信賴性應用研究
제1권, 제1호, pp. 55-63, 2001

재표집방법에 의한 공정관리지수의 신뢰구간

남경현

경기대학교 경제학부 응용정보통계학전공

Confidence Interval for Capability Process Indices by the Resampling Method

Kyung H. Nam*

Kyonggi University, Suwon, Korea

Abstract

In this paper, we utilize the asymptotic variance of C_{pk} to propose a two-sided confidence interval based on percentile-t bootstrap method. This confidence interval is compared with the ones based on the standard and percentile bootstrap methods. Simulation results show that percentile-t bootstrap method is preferred to other methods for constructing the confidence interval.

1. 서론

품질관리를 실제적으로 적용할 때 어느 시스템이 주어진 기간동안 그 작업을 완수하는지의 여부를 시험한다는 것은 종종 많은 관심의 대상이 된다. 시스템의 그러한 가능성을 평가하기 위한 도구로서 여러개의 공정관리지수들이 소개되어져 왔다.

Kane(1986)은

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \tag{1}$$

를 품질특성값 X가 설정된 규격한계조건을 만족하는지의 측도로서 제안하였는데 이는 현재 가장 많이 사용되어지고 있는 것 중의 하나이다. 식 (1)에서 USL과 LSL은 각각 품질특성값 X의 상한규격과 하한규격을, 분모에 있는 σ는 품질특성값 X의 표준편차를 나타낸다. 본 논문에서는 공정의 표준편차 σ뿐만이 아니라 공정의 평균 μ를 고려한 또다른 공정관리지수를 고려하고자 한다. 평균 μ가 공정의 규격제한값 안에 있다는 가정하에서 C_{pk}는 다음과 같이 μ와 σ의 함수로서 정의되어 진다.

$$C_{pk} = Min\left(\frac{USL-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu-LSL}{3\sigma}\right) \tag{2}$$

$$= (1-k)C_p \tag{3}$$

$$\text{단,} \quad k = \frac{|\mu - M|}{d}$$

여기에서 d는 규격허용구간 길이의 반을 나타내며 M은 상한과 하한의 중점이다. 식(3)에서 보는바와 같이 $C_{pk} = (1-k)C_p$이므로 $C_{pk} \le C_p$임을 쉽게 알 수 있으며 등호는 μ와 M이 같을 때 성립한다. 적은 C_{pk}값은 공정능력이 좋지 않음을 의미한다.

공정관리지수 C_{pk}의 추정량은 편향된 것임이 알려져 있다. 대부분의 공정관리지수들에 대한 연구에서, 공정의 품질관리특성치들은 정규분포를 따른다는 가정을 하고 있으나, 실제적으로 이와 같은 가정을 만족하지 못하는 경우가 많이 있다. Kane(1986), Franklin 과 Wasserman(1992b)(이후부터는 FW로 표시함)등은 모집단의 분포가 정규분포가 아닐 때의 경우에 대한 연구를 하였다. Chan, Xiong과 Zhang(1990)(이후부터는 CXZ로 표시함)은 $\widehat{C_{pk}}$의 분포가 점근적으로 정규분포를 따름을 증명하였다. FW(1992b)는 공정관리지수에 대한 여러 가지 붓스트랩 신뢰구간을 제안하였다.

본 논문에서는 공정관리지수에 대한 양측 신뢰구간을 구하는데 있어서 t-백분위수 방법과 FW(1992b)에 의하여 제안된 백분위수 붓스트랩 신뢰구간과 표준 붓스트랩 신뢰구간을 포함확률과 신뢰구간의 길이 등을 통하여 비교하려 한다. 모의실험결과에 따르면 표본의 수가 작을 때 t-백분위수 방법이 FW(1992b)의 방법보다 포함확률이 높고 짧은 신뢰구간을 제공함을 알 수 있다.

2. 공정관리지수의 추정

2.1 C_{pk}의 추정량

품질특성값에 대한 확률표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 있다 하자. μ에 대한 추정량 $\hat{\mu}$을

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$로 하고 σ에 대한 추정량 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$으로 하자. μ_k는 공정의 k-차 중심적률을 나타낸다. C_p에 대한 추정량 $\widehat{C_p}$은 σ대신 $\hat{\sigma}$을 이용하여 $\widehat{C_p}=\frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}}=\frac{d}{3\hat{\sigma}}$으로 구해지며 C_{pk}에 대해서는 식(3)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\widehat{C_{pk}}=\left(1-\frac{|\overline{X}-M|}{d}\right)\widehat{C_p} \tag{4}$$

Chou와 Owen(1989)는 $\widehat{C_p}$의 정확한 분포를 이용하여 $\widehat{C_{pk}}$의 확률밀도함수, 평균, 분산 및 MSE를 구하였다. Zhang, Stenback과 Wardrop(1990)은 $\widehat{C_{pk}}$이 C_{pk}의 일치통계량임을 밝혔다.

2.2 $\widehat{C_{pk}}$의 점근분포

CXZ(1990)은 $\widehat{C_{pk}}$의 점근분포가 다음과 같이 됨을 보였으며 점근분산 σ^2_{pk}은 t-백분위수 신뢰구간을 구하는데 필수적이다.

$$\sqrt{n}(\widehat{C_{pk}}-C_{pk})\xrightarrow{L}N(0,\sigma^2_{pk}) \tag{5}$$

여기에서

$$\sigma^2_{pk}=\frac{1}{9}-\frac{\mu_3(USL-LSL)}{18\sigma^4}\left[1-\frac{2(M-\mu)}{USL-LSL}\right]+\left[1-\frac{2(M-\mu)}{USL-LSL}\right]^2$$
$$\frac{(USL-LSL)^2(\mu_4-\sigma^4)}{144\sigma^6},\quad \mu<M \text{ 일때} \tag{6}$$
$$\sigma^2_{pk}=\frac{1}{9}+\frac{\mu_3(USL-LSL)}{18\sigma^4}\left[1+\frac{2(M-\mu)}{USL-LSL}\right]+\left[1+\frac{2(M-\mu)}{USL-LSL}\right]^2$$
$$\frac{(USL-LSL)^2(\mu_4-\sigma^4)}{144\sigma^6},\quad \mu>M \text{ 일때}$$

만약 $\mu=M$이라면 $\sqrt{n}(\widehat{C_{pk}}-C_{pk})$의 점근분포는 $-\frac{1}{3\sigma}|Y|-\left(\frac{USL-LSL}{12\sigma^3}\right)Z$와 같이 된다. 여기에서 (Y, Z)는 $\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma^2 & \mu_3\\ \mu_3 & \mu_4-\sigma^4\end{pmatrix}$인 이항정규분포 $N((0,0),\Sigma)$이다.

2.3 표준 붓스트랩 신뢰구간과 백분위수 붓스트랩 신뢰구간

FW(1992b)는 공정관리지수에 대한 세가지 다른 타입의 공정관리지수에 대한 붓스트랩 신뢰

구간을 제안하였으며 95% 붓스트랩 신뢰하한과 90% 붓스트랩 신뢰구간에 대한 성질들을 비교하였다. 또한 모의실험결과에 따라 각기 다른 붓스트랩 방법을 포함확률에 따라 비교하였다. $\widehat{C_{pk}}$과 $\widehat{C^*_{pk}}(i)$를 각각 C_{pk}의 추정량과 그것에 대응하는 i번째 작은 붓스트랩 추정값이라 할 때 FW(1992b)에 의해 제안된 세가지 붓스트랩 방법 중 표준붓스트랩과 백분위수 붓스트랩은 다음과 같다

2.3.1 표준 붓스트랩(SB)

붓스트랩 추정값 $\widehat{C^*_{pk}}(i)$, $i=1,2,\cdots,B$, 에 대하여

$$\widehat{C_{pk}}=\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\widehat{C^*_{pk}}(i)$$

$$S^*_{C_{pk}}=\sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}(\widehat{C^*}(i)-\widehat{C_{pk}})^2}$$

C_{pk}에 대한 100(2- α)% SB 신뢰구간은

$$(\widehat{C_{pk}}-Z_\alpha S^*_{C_{pk}},\ \widehat{C_{pk}}+Z_\alpha S^*_{C_{pk}}) \tag{7}$$

로 주어진다. 여기서 Z_α는 표준정규분포의 상위 100 α백분위수이다.

2.3.2 백분위수 붓스트랩(PB)

B개의 순서 붓스트랩 추정값 $\widehat{C^*_{pk}}(i)$로부터 C_{pk}에 대한 $100(1-2\alpha)$% PB 신뢰구간의 100 α 백분위점과 100(1- α) 백분위점은 다음과 같이 주어진다.

$$(\widehat{C^*_{pk}}(\alpha B),\ \widehat{C^*_{pk}}((1-\alpha)B)) \tag{8}$$

FW(1992b)는 편향이 수정된 백분위수 붓스트랩 신뢰구간에 대하여도 연구하였는데 본 논문에서는 이를 생략한다.

3. t-백분위수 붓스트랩 방법

Efron(1979)에 의해서 소개된 붓스트랩 방법은 신뢰구간을 구하기 위해 통상적으로 이용되는 정규분포에 대한 가정없이 컴퓨터만을 이용한 비모수적 기법이다. FW(1992a)는 로버스트성, 높은 포함확률, 그리고 신뢰구간의 짧은 길이 등의 이유로 인하여 표준 붓스트랩 방법의 사용을 추천하였다. Hall(1988)은 여러 가지 붓스트랩 신뢰구간에 대해 설명하고 어떠한 경우에 어느 신뢰구간을 사용할 수 있는지에 대한 훌륭한 논의를 하였다. Hall(1988)은 여러 가지 신뢰구간들을 그 길이와 포함확률에 의하여 비교하고 모수에 대한 신뢰구간을 구함에 있어서 t-백분위수 방법이 가장 우수하다고 지적하였다. 본 논문에서는 Hall(1988)에 의하여

제안된 t-백분위수 방법을 공정관리지수 C_{pk}에 적용하여 FW(1992b)에 의하여 제안된 신뢰구간들과 각각 신뢰구간의 길이 및 그 포함확률을 비교하였다.

공정관리지수 C_{pk}에 대한 양측 100(1-2α)% t-백분위수 신뢰구간은 다음과 같이 주어진다.

$$\left(\widehat{C_{pk}} - m^{-\frac{1}{2}}\widehat{\sigma_{pk}}\,\widehat{\nu_{1-\alpha}},\ \widehat{C_{pk}} + m^{-\frac{1}{2}}\widehat{\sigma_{pk}}\,\widehat{\nu_{\alpha}}\right) \tag{9}$$

여기서 $\widehat{\nu_\alpha}$는

$$P\left(\frac{\sqrt{m}(\widehat{C^*_{pk}} - \widehat{C_{pk}})}{\widehat{\sigma^*_{pk}}} \le \widehat{\nu_\alpha}\right) = \alpha \tag{10}$$

를 만족하며 m은 원래의 표본에서 취한 재표집 표본의 크기이다

또한 $\widehat{C^*_{pk}}$는 붓스트랩 표본으로부터 계산된 값이며 $\widehat{\sigma_{pk}}$와 $\widehat{\sigma^*_{pk}}$는 식(6)에서 주어진 σ_{pk}의 추정량으로서 각각 원래 표본과 붓스트랩 표본으로부터 구할 수 있다. 공정관리지수 C_{pk}에 대한 신뢰구간 식(9)는 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\left(\widehat{C_{pk}} - m^{-\frac{1}{2}}\widehat{\sigma_{pk}}\,\widehat{\nu_{pk,\frac{(1+\alpha)}{2}}},\ \widehat{C_{pk}} - m^{-\frac{1}{2}}\widehat{\sigma_{pk}}\,\widehat{\nu_{pk,\frac{(1-\alpha)}{2}}}\right) \tag{11}$$

$M > \mu$ 일때

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma^2_{pk}} = \frac{1}{9} - \frac{\widehat{\mu_3}(USL-LSL)}{18S^4}\left[1 - \frac{2(M-\overline{X})}{USL-LSL}\right] \\ + \left[1 - \frac{2(M-\overline{X})}{USL-LSL}\right]^2 \frac{(USL-LSL)^2(\widehat{\mu_4} - S^4)}{144S^6}\end{aligned} \tag{12}$$

이며 $\widehat{\mu_3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^3$이다. 이 경우에 $\widehat{\nu_{pk,\alpha}}$는 $P\left(\frac{\sqrt{m}(\widehat{C^*_{pk}} - \widehat{C_{pk}})}{\widehat{\sigma^*_{pk}}} \le \widehat{\nu_{pk,\alpha}}\right) = \alpha$를 만족한다.

$M < \mu$일 때는 다음과 같이 $\widehat{\sigma^2_{pk}}$을 사용한다.

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma^2_{pk}} = \frac{1}{9} + \frac{\widehat{\mu_3}(USL-LSL)}{18S^4}\left[1 + \frac{2(M-\overline{X})}{USL-LSL}\right] \\ + \left[1 + \frac{2(M-\overline{X})}{USL-LSL}\right]^2 \frac{(USL-LSL)^2(\widehat{\mu_4} - S^4)}{144S^6}\end{aligned} \tag{13}$$

식 (11), (12), (13)에 의하여 주어진 새로운 t-백분위수 신뢰구간을 FW(1992b)에 의해 제안된 SB 및 PB 신뢰구간과 몬테카를로 모의실험을 통하여 비교하고자 한다.

4. 모의 실험 연구

4.1 모의 실험 절차

FW(1992a,b)에 의해 제안된 백분위수 붓스트랩방법(PB)와 표준 붓스트랩방법(SB)을 t-백분위수 붓스트랩방법(PTB)와 비교하기 위하여 본 논문에서는 그들이 사용한 것과 같은 값, 즉, USL=61, LSL=40, $\mu=50$, $\sigma=2$를 사용하였다. 이 경우 C_{pk}=1.667로서 매우 좋은 공정 상태임을 나타낸다. 본 논문에서는 재표집의 표본크기로서 m=5, 10, 15(원래 표본의 크기 n=5일 때), m=10, 20, 30(n=10일 때), m=30, 40, 50(n=30일 때)을 사용하였으며 각 표본크기 n에서 B=1000의 붓스트랩 재표본을 취하여 90% 신뢰구간을 구하였다. 원래의 모수값 $C_{pk}=1.667$이 각 신뢰구간에 포함되는지를 결정하고 각 신뢰구간의 길이를 구한다. 이러한 실험을 N=1000회 반복하여 공정관리지수의 참 값이 구간에 포함되는 비율과 90% 신뢰구간의 길이에 대한 평균과 표준편차를 구하였다. 본 실험에서는 평균 $\mu=50$이고 표준편차 $\sigma=2$인 분포로서 정규분포, 자유도가 5인 t분포(꼬리부분이 두꺼운 분포), 자유도가 4인 카이제곱분포(한쪽으로 치우친 비대칭분포)를 사용하였는데 이러한 분포들은 Gunter(1989)가 지적한 바와 같이 정규분포를 가정할 때 많은 문제점이 생기는 경우이기 때문이다.
$\mu=50$이고, $\sigma=2$인 분포를 만들기 위해 다음과 같이 t분포와 카이제곱분포를 변환하였다.

$$X \sim t_5 \Rightarrow \sqrt{\frac{12}{5}}X + 50$$

$$X \sim \chi_4^2 \Rightarrow \frac{X}{\sqrt{2}} + 50 - \frac{4}{\sqrt{2}}$$

모의실험과정 중에서 n이 특별히 작을 때 $\mu_4 - \sigma^4$의 추정값이 가끔 음의 값으로 나오는 경우가 있는데 이 때에는 분산값을 음으로 하게되는 바람직하지 않는 결과를 생성하므로 음의 값을 취하지 않고 양의 값이 될 때까지 B개의 재표집을 계속하였다.

4.2 모의 실험 결과

모의실험결과는 <표1>, <표2>, <표3>에 주어져 있다. 표에서 PB는 백분위수 붓스트랩방법, SB는 표준 붓스트랩방법, PTB는 t-백분위수방법을 나타낸다.

<표1> 정규분포에서 90%신뢰구간의 포함확률과 길이에 대한 평균 및 표준오차

표본의크기n		5			10			30		
신뢰구간	반복표본의 크기 m	5	10	15	10	20	30	30	40	50
PB	포함확률	.578	.475	.419	.703	.626	.499	.802	.766	.719
	평균길이	8.178	2.408	1.204	1.783	1.023	.782	.789	.652	.582
	표준오차	.407	.085	.022	.027	.014	.010	.006	.005	.004
SB	포함확률	.997	.786	.576	.914	.689	.557	.862	.807	.753
	평균길이	64.900	5.502	1.765	2.169	1.084	.823	.809	.664	.591
	표준오차	13.949	.787	.054	.038	.016	.016	.006	.005	.004
PTB	포함확률	.871	.660	.409	.869	.670	.523	.877	.809	.765
	평균길이	3.258	1.793	.962	1.569	.970	.715	.793	.652	.582
	표준오차	.084	.049	.018	.027	.016	.009	.008	.006	.005

<표2> t_5분포에서 90%신뢰구간의 포함확률과 길이에 대한 평균 및 표준오차

표본의크기n		5			10			30		
신뢰구간	반복표본의 크기 m	5	10	15	10	20	30	30	40	50
PB	포함확률	.503	.420	.350	.603	.521	.458	.745	.699	.647
	평균길이	11.042	2.785	1.344	2.242	1.272	.9111	1.032	.880	.760
	표준오차	1.033	.141	.026	.036	.020	.011	.010	.009	.008
SB	포함확률	.993	.716	.506	.847	.621	.508	.808	.738	.679
	평균길이	71.693	5.130	1.992	2.701	1.350	.975	1.067	.903	.774
	표준오차	13.502	.449	.059	.046	.021	.013	.010	.009	.008
PTB	포함확률	.854	.632	.331	.818	.610	.470	.843	.783	.701
	평균길이	3.729	2.041	1.073	2.027	1.229	.8291	1.124	.950	.808
	표준오차	.095	.056	.022	.036	.021	.011	.015	.013	.011

<표3> χ^2_4분포에서 90% 신뢰구간의 포함확률과 길이에 대한 평균 및 표준오차

표본의크기n		5			10			30		
신뢰구간	반복표본의 크기 m	5	10	15	10	20	30	30	40	50
PB	포함확률	.448	.385	0.283	.594	.486	.403	.719	.675	.635
	평균길이	9.529	2.910	1.298	2.208	1.235	.828	.966	.786	.693
	표준오차	.474	.111	.025	.038	.020	.010	.010	.007	.007
SB	포함확률	.996	.705	.479	.846	.568	.466	.793	.735	.672
	평균길이	61.133	5.599	2.035	2.708	1.318	.910	1.006	.809	.708
	표준오차	10.877	.606	.068	.048	.020	.012	.011	.008	.007
PTB	포함확률	.887	.606	.305	.829	.583	.437	.859	.786	.732
	평균길이	3.982	2.029	1.051	1.940	1.196	.763	1.102	.895	.767
	표준오차	.093	.069	.022	.037	.021	.010	.017	.013	.012

<표1>을 보면 정규분포의 경우에는 t-백분위수 신뢰구간이 다른 두 방법보다 포함확률이 높고 신뢰구간이 짧다. FW(1992b)에서 관측된 것처럼 백분위수 신뢰구간의 포함확률이 가장 낮다. 원래의 표본의 크기가 아주 작을 때, t-백분위수 방법이 다른 두 방법보다 훨씬 높은 포함확률과 짧은 신뢰구간을 나타낸다. 표본의 크기 n이 증가할수록 각 경우의 포함확률은 0.9로 가까워지며 재표본의 크기 m이 증가할수록 신뢰구간의 길이에 대한 평균과 표준편차 뿐만 아니라 포함확률도 감소하고 있음을 보여준다. <표2>를 보면 t-분포의 경우에는 n이 작을 때 t-백분위수 붓스트랩 신뢰구간이 포함확률과 신뢰구간의 길이 측면에서 제일 좋다. 표준 붓스트랩방법은 모든 경우에 포함확률이 가장 높기는 하지만 신뢰구간이 가장 넓다는 단점이 있다. <표3>을 보면 카이제곱 분포의 경우에도 다른 분포와 비슷한 양상을 보이고 있다. n이 클때는 다른 방법에 의한 것보다 약간 크지만 n이 작을 때 t-백분위수 방법에 의한 신뢰구간의 길이에 대한 표준오차가 가장 작다. 표본의 크기 n이 증가할수록 모

든 신뢰구간의 포함확률은 증가하고 신뢰구간의 길이는 감소한다. 또한 재표본크기 m이 증가함에 따라 백분위수와 t-백분위수 방법의 포함확률은 감소함을 볼 수 있다.

5. 결론

모의실험의 결과로부터 t-백분위수 신뢰구간이 다른 신뢰구간들보다 분포나 표본의 크기에 상관없이 짧은 신뢰구간과 신뢰구간의 길이에 대한 적은 표준오차를 나타낸다. 비록 표준붓스트랩방법이 어느 경우에는 높은 포함확률을 나타내고 있지만 대부분의 경우에 신뢰구간의 길이가 가장 길다는 단점이 있다. 표본의 크기가 작을 때 표준 붓스트랩에 의한 신뢰구간은 주어진 포함확률보다 더 높은 포함확률을 생성하고 있다. FW(1992b)의 결과처럼 일반적으로 백분위수 신뢰구간이 가장 나쁜 신뢰구간을 생성함을 확인할 수 있다. 표본의 크기 n에 대하여 반복 표본수 m이 증가함에 따라 포함확률이 감소하고 신뢰구간의 길이가 짧아지지만, 반복표본수 m은 원래 표본의 크기 n과 일치시킴이 더 바람직하다. 특히 표본의 크기가 작을 때는 t-백분위수 방법이 백분위수 붓스트랩방법이나 표준붓스트랩방법보다 월등함을 높은 포함확률과 짧은 신뢰구간의 길이등에 의해서 알 수 있다.

참고문헌

[1] Kane, V.E.(1986), Capability Indices, *Journal of Quality Technology,* 18, 41-52.

[2] Chou, L.K., Owen, D.B.(1989), On the Distribution of the Estimated Process Capability Indices, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* 18. 4549-4560.

[3] Chan, L.K., Xiong, Z. and Zhang, D.(1990), On the Asymptotic Distributions of Some Process Capability Indices, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* 19, 11-18.

[4] Efron, B.(1979), Bootstrap Methods : Another Look at the Jackknife, *Annals of Statistics,* 7, 1-26.

[5] Franklin, L.A. and Wasserman, G.,(1992a), A Note on the Conservative Nature of the Tables of Lower Confidence Limits for Cpk with a Suggested Correction, *Communications in Statistics-Simulation and Computation,* 21, 926-932.

[6] Franklin, L.A. and Wasserman,G.(1992b), Bootstrap Lower Confidence Limits for Capability Indices, *Journal of Quality Technology,* 24, 196-210.

[7] Gunter, B.H.(1989), The Use and Abuse of Cpk, Parts 1-4, *Quality Progress,* 22(1), 72-73; 22(3), 108-109; 22(5),79-80; 22(7), 86-87.

[8] Hall, P.(1988), Theorectical Comparison of Bootstrap Confidence Intervals, *The Annals of Statistics,* 16, 927-953.

[9] Zhang, N.F., Stenback, G.A. and Wardop, D.M.(1990), Interval Estimation of Process Capability Index Cpk, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* 19, 4455-4470.