 4월 심사 완료.

논리적으로 해석하는 방법에 의해 구성된다고 보았기 때문이다. 이로 인해 학습자는 스스로 수학적 사실의 발견에 대한 기쁨을 느낄 수 없는 결과를 초래하였다. 그러나, Gauss가 초등학교 시절에 1에서 100까지의 자연수 합을 구하는 문제를 등차수열의 합을 구하는 방법으로 쉽게 답을 찾아내었다는 일화는 문제해결 과정에서 통찰, 영감 등의 형태로 해석할 수 있는 직관의 힘을 느끼게 해준다.

이런 면에서, 수학학습에서 논리적 사고와 더불어 직관적 사고에 대한 관심이 새로이 대두되고 있으며, 직관적 사고는 그 동안 소홀히 취급되어 왔던 수학학습의 한 면을 지탱하는 축으로 역할하고 있다. 이 장에서는 학교교육, 특히 수학교육에서 직관의 의의에 대하여 논의한 Pestalozzi, Poincaré, Fischbein 등의 이론을 간단히 고찰해 본다.

(1) Pestalozzi의 '직관의 ABC'

직관에 의한 교수법이 서양 교육사에 등장한 시점은 17세기로서, 경험주의 철학의 영향으로 볼 수 있다. 지식교육은 실물의 관찰을 통하여 시작해야 한다고 주장하는 이러한 관점은 Rousseau의 영향을 받은 Pestalozzi에 의해 정립되었다. 그는 인간성의 합자연적인 발전을 기도하기 위해 마음의 성장 순서, 즉 '심리적인 순서'에 입각하여 아동 개개인의 지력이 닿을 수 있는 직접적인 경험을 통하여 방법적 원리를 도입하고자 하였다(우정호, 2000).

Pestalozzi는 직관이 인식의 절대적인 기초임을 역설하고 있다. 이 직관에 호소하는 교육 방법은 지적 영역뿐 아니라, 다른 영역, 즉 신체적·도덕적 영역에도 확장되어야 한다고 말한다. 그는 종래의 학교는 직관을 교육의 방법의 기초로 삼고 있지도 않으며, 인식 수단의 원형을 제공하지 못했고, 일반적인 법칙을 도외시하고 '부스러기 진리'를 주입시켰으며, 어린이의 자립성을 무시했다고 비판하고, 이런 폐단을 극복하기 위해서는 직관을 교육의 기초로 놓아야 한다고 주장한다(김정환, 1974, pp. 131-132).

그의 이러한 교육사상은 '직관의 ABC'로 대변되며, 이것은 수(數)·형(形)·어(語)를 의미한다. 그에게 수·형·어의 직관은 형에 의해 사물의 공간 관계를 이해하고, 수를 이해하여 사물의 크기와 순서를 알고, 어를 이용하여 사물의 명확한 관념과 표현력을 발전시키는 것을 말한다. 이 중에서 수와 형은 바로 수학에서 산술과 기하를 의미한다(김정환, 1974; 1976). 결국, 그는 인간의 능력을 개발하기 위한 도구로서 수학과 언어를 중시하였으며, 수학은 인간 주변의 사물에 대한 직접적인 경험을 통해서만 내적 직관으로 구성될 수 있는 것으로 본다. 즉, 그는 사물의 본질과 이 세상의 도덕적 질서를 자신의 심안으로 예감하는 것을 중시하고 있다.

(2) Poincaré의 수학의 발견과 직관

Poincaré(1905)는 세 가지 종류의 직관을 들고 있다. 즉 (1) 개인의 감각이나 상상에 따른 것 (2) 실험과학에서 있을 수 있는 귀납적 개괄 (3) 순수한 수의 직관이 그것이다. 처음 두 직관은 우리에게 확실성을 부여하지 않지만, '수의 직관'은 의심할 여지가 없다. 따라서 엄밀함을 구하고자 한다면 순수한 수의 직관에 의존해야 한다(pp. 66-67). 사실, 수학의 역사는 엄밀성 추구의 역사였으며, 이 과정에서 논리적 사고가 중시되어 왔다. 이에 대하여 Poincaré는 논리만으로는 불충분하다는 것, 논리과학만이 유일한 과학이 아니라는 것, 그리고 직관은 논리의 보충 혹은 보정해독(補正解毒)의 역할을 한다고 말한다(Poincaré, 1905, p. 68). 그는 직관과 논리를 유기체에 비추어 해석하고, 직관과 논리가 수학 문제 해결에서 각각의 역할을 독특하게 수행한다고 주장한다. 즉, 확실성을 부여해 줄 때 유용하게 사용되어지는 것은 논리이며, 그 논리는 증명의 도구이다. 이에 대하여 직관은 발명의 도구이다(Poincaré, 1905, p. 72).

수학적 사실의 발견은 '유용한 결합'을 만드는 데 있으며, 발견이란 결국 '식별과 선택'이다. Poincaré는 선택의 과정을 무의식의 과정으로 설명하는데, 이에 대한 근거로 그의 Fuchsienne 함수에 대한 논문을 쓸 때의 경험을 들고 있다.

> 당시 나는 살고 있던 Caen시를 떠나 광산학교에서 있었던 지질탐사에 참가했었다. 이 때, 여행을 위한 여러 가지 일에 휩싸여 수학에 관한 생각은 잠시 잊고 있었다. 꾸우탄스에 도착했을 때, 어딘가에 가기 위해서 합승마차에 몸을 실었다. 그 마차의 승강대에 발을 딛는 순간 다음과 같은 생각이 떠올랐다. 즉, Fuchsienne 함수를 정의하는 데 이용한 변환은 Non-Euclid의 변환과 같다는 생각이었다(Poincaré, 1908, p.34).

이와 같이, 그에게 무의식 과정의 역할은 수학적 발견의 활동에서 큰 의의를 갖는다.

그러나 그는, 무의식적 활동은 의식적 활동이 선행된 연후에야 효과가 있음을 지적한다. 아르키메데스가 순금의 순도를 알아내기 위하여 고심하던 중에(의식적 과정), 머리를 식히기 위하여 목욕을 하던 과정에서(무의식적 과정) 갑작스런 '부력'의 깨달음은 모든 유용한 무의식적 활동에 선행되는 예비적인 의식활동이 있음을 알 수 있다. 발견의 과정에서 의식의 활동이 일어난 연후에 부화기를 거친다. 부화기에 앞선 의식적 활동을 Poincaré는 예비적 의식활동, Hadamard(1945)는 '준비기'로 명명한다. 부화기에서의 무의식적 활동은 유용한 결합이 이루어지도록 계속 시도하게 되고, 유용한 결합이 이루어지는 순간에 이것은 과학적 심미안의 기제에 따라 의식에 떠오르고, 이를 정리하기만 하면 된다.

준비기-부화기-발현기-검증기로 이어지는 발견의 과정에서, 무의식적 활동이 일어나는 부화기에서 갑작스런 계시, 또는 통찰의 발생은 계속적인 의식적 노력에 의해 수행되는 형식-논리적인 사고의 과정으로는 해석할 수 없는, 또 하나의 수학적 발견의 축인 직관으로 해석할 수 있다. 마찬가지로 수학의 발견의 과정과 같이 수학 학습에서도 학습자들은 이러한 과정을 경험하도록 유도되어야 한다. 이는 논리만을 치중해 왔던 학교 수학에서 하나의 대안으로 제시될 수 있다.

(3) Fischbein의 직관에 관한 이론

Fischbein(1987)은 학교 수학에서의 직관의 중요성에 비추어 수학에서의 직관의 본질에 대하여 폭넓은 견해를 제시하고 있다. 그는 직관의 일반적인 특성으로 자명성(self-evidence), 내재적 확실성(intrinsic certainty), 고집성(perseverance), 강제성(coerciveness), 이론적 성격(theory status), 외삽성(extrapolativeness), 전체성(globality), 암묵성(implicitness)을 들고 있다(Fischbein, 1987, pp.43-56). 각각의 특성을 간단히 살펴보면 다음과 같다.

① 자명성: 자명성은 어떤 진술이 정당화에 대한 필요도 없이 스스로 참이라고 느껴지는 성질로 직관의 기본적인 특징이다. '전체는 부분보다 크다.', '모든 수는 다음에 오는 수를 가진다.', '두 점은 하나의 직선을 결정한다.'라는 진술들은 형식적인 증명이나 외재적인 정당화가 필요 없이, 즉각적으로 받아들여지는 자명한 것이다.

② 내재적 확실성: 내재적 확실성은 어떤 진술이 확실한 것으로 받아들여진다는 사실을 말한다. 자명성과 확실성이 밀접하게 관련되어 있지만, 하나가 다른 것으로 환원되지는 않는다. 피타고라스 정리와 같이 학교에서 배운 수학적 정리들은 참이라고 확신되지만 자명한 것이 아니듯, 진술이 자명함에 대한 느낌 없이 옳다고 확신하는 경우이다.

③ 고집성: 고집성은 한번 세워진 직관이 매우 강건하여 다른 해석을 거부하고 받아들이지 못하게 하는 특징이다. 즉, 일단 형성된 직관이 계속해서 강하게 유지되는 현상이다.

④ 강제성: 강제성은 개개인의 추론 방식에 강제적인 효과를 발휘하여, 사실이 논리적으로 증명이 된 후에도 이를 받아들이기를 꺼리는 특성이다.

⑤ 이론적 성격: 직관은 단순히 주어진 사실에 대한 지각이 아니라, 하나의 이론이다.

⑥ 외삽성: 외삽성은 어떤 영역에서 타당하다고 입증된 개별 명제나 일반적인 법칙, 명제 또는 이론 전체를 타당성이 확정되지 않고, 단지 가정되어 있는 다른 영역에 적용하는 것을 의미한다.

⑦ 전체성: 직관은 분석적 사고와는 반대로 전체적이고 종합적인 사고이다. 즉, 직관은 어떤 상황의 전체적인 관점을 제공하는 구조화된 인지이다. 전체성의 특징은 형태심리학(Gestalt)의 개념과 유사하다. 직관의 전체성이 형태심리학의 법칙으로부터 유도되었다고 생각하는 이유는 전체적인 이미지로 인한 유추에 의해 아이디어를 얻기 때문이다.

⑧ 암묵성: 직관적 사고에서 외삽이 무의식적으로 일어나듯이, 직관은 하부의 암묵적인 과정과 표면의 구조화된 메카니즘의 표현이다.

또한, 그는 직관의 본질에 대한 탐구를 위하여, 직관을 그 역할에 따라 단정 직관, 추측 직관, 예견 직관, 결론 직관으로 분류하고 있다. 그리고 기원에 근거하여 제 1직관과 제 2직관으로 구분하는데, 제 1직관은 각 개인의 특수한 경험에 따라 영향을 받아 생성된 것으로 체계적인 교육과 무관하게 나타나는 직관이다. 이에 반해 제 2직관은 체계적인 학교 교육의 영향으로 새롭게 개발되

는 직관이다. 이러한 관점은 직관이 적절한 훈련에 의해 만들어지고, 소멸될 수 있다는 가설을 포함하기 때문에 특히 교육에서 중요시해야 할 내용이다.

그러나, 제 1직관과 제 2직관의 구별은 절대적인 것이 아니다. 이것은 기본적이고 자연스럽게 요구된 개념의 직관으로부터 아주 복잡하고 반 직관적인 개념들의 직관까지 연속적인 것으로 보아야 한다는 것을 의미한다. 또한, 제 1직관과 제 2직관의 구별은 개인이 처한 문화적 환경에 의존한다. Bishop(1979)은 공간직관에 대하여 서로 다른 문화 속의 사람들이 가지는 직관은 서로 다르며, 이것은 문화적인 환경에 의해 구체화된다는 것을 밝히고 있다.

(4) 창의적인 문제 해결과 직관

수학학습에서 창의적인 문제해결 과정을 언급한 Poincaré와 Hadamard는 몇 단계의 창의적인 사고과정을 제시하였다. 특히, Hadamard의 발견적 사고를 통한 창의적인 문제해결 과정은 Wallas(1926)에 의해 제시된 개념과 거의 유사하며, 다음과 같다(Hadamard, 1945).

① 준비기: 많은 아이디어를 모으고, 아이디어들을 결합하는 단계이다. 이 때, 유용한 결합을 발견하지 못하면, 무의식은 유용한 결합이 일어나도록 계속하여 시도하게 된다.

② 부화기: 무의식 상태에서 유용한 결합이 일어나도록 시도되는 단계이다.

③ 발현기: 부화기에서 이루어진 유용한 결합이 심미적 감수성에 의해 선택되었을 때, 의식 속에 영감처럼 떠오르는 단계이다. 이 단계에서 갑자기 나타나는 결합을 직관이라고 부를 수 있다.

④ 검증기: 발현된 결합을 증명하고 정확하게 표현하는 단계이다. 이 단계는 후속 작업을 위한 새로운 출발점이 된다.

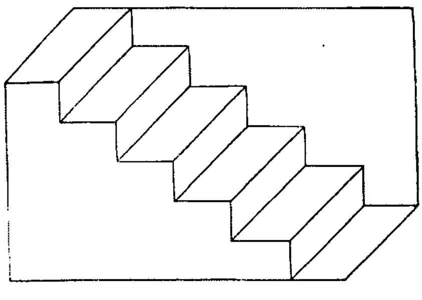
이상과 같은, 일련의 문제해결 과정에서 직관은 논리와 더불어 각각의 역할을 수행하기도 하고, 서로에게 영향을 주기도 한다. 예를 들면, 준비기에서는 의식적이고 논리적인 문제의 이해와 분석, 아이디어에 대한 유용한 결합의 시도가 계속적으로 일어나는데, 이것은 논리적 사고에 의해 가능하다. 한편 이 시기의 예비적인 의식적 활동은 계시, 즉 직관이 일어나도록 하는 선행 조건인 것이다.

수학교육에서 문제해결에 관한 연구의 대표자인 Polya(1957)의 '문제해결 4단계'에서도 문제해결 단계에서 직관의 직접적인 언급은 피하였지만, 문제 이해-계획 수립-계획 실행-반성으로 이어지는 각 단계에 전조작적 직관-예견 직관-조작적 직관-후조작적 직관이 내재되어 있음을 알 수 있다.

Ⅲ. 감각(시각)에 의한 직관의 결함

우리는 시각, 청각, 촉각, 미각, 후각이라는 다섯 가지 감각을 통하여 끊임없이 외부의 정보를 받아들이고 있다. 감각을 통하여 습득된 정보는 올바른 문제해결을 위한 유용한 도구로 이용되기도 하지만, 때로는 착각이나 오류를 일으키게 하는 원인이 되기도 한다. 이것은 우리의 감각에 한계가 있기 때문이며, 또한 감각을 통하여 얻은 정보는 지나치게 과신하는 직관으로 인해 오류를 일으키기 때문이다. 특히, 우리가 느끼는 시각의 한계를 보이는 다양한 예들은 감각에 의해 야기될 수 있는 직관의 오류를 보여 준다.

우리가 어떤 대상을 볼 때, 동일한 장소에서 동일한 대상을 보더라도 관찰자에 따라 대상을 다르게 인식할 수 있다. 즉, 두 관찰자의 망막에 맺힌 상은 같다고 할지라도 동일한 시각 경험을 갖지 않을 수 있다. 이것은 Hanson (1958)이 제시한 다음 그림에 의해 확인할 수 있다.

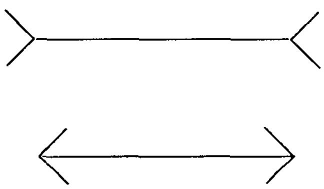


<그림 1>

위 그림을 처음 볼 때, 대부분 사람들은 윗면이 보이는 계단의 그림으로 보게 된다. 그러나 꼭 그렇게 보이는 것만은 아니다. 천천히 들여다보면, 어렵지 않게 아래면이 보이는 계단의 그림으로 볼 수도 있다. 무심결에

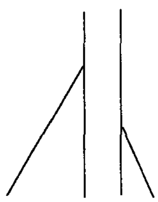
이 그림이 위에서 본 계단, 아래서 본 계단의 그림으로 수시로 바뀌게 된다는 사실을 알게 된다(Chalmers, 1982; 신일철・신중섭(공역), 1985, p. 58). 이와 같이, 시각을 통하여 습득된 정보는 관찰자의 경험이나 지식, 또는 직관적 판단에 의해 다르게 인식될 수 있다. 특히, 시각을 통해 인식된 대상에 대해 면밀히 분석하지 않은 즉각적인 판단은 사물의 특성을 왜곡시키는 원인이 되기도 한다.

Müller-Lyer는 Mach 착시로 알려진, 똑 같은 길이를 가진 두 개의 수평선 길이를 다르게 인식하게 하는 직관의 오류를 제시하고 있다(Klein, 1985. 김경화・이혜숙(공역), 1994, p. 27). 다음 그림은, 실제로는 같은 길이의 수평선이지만, 우리의 시각은 화살표 방향이 주는 인상에 의하여 직관적으로 전자의 길이를 길게 느낀다.



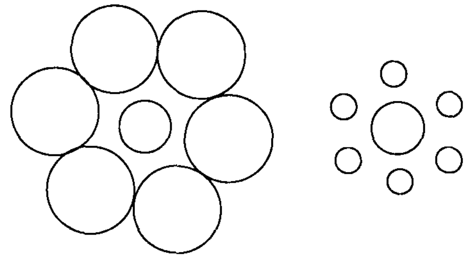
<그림 2> Mach 착시

Poggendrof(1960년경)에 의해 제시된 착시는 실제로 사선들을 연장시켰을 때, 뚜렷이 잘못된 직관의 오류를 확인할 수 있다(Kline, 1985. 김경화・이혜숙(공역), 1994, p. 28). 직관적으로 우리는 오른쪽 사선을 연장할 때, 왼쪽 사선의 아래쪽에서 만날 것이라고 판단할 수 있다. 그러나, 실제로 그려보면, 오른쪽 사선을 연장한 선이 왼쪽 사선의 위를 지난다는 사실을 알 수 있다.



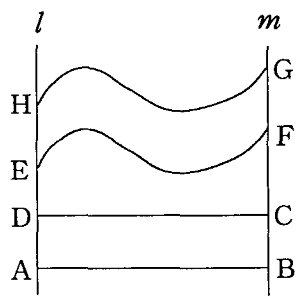
<그림 3>

대비에 의한 두드러진 착시는 <그림 4>에서 볼 수 있다. 두 그림에서 큰 원들에 의해 둘러싸인 원이 작은 원에 의해 둘러싸인 원보다 훨씬 작아 보이지만, 두 원의 크기는 같다(Kline, 1985. 김경화・이혜숙(공역), 1994, p. 29).



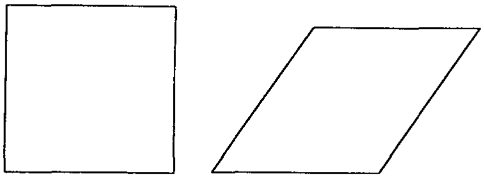
<그림 4>

이상과 같이, 시각에 의한 착시 현상은 도형이 주는 직관적인 이미지로 도형을 즉각적으로 판단함으로써 수학 문제해결에서 오류를 일으키게 한다. 예를 들면, 다음 그림과 같이 서로 평행인 두 직선 l, m에 대하여 $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$이고, $\overline{AB}$ 와 $\overline{CD}$ 사이의 거리와 곡선 EF와 HG사이의 거리가 같을 때, 두 영역의 넓이를 비교하라고 하면, 학생들은 EFGH의 넓이가 ABCD의 넓이보다 넓다고 대답한다. 이것은 정적분을 배운 학생조차도 곡선으로 구성된 영역의 길이가 더 길기 때문에 넓이가 클 것이라고 판단하는 것이다(Fischbein, 1987, p. 116).



<그림 5>

또 다른 예는 다음과 같다. 스트로우를 이용하여 만든 직사각형이 있다. 이 직사각형을 옆으로 비스듬히 눕혔다. 그러면 두 사각형은 넓이가 변하는가? 이 물음에 많은 학생들은 넓이가 같다고 답한다. 이것은 도형의 모양이 바뀌어도 같은 둘레로 형성되었기 때문에 넓이는 변하지 않을 것이라고 확신하기 때문이다.



<그림 6>

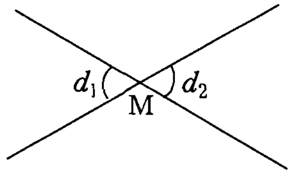
이와 같이, 감각(시각)에 의해 야기된 직관의 오류는 제 1직관에 의해 깊은 영향을 받으며, 결국 새로운 규약 체계나 논리적 근거를 필요로 하는 제 2직관의 개발을 요구한다. 학습자는 직관적인 감각이 오류를 일으킬 수 있음을 인식해야 한다. 제시한 예시(그림 6)의 경우에, 문제가 내포하고 있는 직관에 의한 오류를 실연에 의해 쉽게 파악시킬 수 있으며, 수학적 개념을 학습하고, 형식화 과정을 수행함으로써 직관에 의한 오류를 극복할 수 있다.

Ⅳ. 문제해결 과정에서 직관에 의한 오류 발생

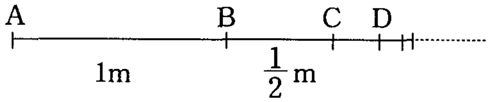
학습자가 가질 수 있는 직관에 의한 오류를 확인하는 것은 직관에 의해 학습자가 문제를 풀 때, 잘못된 길로 들어서거나 판단에서의 오류를 막을 수 있는 안내를 제공한다는 점에서 중요하다. 예를 들면, '수열 1, 2, 3, □, · · · 에서, □안에 들어갈 수는 무엇인가?'라는 질문에 대다수의 학생들은 피보나찌 수열과 같은 수의 배열은 생각하지 않고, 즉시 4 라고 답한다. 이 사실은 '자연수'를 항시 인식하고 있는 피험자에게는 당연한 결과이며, 피험자가 가지고 있는 '자연수'에 관한 직관이 다양한 사고의 폭을 제한하고 있는 것이다.

문제해결 과정에서 직관적 인지는 문제에 따라 문제해결에 긍정적이거나 부정적으로 영향을 주기도 한다. 이러한 관점에서, Fischbein, Tirosh & Melamed(1981)는 수학교육에서 직관의 측정가능성에 관한 논문에서, 직관이 문제해결에 끼치는 영향에 따라 세 개의 범주로 그들의 실험에 이용된 문제를 나누고 있다(pp. 497-508). 첫째는, 옳은 답에 높은 빈도를 보이고, 이러한 풀이들은 높은 직관적 수용의 정도를 보이는 문제이다. 그들은 이러한 범주의 예로

[1-1] 두 직선이 M에서 만난다. 이 때, 각 d_1과 d_2는 같은가? (같다)



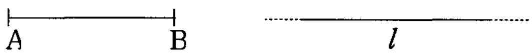
[1-2] $\overline{AB}$ = 1m인 직선이 있다. 다른 선분 $\overline{BC}$ = $\frac{1}{2}$m를 $\overline{AB}$의 오른쪽에 붙인다. 이런 방법으로 계속하여 $\frac{1}{4}$m, $\frac{1}{8}$m, · · · 의 선분을 붙이면, 이런 붙이는 과정의 끝은 있겠는가? (없다)



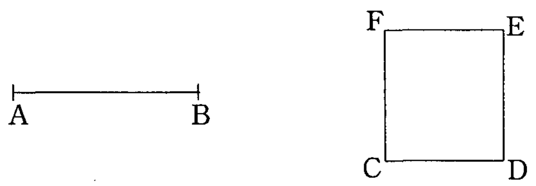
를 들고 있는데, 이러한 범주의 문제들은 교수 과정에서 어려움을 야기하지 않는다.

둘째는, 서로 상반되는 두 개의 답(정답과 오답)에 각각 50%에 가까운 빈도를 얻는 문제이며, 직관적 수용의 정도는 중간 정도의 수준에 위치한다. 이러한 문제는 각각의 상반된 견해에 강한 직관적 신념을 가지기 때문에 교수학적인 어려움을 야기할 수 있으며, 적절한 교수전략을 이용하여 옳은 답에 대한 빈도와 직관적 수용의 정도를 높일 수 있다. 그들은 이러한 범주의 예로

[2-1] 선분 $\overline{AB}$ 위의 점의 집합과 직선 l위의 점을 생각하자. 선분 $\overline{AB}$ 위의 점과 직선 l위의 점을 각각 대응시킬 수 있는가? (단, 단 한 번 이상 점을 사용하는 것은 금한다.) (있다)



[2-2] 선분 $\overline{AB}$ 위의 점의 집합과 사각형 CDEF의 점의 집합을 생각하자. 선분 $\overline{AB}$ 위의 단 하나의 점과 사각형의 점을 각각 대응시킬 수 있는가? (단, 단 한 번 이상 점을 사용하는 것은 금한다.) (있다)

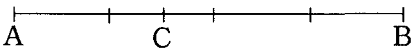


을 들고 있다.

셋 째는, 옳은 답에 낮은 빈도를 보이고, 옳지 않은 답에 높은 빈도를 보이며, 옳은 답보다는 옳지 않은 답에 높은 정도의 직관적 수용을 보여주는 문제이다. 이 범주의 옳은 답들은 반 직관적이다. 직관은 옳은 답을 수용하는데 오히려 방해가 된다. 학교 수학과 관련하여 옳지 않은 것으로 간주되는 답이 학생들에게는 쉽게 받아들여진다. 즉, 직관이 문제해결에 오히려 부정적인 영향을 주는 것이다. 그들은 이러한 범주의 예로

[3-1] $\overline{AB}$ = 1m인 직선이 있다. 다른 선분 $\overline{BC}$ = $\frac{1}{2}$m를 $\overline{AB}$의 오른쪽에 붙인다. 이런 방법으로 계속하여 $\frac{1}{4}$m, $\frac{1}{8}$m, · · · 의 선분을 붙인다. 이 때, 선분의 합 $\overline{AB}$ + $\overline{BC}$ + $\overline{CD}$ + · · · 는 무엇인가? (2)

[3-2] 선분 $\overline{AB}$ 위에 점 C를 임의로 선택하자. 선분 $\overline{AB}$를 양쪽의 길이가 같도록 반으로 나누고, 같은 방법으로 나누어진 선분을 나누어 가자. 그러면 우리는 나누는 점들 중 하나가 반드시 점 C에 도달하겠는가? (상황에 따라 다르다)



를 들고 있다.

특히, [3-2]의 경우에, 선분 위의 점이 유리수이거나 무리수인 경우에 따라 다르기 때문에 정답은 '점의 위치에 따라 다르다'이다. 이것은 유리수와 무리수를 배웠어야 정답을 할 수 있다고 전제할 수 있다. 그러나 무리수와 유리수에 대하여 학습한 학생들조차 계속되는 분할의 무한에 관한 직관적 편견에 의해 낮은 정답률을 보이고 있다(Fischbein, Tirosh & Melamed, 1981, p. 510). 즉, 한없이 나누는 과정을 반복하면, 결국 점 C에 도달할 수 있다고 판단한다. 또한, 옳은 답을 한 학생들도 그들의 답에 강한 신념을 갖지 못하며, 직관적 수용의 정도가 아주 낮다는 것을 알 수 있다.

특히, 세 번째 범주에서 살펴본 바와 같이, 직관적 인지가 문제해결에 장애로써 작용한다는 사실을 알 수 있다. 지식의 직관적 하부구조를 분석하기 위하여, 우리는 직관에 의해 야기되는 오류의 요소를 찾아내어야 할 뿐만이 아니라, 학습자에 의해 이러한 직관적 편견이 어느 정도로 강하게 수용되는지 알아야 한다. 이것은 올바른 문제해결 지도를 위한 교수 전략을 고안하는 지름길이며, 따라서 직관에 의한 오류를 처치하는 길이기도 하다.

결론적으로, 새로운 교수 전략은 학습자의 직관적 인지를 기르도록 고안되어야 하며, 또한 직관에 의한 오류가 발생하는 학습장면에서는 직관적 오류를 야기하는 갈등을 극복하도록 유도하는 교수전략의 고안이 요구된다.

V. 직관에 의한 오류의 처치 방안

Fischbein(1987)에 의한, 직관적 인지의 제 1직관과 제 2직관으로의 분류에서, 제 2직관은 원래 존재하지 않는 새로운 직관을 개발할 수 있다는 가정으로 나타나며, 직관적 인지능력을 기를 수 있는 교육 가능성을 함의한다. 만약 수학자들에 의해 '무한집합과 그의 진부분집합은 동치이다.'라는 진술이 하나의 신념으로 받아들여진다면, 이는 그 해석이 신념 속에 학습된 개념으로 변형되어 제 2직관으로 나타나게 될 것이다.

학습을 통해 새로운 직관이 형성될 수 있다는 Fischbein의 직관에 대한 견해는 감각이나 문제해결 과정에서 야기될 수 있는 직관에 의한 오류를 처치할 수 있는 가능성을 제시해 준다. 중요한 권고 사항은 학생들이 개념과 연산의 형식적 해석과 직관적 해석 사이의 갈등을 의식하도록 도와 줄 수 있는 교수학적 상황을 창안하는 것이다(우정호, 2000).

(1) 직관과 논리와의 조화

Poincaré(1905)는 수학자들의 논문을 조사하여, 어떤 수학자는 직관적이고, 또 다른 수학자는 논리적이라고 구분하고, 전자를 기하학적 학파로, 후자를 해석학적 학파로 부르고 있다. 예를 들면, 19세기의 독일 수학계의 Riemann과 Weierstrass가 각각의 상징으로 예시될 수 있다. Riemann의 경우, 그의 연구 분야는 곧 바로 기하

학의 도움을 받으며, 한번 이해된 관념은 결코 잊을 수 없는 도형으로 표현된다. 반대로, Weierstrass의 경우, 그의 연구의 어느 곳에서도 도형을 찾아볼 수 없으며 해석적 변형의 연속이다.

이러한 구분에도 불구하고, Weierstrass는 '변분법'의 근본적인 방법론에 대한 저서에서 단 하나의 도형을 그리고, 그 다음에는 극도의 논리적인 방식으로 모든 것을 연역한다. 여기에서는 최초의 직관이 바로 도형을 그리는 직관이다. 이것은 논리가 최초의 직관 다음에 개입된다는 것을 보여 주는 예가 된다(Hadamard, 1945, p. 108). 또한, 이 예는 순전히 논리적인 노력에 의한 발견은 결코 있을 수 없음을 말해준다. 즉 문제해결 과정에서 직관과 논리가 서로 상보적인 역할을 수행한다는 것이다.

그러한 다른 예는 '형식주의' 창시자인 Hilbert의 경우를 들 수 있다.

> "이중 부등식 $a>b>c$ 와 함께, '사이에 있다.'는 아이디어에 대한 기하학적 그림으로 직선 위에 계속되는 각각의 세 점들을 나타내지 않는 사람이 있겠는가? 함수의 연속성이나 집적점의 존재에 대한 어려운 정리를 완전히 엄밀하게 증명하도록 요구할 때, 계속하여 축소되는 선분이나 직사각형의 그림을 이용하지 않는 사람이 있겠는가?" (Fischbein, 1987, p.17 재인용).

이번에는 직관이 확실성을 보장하지 않는 예를 들어보자. "도함수를 갖지 않는 연속함수가 있다."는 것을 우리는 잘 알고 있다. 그러나 논리적으로 명확한 이 주장이 직관적으로는 모순이 있다. 전대의 수학자들은 모든 연속함수는 도함수를 갖는다고 주장하는데 주저하지 않았다. 명백하게 모순인 이 명제는 우리가 엄밀한 논리적 해석에 의존해야 함을 의미한다. 결론적으로, 직관 또는 논리의 어느 한 측면에 의한 수학의 발견에는 많은 어려움이 따른다. 엄밀한 구분은 불가능할지라도 수학 문제해결의 과정에서 직관과 논리의 적절한 균형이 성공적인 문제해결을 위해 필요하고 할 수 있다.

(2) 기능의 고착화 극복

형태심리학자들의 주요 공헌의 하나는 과거의 경험이 새로운 문제를 해결하는데 부정적인 영향을 미칠 수 있다는 사실을 발견한 것이다. Dunker는 기능의 고착화를 '대상물의 새로운 이용법을 방해하는 정신적 장애'로 정의하고 있다(김언주, 1991). 이러한 기능의 고착화 현상은 단지 물질적 대상에 의한 고착화 현상 뿐만이 아니라, 수학 문제해결 과정에서 용어에 의해, 또는 직관적 인지에 의해 쉽게 발견할 수 있다. 예를 들면, '평균속도'의 계산의 경우에 '평균'이라는 용어가 가지는 기능의 고착화로 인해 흔히 두 속도를 합한 것을 2로 나누는 현상을 볼 수 있다.

Fischbein(1987)의 조사에 따르면, 학생들은 동전 던지기에서 HTTHT는 HHHHH보다 무작위 과정을 더 잘 대표하기 때문에 더 잘 일어나기 쉽다고 판단한다. 또한, "매일 대략 45명의 아이가 태어나는 병원과 대략 15명의 아이가 태어나는 병원에서 일년 동안에 남자 아이가 60%이상 태어날 날이 많은 병원은 어느 병원이겠는가" 라는 질문에 95명의 피험자 중에서 21명이 45명의 아이가 태어나는 병원을, 21명은 15명의 아이가 태어나는 병원을 선택했으며, 53명은 두 병원이 같다고 대답하였다 (Fischbein, 1987, p. 109). 그러나, 실제로 큰 표본은 이론적으로 기대되는 기대치인 50%에 거의 가까우므로 15명의 아이가 태어나는 병원에서 남자아이가 60%이상 태어날 날의 기대수가 더 크다. 그럼에도 불구하고 이러한 현상은 두 표본 모두 집단의 대표성을 나타내고 있다는 초기 직관의 고착성으로 인해 나타나는 것으로 사건 가능성의 판단에서 표본의 크기를 고려하지 않음을 알 수 있다.

직관의 고착성은 경험에 의해 굳은 신념으로 정착되고 강화되어진다. 교사에 의해 동수누가 모델로 처음 곱셈을 경험한 아동들은 1 l 에 900원인 음료수의 0.7 l 의 값을 쉽게 발견하지 못한다. 비록 동수누가 모델이 그 발달 단계에 있는 아동들에게는 적절한 교수방법이지만, 동수누가 모델에 의한 고착성은 이후에 분수나 소수를 포함하는 형식적 조작을 요하는 곱셈 학습에서 어려움을 야기하는 원인이 된다. 이것은 초기에 형성된 직관이 이후의 형식적 개념학습과 일관성을 유지할 수 있도록 배려하는 교수학적 노력이 요구됨을 암시한다.

(3) 직관 모델에 의한 오류와 그의 처치

동형대응을 근거로, 체계 A에 의한 기술이나 해가 체계 B로 반영되거나, 그 역이 성립할 때, 체계 B를 체계

A의 모델이라고 한다. 모델은 직관을 형성하기 위한 기본적인 도구이다. 직관적으로 수용할 수 없는 어떤 관념을 파악해야 할 때는 보다 더 직관적으로 동형인 대체물을 이용하는 경향이 있는데, 그러한 대체물을 흔히 직관 모델이라고 한다(우정호, 2000). 직관 모델은 수학적 개념을 직관적으로 수용할 수 있도록 하거나, 문제해결 과정에서의 비약을 위해 필요한 분명함과 일관성을 제공한다.

직관 모델은 벤 다이어그램, 수형도와 같이 현상이나 현상사이의 관계를 그림으로 나타내는 도해 모델이 대표적이다. 도해 모델은 원형과 동형이면서도 원형에 대한 상대적 자율성 때문에 문제해결을 위한 유용한 도구가 된다. 그러나, 모델의 직관적 성질은 문제해결에서 오류의 원인이 되기도 한다. 예를 들면, 속도 그래프를 주고, 학생들에게 도로의 선형에 대해 묻는 실험에서 중등학교 학생들이 범한 큰 오류는 그래프와 도로의 선형을 서로 혼동하여, 그래프를 기호수준과 그림수준에 동시에 사용하였다는 것이다(Janvier, 1981). 이것은 그래프의 형태와 도로의 구조가 서로 도형적으로 유사함에 의해 야기된 오류로 해석할 수 있다.

사실, 도해 모델은 추상적인 관계를 나타내는 수학적 사실을 직관적으로 표현하는데 유용하다. 그러나, 이 모델이 풍부하고 적절하게 이용되기 위해서는 모델이 갖고 있는 명확한 규약을 이해해야만 한다. $A \subset B$ 를 나타내는 벤 다이어그램은 A집합을 나타내는 원이 B집합을 나타내는 원 안에 완전히 포함되도록 표현되기 때문에 학생들은 $A \subset B$의 의미 속에 $A = B$ 가 내포되어 있음을 망각하게 된다. 이런 경우에 벤 다이어그램의 이용은 그 개념에 대한 명확한 규약을 이해하도록 지도될 때, 오류를 막을 수 있고, 모델로서의 효과를 높일 수 있다.

결론적으로, 직관 모델이 문제해결에 유용하기 위해서는 모델의 시각적 표현이 즉각적 이해가 가능하도록 함과 동시에 직관 모델에 의한 오류를 막기 위하여, 이용되는 개념의 의미를 규정하는 규약을 확인하도록 지도되어야 한다.

(4) 메타인지 능력의 개발

메타인지 개념은 수학 문제해결에 관한 연구에서 관심의 대상이 되고 있다. 이것은 문제해결이라는 상황이 학습자의 메타인지 활동을 활발하게 이루어질 수 있게 하고, 동시에 성공적인 문제해결을 위해서는 메타인지 활동이 중요한 역할을 수행해야 한다고 생각하기 때문이다.

Garofalo & Lester(1985)는 문제해결에서의 메타인지를 Flavell과 Brown 등의 연구를 기초로 하여 인지에 대한 지식(메타인지적 지식)과 인지에 대한 조정(메타인지적 기능)으로 분류하고 있다. 메타인지의 조정 측면은 문제의 특성을 이해하는 데 필요한 전략의 선택, 활동 절차의 계획, 계획을 실행하기 위한 적절한 전략의 선택, 전략을 수행하는 활동에 대한 감시, 전략과 계획의 결과에 대한 평가, 필요성에 따라 부적절한 전략과 계획의 수정과 삭제 등을 포함하는 문제해결 과정의 다양한 결정과 전략적 활동과 관계가 있다.

메타인지적 기능은 수학 문제해결에 있어서 결정적인 요소로, 그 요인으로서는 감시, 자기평가, 제어를 들 수 있다. 감시는 메타인지적 지식을 분명하게 알고, 자신의 인지활동의 진행 상태를 스스로 파악하는 것을 말한다. 자기 평가는 활동의 목적과 메타인지적 지식을 분명하게 알고, 자신의 인지활동 성과를 스스로 평가하는 것이다. 제어는 자기 평가의 결과와 메타인지적 지식을 분명하게 알면서, 자신의 인지활동에 지시를 하고 그 후의 활동을 통제하거나 수정하는 것을 포함한다.

직관이 즉각적인 일차적 인지작용으로, 분석적 사고를 하지 않는 인지나 이해를 의미하므로, 이로 인해 앞에서 살펴본 바와 같이, 직관은 문제해결 과정에서 오류를 일으키거나 수학적 사고를 왜곡시킬 수 있다. 따라서, 메타인지 능력의 개발을 통하여 자신의 직관적인 사고과정을 감시하고, 제어하고, 자기 평가하는 능력을 길러야 한다. 또한, 수학적 사실이나 개념에서 형식적인 정의나 규칙을 잘 파악하고 이해하여, 올바른 인지적 신념체계를 조직함으로써 직관에 의한 오 개념의 형성을 방지할 수 있다.

직관에는 어느 정도의 과신이 있다. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ 을 구하는 문제에서 '2' 라는 정답을 말한 학생들은 그 자신의 답을 높게 신뢰하지 않은 반면에, 그렇지 않은 학생들은 상대적으로 그들의 답에 강한 신념을 가지고 있었다(Fischbein, 1987, pp. 34-35). 이와 같은 과신은 자신의 해석과 판단을 과대 평가함으로써, 직관적 장애를 일으킨다. 결국, 이런 장애는 교수학적 전략을 이용하여 극복해야 하는데, 그러기 위해서는 자신의 사

고과정의 흐름에서 사고활동을 분석하고 조정하는 메타 인지 능력을 기르도록 유도해야 한다.

Ⅵ. 결 론

최근까지 직관은 수학교육에서 중요하게 취급되지 않은 영역이지만, 문제해결에서는 생산적 사고를 유발시키는 중요한 원천이다. 그러나 직관은 그 특징으로 인하여, 수학적 사고에 방해를 주거나, 수학 문제해결에서 오류를 일으킬 수 있음을 간과 할 수 없다.

따라서, 본 글에서는 수학교육에서 직관으로 인해 야기될 수 있는 오류로서, 감각(시각)에 의한 오류와 수학 문제에서 직관에 의한 오류를 예시하였다. 또한, 수학 문제해결 과정에서 직관이 문제해결에 긍정적인 영향을 주거나, 부정적인 영향을 주는 문제 유형을 Fischbein, Tirosh & Melamed(1981)의 논문을 중심으로 알아보았다.

확실히 직관은 문제해결에 유용한 단서를 제공하며, 참된 지식의 근원으로 인식되고 있다. 그러나 직관으로 인해 문제해결 과정에서 야기되는 오류는 새로운 교수전략의 개발의 필요성을 암시한다. 수학학습에서 수학적 사실이나 개념의 형식적 해석과 직관적 해석의 적절한 균형을 위한 교수전략으로는 직관과 논리의 조화, 기능의 고착화 현상의 극복, 유용한 직관 모델의 개발, 메타 인지 능력의 개발 등을 들 수 있다.

결론적으로 수학적 사실이나 개념, 원리, 법칙의 직관적 측면과 형식 논리적 측면의 적절한 균형과 조절이 교수학습 현장에 정착되도록 해야 하며, 어느 한 쪽에 치우친 절름발이 수학교육이 되지 않도록 해야 한다.

참 고 문 헌

김언주 (1991). 인지심리학: 이론과 적용, 서울: 정민사.

김정환 (1974). 페스탈로찌의 생애와 사상, 서울: 박영사.

______ (1976). 페스탈로찌의 수학교육원론 연구, 벽계 이인기 박사 고희기념 교육학 논집, pp.327-371.

우정호 (2000). 수학학습-지도원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.

Bishop, A. J. (1979). Visualising and mathematics in a pre-technological culture. *Educational Studies in Mathematics* 7, pp.23-40.

Chalmers, A. F. (1982). *What is this thing called science?: An assessment of the nature and status of science and its method.* St. Lucia, Queensland: University of Queensland press. 신일철 · 신중섭 (공역) (1985). 현대의 과학 철학. 서울: 서광사.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics, An Educational Approach.* D. Reidel Publisching Company, Dordrecht Netherlands.

Fischbein, E.; Tirosh, D. & Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics* 12, pp.491-512.

Garofalo, J. & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and Mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education,* **16(3)**, pp.163-176.

Hadamard, J. (1945). *The Mathematician's Mind; The Psychology of Invention in the Mathematics Field.* Princeton University Press.

Hanson, N. R. (1958). *Patterns of Discovery: An inquiry into the conceptual functions of science.* Cambridge University Press.

Janvier, C. (1981). Use of Situations in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics* 12, pp.113-122.

Kline, M. (1985). *Mathematics and the Search for Knowledge*, Oxford University Press. 김경화 · 이혜숙 (공역) (1994). 지식의 추구와 수학. 서울: 이화여자대학교 출판부.

Poincaré, H. (1905). *La Valeur de la Science*, 김형보 (역) (1983). 과학의 가치, 서울: 단대출판부.

________ (1908). Science et Méthode. 김형보 · 오병승 (공역) (1982). 과학의 방법, 서울: 단대출판부.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method.* 2nd ed. New York: Doubleday Co. 우정호 (역).(1986). 어떻게 문제를 풀 것인가: 수학적 사고 방법. 서울: (주)천재교육.

Wallas, G. (1926). *The art of thought.* New York: Harcourt Brace.

A Study on Intuition and Its Fallacy in Mathematics Education

Lee, Dae-Hyun
Korea National University of Education, Darak, Kangnae, Cheongwon,
Chungbuk, 363-791, Korea; E-mail: leedh6@hanmail.net

Park, Bae-Hun
Korea National University of Education, Darak, Kangnae, Cheongwon,
Chungbuk, 363-791, Korea

The purpose of this thesis is to search the situation of an outbreak of the fallacy and methods of its treatment. We regard intuition as origins of genuine knowledge, but it sometimes raises the fallacy by intrinsic characters of itself.

It makes an examination of the fallacy of the sense of sight like an optical illusion to instance that of sense. The sense of sight is an important factor in an intuitive cognition. However, its activity without thinking raises the fallacy of intuition in the process to observe and judge the things.

I point out the fallacy of intuition which originates from terms and concepts in mathematical problems. The concept of mean velocity is representative. In this case, students make a mistake which means velocity can be solved by dividing the sum of v_1 and v_2 into two. The methods which overcome the fallacy of intuition are balance of intuition and logic, overcome of functional fixedness, the development of intuitive models and the development of metacognitive ability.