웨이브릿 고장률 함수를 갖는 최소수리 교체모형 개발

- Development of Replacement Models under Minimal Repair with Wavelet Failure Rate Functions -

최 성 운 *
Choi Sung woon

Abstract

This paper is to develop replacement models under minimal repair with exponential polynomial wavelet failure rate function. Wavelets have good time-frequency localization, fast algorithms and parsimonious representation. Also this study is presented along with numerical examples using sensitivity analysis for exponential polynomial trigonometric failure rate function.

* 경원대학교 산업공학과 교수
본 연구는 2001년도 경원대학교 학술 연구비의 지원을 받아 이루어졌음.

1. 서론

최소 수리 교체 문제(Replace Problems under Minimal Repair)는 기대 교체 비용(Replacement Cost)과 수리비용(Repair Cost)을 최소화하기 위해 Barlow and Hunter[1]의 최소수리 아이디어로 시작되어 연구되고 있다.

Choi and Lee[2]는 주기적으로 순환적인 고장률(Cyclic Failure Rates)을 갖는 시스템을 대상으로 최적 교체정책을 결정하는 연구를 수행했다. 마모고장 기간의 시스템 고장률은 비선형 증가 함수인 비동차 포아송 과정(NHPP : Nonhomogeneous Poisson Process)으로 표현된다. Choi and Lee[2]는 NHPP 고장률을 지수형 다항 삼각함수(EPTFRF : Exponential Polynomial Trigonometric Failure Rate Function)로 모델링하여 초기 고장률, 증가고장률, 진동수(Frequency), 진폭(Amplitude), 위상(Phase) 등의 파라미터 변화에 의한 시스템 특성을 연구하였다. 특히 진동수는 시스템 고장률의 주기성, 진폭은 고장변동 범위를 나타내며 위상은 증가 고장 기간에 관련된다.

본 연구는 Choi and Lee[2]의 확장된 연구로 시스템 고장률이 지수형 다항 웨이브릿 함수(EPWFRF : Exponential Polynomial Wavelet Failure Rate Function)인 최소수리 교체 모형을 개발하고자 한다. 본 연구에서 제안하는 웨이브릿(Wavelet) 이론은 1980년대부터 시간과 주파수의 국부최적화(Good Time-Frequency Localization), 빠른 알고리즘(Fast Algorithms)과 표현의 단순성(Parsimonious Representation)으로 인해 광범위한 학제간 응용분야(Interdisciplinary Applications)에 급속히 확산되고 있다.[3, 4]

Figure 1에서 Fourier Filter는 주파수 영역에서, Shannon Filter는 시간영역에서만 정보를 분석하는 단점을 극복하기 위해 Fourier 빌딩 블록에 시간에 종속적인 윈도우 함수를 가중시킨 국소 Fourier 변환(WFT : Windowed Fourier Transform or STFT : Short Time Fourier Transform)의 Gaussian 함수를 이용한 대표적인 것이 Gabor Filter 이다. 그러나 Gabor Filter는 Figure 1에서와 같이 분석 영역이 시간-주파수에 대해 일정하므로 시간의 변화에 따라 확률적인 특성이 변화하는 비정상적 특성(Nonstationary Property)을 분석할 수 없는 한계가 있다. 이러한 단점을 극복하기 위한 Wavelet Filter는 스케일링 모수(Scaling Parameter)와 이동 모수(Shift Parameter)의 쌍대 빌딩 블록을 이용한 유연하고 효율적인 분석을 할 수 있다.

2장에서는 EPTFRF인 최소수리 교체 정책에 대한 최적 코스트 함수를 모델링하고 교체비용, 수리비용, 초기고장률, 증가고장률, 진동수, 주파수, 위상 등의 파라미터 변화에 대한 시뮬레이션 분석을 실시한다. 3장에서는 최소 수리 교체 정책에 대한 웨이브릿 근사, 이산 웨이브릿 변환(DWT)모형, MRA(Multiresolution Analysis), 쌍대 직교 웨이브릿(Biorthogonal Wavelets)등의 EPWFRF 4가지 모형을 제시하고 4장에서는 결론을 맺는다.

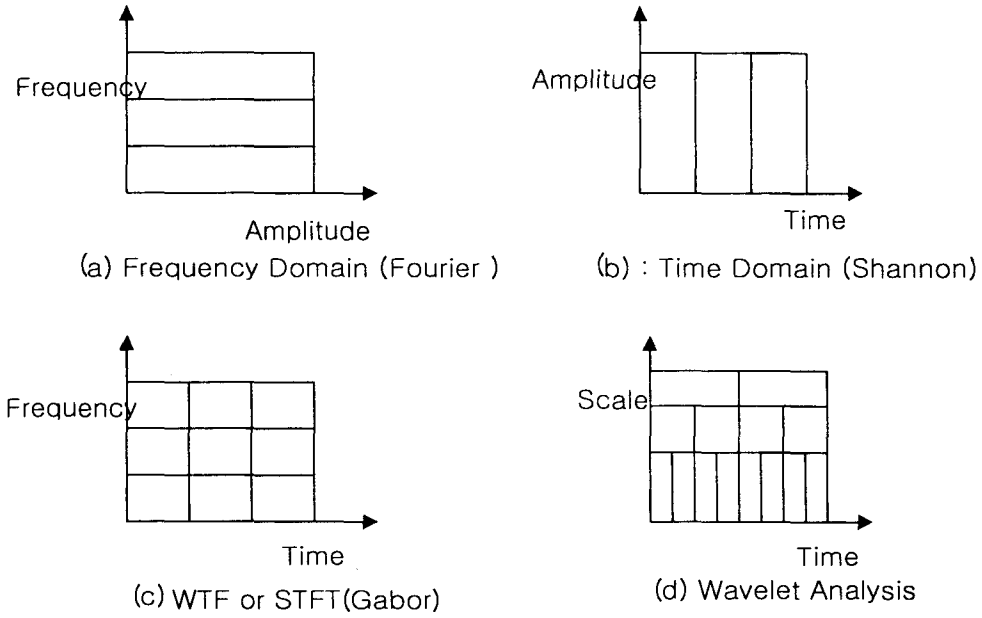

Figure 1. Fourier, Shannon, Gabor and Wavelet Analysis[5]

2. EPTFRF인 최소수리 교체 정책

2.1 최적 코스트 함수

Barlow and Hunter[1]의 "교체정책 II"에 의하면 단위시간당 총 코스트를 최소화하는 교체기간 T를 결정하기 위한 코스트함수는 (1)식과 같다.

$$C(T)=\lim_{t\to\infty}[\ \$_f E[N_f(t)]+\$_r E[N_r(t)]]\ /\ t \qquad (1)$$

여기서 $\$_t$와 $\$_r$은 각각 최소 교체비용과 수리비용이다.

T 기간 동안의 시스템 고장률의 기대치인 $E[N_r(t)]=\mu(T)$를 적용하면 (1)식은 (2)식과 같은 최적 코스트 함수식으로 표현된다.

$$C(T^*)=[\$_f\mu(T)+\$_r]\ /\ T^* \qquad (2)$$

(2)식에서 $\mu(t)$는 NHPP의 평균값 함수(Mean Value Function) 또는 적분함수(Integrated function)로 정의되며 (3)식과 같이 정의한다.

$$\mu(T) \equiv E[N_f(T)] = \int_0^T \lambda(t)\,dt \quad \text{for} \quad T \geq 0 \tag{3}$$

본 연구에서는 λ(t)를 식 (4)의 EPTFRF로 모델링한다.

$$\lambda(t) = \exp[\alpha + \beta t + A\sin(wt + \varnothing)] \tag{4}$$

여기서 α는 초기고장률, β는 증가고장률, A는 진폭, ω는 진동수, $\varnothing$는 위상을 나타낸다. 여기서 $\alpha + \beta$t 는 고장률에 대한 경향(Trend)을 나타내는 다항식이며 Asin(wt+$\varnothing$)는 주기효과를 나타내기 위한 삼각함수이다.

2.2 최적 교체정책 분석

식(2)의 최적 코스트 함수 $\mu(T^*)$ 와 최적 교체시기 T^*를 평가하기 위한 6가지 파라미터의 감도 시뮬레이션 (Sensitivity Simulation) 변화값은 Table 1과 같으며 다음과 같은 네 가지 분석을 실시한다.

Table 1. Parameter Value

$\$_f$	$\$_r$	α	β	A	w
1.0	1.5	-2.0	0.1	0.1	0.5
	5.0	0.0	0.5	0.5	1.0
	10.0	2.0	1.0	1.0	2.0
	20.0				

감도분석 1 : $\$_f = 1.0,\ \alpha = 0.0, \beta = 0.5, w = 1.0$ 이 주어진 경우 $\$_r$과 A의 감도 변화는 Table 2와 같으며 수리비용이 작을수록 최적 코스트는 작아지고 진폭 0.1인 경우 모든 수리비용에서 최적 코스트는 최소가 된다.

Table 2. Sensitivity analysis 1

$\$_r$	A	$\mu(T^*)$	(T^*)
1.5	0.1	2.472	2.009
5.0	0.1	3.992	2.963
10.0	0.1	5.563	3.333
20.0	0.1	8.153	4.226

감도 분석 2 : $\$_f = 1.0,\ \alpha = 0.0, \beta = 0.5, A = 0.5$가 주어진 경우 $\$_r$과 ω의 감도 변화는 Table 3과 같으며 수리비용이 작을수록 최적 코스트는 작아지고 수리비용 10.0인 경우를 제외하고 진동수 0.5에서 최적 코스트는 최소가 된다.

Table 3. Sensitivity Analysis 2

$\$_r$	w	$\mu(T^*)$	(T^*)
1.5	0.5	2.472	2.327
5.0	0.5	3.900	2.554
10.0	1.0	5.618	3.278
20.0	0.5	8.112	4.424

감도 분석 3 : $\$_f = 1.0,\ \alpha = 0.0, A = 0.5, w = 1.0$이 주어진 경우 $\$_r$과 β의 감도 변화는 Table 4와 같으며 수리비용이 작을수록 최적 코스트는 작아지고 증가고장률이 0.1인 경우 모든 수리비용에서 최적 코스트는 최소가 된다.

Table 4. Sensitivity Analysis 3

$\$_r$	β	$\mu(T^*)$	(T^*)
1.5	0.1	1.648	4.273
5.0	0.	2.228	7.274
10.0	0.1	2.808	9.283
20.0	0.1	3.697	12.276

감도 분석 5 : $\$_f = 1.0, \beta = 0.5, A = 0.5, w = 1.0$이 주어진 경우 $\$_r$과 α의 감도 변화는 Table 5와 같으며 수리비용이 작을수록 최적 코스트는 작아지고 초기고장률이 -2.0인 경우 모든 수리비용에서 최적 코스트는 최소가 된다.

Table 5. Sensitivity Analysis 4

$\$_r$	α	$\mu(T^*)$	(T^*)
1.5	-2.0	0.805	3.294
5.0	-2.0	1.625	5.211
10.0	-2.0	2.560	6.198
20.0	-2.0	4.148	7.193

식(2)에서 삼각 함수항을 고려하지 않는 다음 (5)식에 대한 EPTFRFT인 식(2)의 최적 코스트 감소 비율에 대한 네 가지 분석을 실시한다.

$$\lambda(t) = \exp(\alpha + \beta t) \qquad (5)$$

감도 분석 5 : $\$_f = 1.0, \alpha = 0.0, \beta = 0.5, w = 1.0$가 주어진 경우 $\$_r$과 A의 감도 변화는 Table 6과 같으며 수리비용이 10.0 일 때 제외하고 진폭이 1.0인 경우 모든 수리비용에서 최적 코스트 감소비율이 크다.

Table 6. Sensitivity Analysis 5

$\$_r$	A	Percentage of Cost Reduction(%)
1.5	1.0	14.5%
5.0	1.0	9.0%
10.0	0.5	1.0%
20.0	1.0	3.7%

감도 분석 6 : $\$_f = 1.0, \alpha = 0.0, \beta = 0.5, A = 0.5$가 주어진 경우 $\$_r$과 ω의 감도 변화는 Table 7과 같으며 수리비용이 5.0 일 때 제외하고 주파수가 1.0인 경우 모든 수리비용에서 최적 코스트 감소비율이 크다.

Table 7. Sensitivity Analysis 6

$\$_r$	w	Percentage of Cost Reduction(%)
1.5	0.5	7.2%
5.0	1.0	3.8%
10.0	0.5	3.9%
20.0	0.5	1.1%

감도 분석 7 : $\$_f = 1.0, \alpha = 0.05, A = 0.5, w = 1.0$이 주어진 경우 $\$_r$과 β의 감도변화는 Table 8과 같으며 수리비용이 1.5와 10.0인 경우 증가고장률은 0.5에서, 수리비용이 5.0과 20.0인 경우 증가고장률은 1.0에서 최적 코스트 감소 비율이 크다.

Table 8. Sensitivity Analysis 7

$\$_r$	β	Percentage of Cost Reduction(%)
1.5	0.5	5.5%
5.0	1.0	3.9%
10.0	0.1, 0.5	1.0%
20.0	1.0	2.4%

감도 분석 8 : $\$_f = 1.0, \beta = 0.5, A = 0.5, w = 1.0$이 주어진 경우 $\$_r$과 α의 감도 변화는 Table 9와 같으며 수리비용이 5.0과 20.0인 경우 제외하고 초기증가율 2.0인 경우 모든 수리비용에서 최적코스트 감소비율이 크다.

Table 9. Sensitivity Analysis 8

$\$_r$	α	Percentage of Cost Reduction(%)
1.5	2.0	11.7%
5.0	0.0	3.8%
10.0	2.0	6.3%
20.0	-2.0	1.6%

3. EPWFRF인 최소 소리 교체모형 개발

3.1 최적 코스트 함수

최적 코스트 함수 $C(T^*)$와 평균값 함수 $\mu(t)$는 식 (2), (3)과 같으나 식 (4)는 다음(5)식과 같이 다르게 표현된다.

$$\lambda(t) = \exp[\ \alpha + \beta t + w(t)] \qquad (5)$$

여기서 w(t)는 웨이브릿 함수로서 다음 3.2절의 w(t)를 적용할 경우 네 가지 새로운 EPWFRF 인 최소 수리 교체모형을 제시할 수 있다.

3.2 웨이브릿 교체모형 개발

3.2.1 웨이브릿 근사 (Wavelet Approximation)모형

(5)식에서 W(t)는 다음 (6)식과 같이 모델링한다.

$$W(t) \approx \sum_k S_{J,k}\, \varnothing_{J,k}(t) + \sum_k d_{J,k}\, \psi_{J,k}(t) + \sum_k d_{J-1,k}\, \psi_{J-1,k}(t) + \cdots + \sum_k d_{1,k}\, \psi_{1,k}(t) \qquad (6)$$

여기서 J는 스케일 또는 다해상(Multiresolution) 항의 수이고 k는 계수의 수를 나타내며 $S_{J,k}$, $d_{J,k} \cdots d_{1,k}$ 는 웨이브릿 변환 계수들이다. $\varnothing_{J,k}(t)$와 $\psi_{j,k}(t)$ 는 부(Father) 웨이브릿 $\varnothing$와 모(Mother) 웨이브릿 ψ의 스케일링(Scaling)과 위치이동(Translation)을 이용한 근사 함수이다. S-PLUS에서 제공되는 직교 웨이브릿 함수는 Table 10과 같다.

Table 10. Orthogonal Wavelet [6]

Type	S-PLUS Wavelet Name
Hear	hear
Daublets	d4, d6, d8, d10, d12, d14, d16, d18, d20
Symmlets	s4, s6, s8, s10, s12, s14, s16, s19, s20
Coiflets	c6, c12, c24, c30

3.2.2 이산 웨이브릿 변환 (Discrete Wavelet Transform : DWT)모형

이산 웨이브릿 변환은 이산 함수 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 에 대한 식 (6)의 웨이브릿 시리즈 근사 계수를 계산하는 모형이다. DWT를 나타내는 도플러(Doppler)모형은 다음 (7)식과 같다.

$$W(t) = \sqrt{t(1-t)}\sin\left(\frac{2.1\pi}{t+0.05}\right), \qquad 0 \le t \le 1 \qquad (7)$$

3.2.3 MRA (Multiresolution Analysis)모형

MRA 모형은 다음 (8)식과 같다.

$$W(t) \approx S_J(t) + D_J(t) + D_{J-1}(t) + \cdots D_1(t) \qquad (8)$$

여기서 $S_J(t)$ 와 $D_J(t)$ 는 각각 평활(Smooth)함수와 상세(Detail)함수로서

$$S_J(t) = \sum_k S_{J,k}\, \emptyset_{J,k}(t) \qquad (9)$$

$$D_J(t) = \sum_k d_{J,k}\, \psi_{J,k}(t) \qquad (10)$$

3.2.4 쌍대 직교 웨이브릿(Biorthogonal Wavelets)모형

쌍대 직교 웨이브릿 모형은 다음 (11)식과 같이 모델링된다.

$$W(t) \approx \sum_k S_{J,k} \cdot \tilde{\emptyset}_{J,k}(t) + \sum_k d_{J,k} \cdot \tilde{\psi}_{J,k}(t) + \sum_k d_{J-1,k} \cdot \tilde{\psi}_{J-1,k}(t) + \cdots + \sum_k d_{1,k} \cdot \tilde{\psi}_{1,k}(t) \qquad (11)$$

여기서 $\emptyset$와 ψ는 분석(Analysis)함수이며 $\tilde{\emptyset}$ 와 $\tilde{\psi}$ 는 합성(Synthesis)함수이다.
S-PLUS에서 제공되는 쌍대직교 웨이브릿 함수는 Table 2와 같다.

Table 2. Biorthogonal wavelet [6]

Type	S-PLUS Wavelet Name
B-spline	bs1.1, bs1.3, bs1.5 bs2.2, bs2.4, bs2.6, bs2.8 bs3.1, bs3.3, bs3.5, bs3.7, bs3.9
V-spline	vs1, vs2, vs3

Table 3에서와 같이 MATLAB에서 제공되는 다양한 웨이브릿 함수를 이용하면 EPWFRF인 최소 수리 교체 문제를 효율적으로 분석할 수 있다.

Table 3. Wavelet Families and Their Properties [5]

MATLAB Wavelet Name / Properties	morl	mexh	meyr	haar	dbN	symN	coifN	biorNr. Nd
Crude	0	0						
Infinitely Regular	0	0	0					
Compactly Supported Orthogonal				0	0	0	0	
Compactly Supported Biorthogonal								0
Symmetry	0	0	0	0				0
Asymmetry					0			
Near Symmetry						0	0	
Arbitrary Number of Vanishing Moments					0	0	0	0
Vanishing Moments for Ø							0	
Arbitrary Regularity					0	0	0	0
Existence of Ø			0	0	0	0	0	0
Orthogonal Analysis			0	0	0	0	0	
Biorthogonal Analysis			0	0	0	0	0	0
Exact Reconstruction			0	0	0	0	0	0
FIR Filters				0	0	0	0	0
Continuous Transform	0	0	0	0	0	0	0	0
Discrete Transform			0	0	0	0	0	0
Fast Algorithm				0	0	0	0	0
Explict Expression	0	0		0				

*morl : Morlet
mexh : Mexican Hat
meyr : Meyer
haar : Haar
dbN : Daubechies
symN : Symlets
coifN : Coiflets
biorNr.Nd : Splines Biorthogonal Wavelets

4. 결론

본 연구는 기대 교체 비용과 수리비용을 최소화하는 최소 수리 교체 모형을 지수 다항 삼각 고장률 함수(EPTFRF)인 경우와 지수 다항 웨이브릿 고장률 함수(EPWFRF)인 경우 두 가지 관점에서 분석하고 개발하였다.

EPTFRF 최소수리 교체 모형에서는 교체 비용, 수리비용, 초기고장률, 증가고장률, 진동수, 진폭 등의 파라미터 감도 변화에 의한 여덟 가지 시뮬레이션 실험 결과를 분석 평가하였고, EPWRFR 최소소리 교체 모형에서는 네 가지 새로운 모형을 제시하였다. 제안된 EPWFRF 최소 수리 교체 모형에 대한 파라미터 감도 변화에 대한 시뮬레이션 분석은 향후 과제로 한다.

5. 참고 문헌

1. Barlow, R.E. and Hunter, L.C., "Optimum Preventive Maintenance Policies", Operations Research, 8, pp90-100, 1960.

2. Sungwoon Choi and Sanghoon Lee, "Replacement Policies under Minimal Repair with Cyclic Failure Rates", International Juounal of Management Science, Vol. 5, No. 2, pp42-53, 1999.

3. Ogden, R.T., Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis, Birkhäuser : Boston, MA, 1997.

4. 최성운, "웨이브릿 응용개관, 추계학술 발표문집", 안전경영과학회, 2001.

5. Misit, M., Misit, Y., Oppenhein, G., and Pogg, J.M., Wavelet Toolbox for Use with MATLAB, The Math Works Inc. : Natick, MA, 1996.

6. Bruce, A. and Gao, H.Y., Applied Wavelet Analysis with S-PLUS, Springer-Verlag : New York, NY, 1996.

저 자 소 개

최 성 운 :

- 현 경원대학교 산업공학과 재직중.

한양 대학교 산업공학과에서 공학사(1981), 공학석사(1983), 공학박사(1990) 학위를 취득하고, 1994년 한국과학재단 지원으로 1년간 Dept. of Applied Statics, Universisty of Minnesota에서 품질관리에 관련된 연구를 하였다. 주요 관심분야는 자동화 생산 및 장치 산업에서의 품질관리이며, 컴퓨터 · 정보통신시스템의 신뢰성 설계 및 분석도에도 관심을 가지고 있다.