존슨 시스템에 의한 비정규 공정능력의 평가
-Evaluation of Non - Normal Process Capability by Johnson System-

김 진 수*
Kim, Jin - Soo
김 홍 준**
Kim, Hong - Jun

Abstract

We propose, a new process capability index $C_{psk}(WV)$ applying the weighted variance control charting method for non-normally distributed. The main idea of the weighted variance method(WVM) is to divide a skewed or asymmetric distribution into two normal distributions from its mean to create two new distributions which have the same mean but different standard deviations. In this paper we propose an example, a distributions generated from the Johnson family of distributions, to demonstrate how the weighted variance-based process capability indices perform in comparison with another two non-normal methods, namely the Clements and the Wright methods. This example shows that the weighted variance-based indices are more consistent than the other two methods in terms of sensitivity to departure to the process mean/median from the target value for non-normal processes. Second method show using the percentage nonconforming by the Pearson, Johnson and Burr systems. This example shows a little difference between the Pearson system and Burr system, but Johnson system underestimated than the two systems for process capability.

1.서론

Boyles에 따르면 공정능력지수 (Process Capability Index: PCI)는 "공정의 성과를 정량화 하기 위해서 쉽게 이해시킬 수 있는 공통적으로 제공하는 수단" 이라고 한다 [3]. 그러나 공정능력지수를 사용할 때 주의해야 할 것은 공정은 공정능력이 평가되기

† 이 논문은 2000년도 한밭대학교 교내학술연구비 지원을 받았음
* 한밭대학교 산업경영공학과
** 대구산업정보대학 산업안전보건과

전에 통계적 관리상태라야 한다. 정규공정에서의 $\pm 3\sigma$를 포함하는 구간은 데이터의 99.73%이다. 그러나 비정규공정에 대해서는 정규공정과 같이 전형적으로 $\pm 3\sigma$를 적용하면 불량률 계산에 부정확한 결과를 도출시키게 된다. 그러므로 현 공정능력지수들은 비정규공정에 대해서는 정확한 공정능력을 반영시키지 못하는 약점을 지니기 때문에 이러한 비정규분포의 공정능력을 반영시킬 수 있는 공정능력지수의 개발을 필요로 한다. 비정규공정에 관한 공정능력지수 개발의 선행 연구로는 최근에 Lovelace에 의하여 비음수값을 갖는 공정에 대한 공정능력지수 C_{pb}가 개발되었고[13], 그 후 Wright에 의해 C_s가 개발되었다[17].

본 논문에서는 우선 공정능력지수의 측도로 비정규공정 데이터를 나타내는데 가장 보편적으로 사용되고 있는 Pearson 시스템을 이용하여 비정규공정에 대한 새로운 공정능력 측도인 $C_{psk}(WV)$를 제안하여 비정규공정의 사례에 적용시켜, 보다 비정규공정의 공정능력을 올바르게 나타내는 공정능력지수임을 입증하려고 한다. 비정규분포에 대한 공정능력지수 계산은 Clements에 의해 최초로 소개되었다[8]. 그 후 비정규 Pearson 모집단에 대한 Clements방법을 적용한 제 2, 제 3세대 공정능력지수 계산은 Pearn과 Kotz에 의해 실시되어 왔다[14]. 따라서 본 연구에서 제안하는 가중분산에 기초한 공정능력지수 $C_{psk}(WV)$는 Clements방법을 제 4세대 공정능력지수 계산에까지 확장시킨 개념과 유사하다. 예제로 $C_{psk}(WV)$를 Johnson 시스템의 S_B곡선을 사용하여 다른 2가지 비정규 공정능력지수와 현 공정능력지수와도 비교하여 $C_{psk}(WV)$가 가장 민감한 지수로써 비정규공정의 공정능력을 가장 올바르게 반영하고 있는 측도임을 확인하고자 한다. 그리고 해당 공정의 공정능력을 이와 같은 공정능력지수와 호환성을 갖는 불량률의 측도와 병행하여 종합적 측도로 평가함으로써 공정 실무자로 하여금 보다 합리적인 의사결정을 내릴 수 있는 구체적인 정보를 제시하고자 한다.

2. 정규공정에 대한 공정능력의 측도

2.1 정규공정의 공정능력지수

오늘날 산업체에서 가장 먼저 사용되어진 공정능력지수는 전통적 6σ개념을 기초로 하여 일본에서 개발된 C_p이다. 이 지수의 큰 결점은 공정의 평균을 고려하지 않고 실제 공정 산포로 정의된 잠재능력을 측정하고 있다. 그러므로, C_p는 실제 공정 성과를 나타내 질 못한다. 다시 말하면 규격내 제품을 생산하는 공정능력이 갖는 공정평균이 변하는 영향을 반영시키지 못하고 있다. 따라서 C_p에 대해 개선된 공정능력지수인 C_{pk}가 개발되었다. 그 후 다구찌 손실함수에 기초한 즉 C_p에 목표치 T를 고려하여 개발된 것이 C_{pm}이다. 다시 말하면 C_{pk}는 C_p의 분자를 수정했고, C_{pm}은 분모를 수정하였다. $T \neq M$인 경우 C_{pm}을 수정하여 C^*_{pm}가 개발되었다. 그리고 C_{pm}은 $T \neq M$인 경우 $T-\mu=\delta$와 $T-\mu=-\delta$를 식별하지 못하기 때문에 이러한

결점을 보완하기 위하여 그 후 C_{pk}와 C_{pm}을 합성시켜 C_{pmk}를 개발하였다. 이러한 지수들은 C_p, C_{pk} [Kane;12], C_{pm}과 C^*_{pm}[Chan. et al ;4]으로부터 정의되었고 Pearn, Kotz, Johnson은 제 3세대 지수 C_{pmk}를 제안하였으며[15], C_{pmk}는 Choi와 Owen에 의해 제안된 C_{pn}와 동일하다[5]. Benson에 의해 제 4세대 공정능력지수로 나타낸 C_{psk}가[2] 도입된 동기는 $T \neq M$인 경우 목표치로부터 동일하게 벗어난 공정이라고 하더라도 C_{pmk}는 규격을 벗어날 때의 공정을 식별하는 정도가 미흡하기 때문에 이러한 경우 공정이 목표치로부터 변화할 때 규격의 방향에 관계없이 실행 될 수 있기 때문이다. 여기서 M은 규격의 중심을 나타낸다. 이러한 공정능력지수들을 개발된 순으로 나타내면 식(2.1)~식(2.6)과 같다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \tag{2.1}$$

$$C_{pk} = \min\left(\frac{USL-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right) = \min(C_{pu}, C_{pl}) \tag{2.2}$$

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \tag{2.3}$$

$$C^*_{pm} = \frac{\min(USL - T, T - LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \tag{2.4}$$

$$C_{pmk} = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \tag{2.5}$$

$$C_{psk} = \frac{\min(USL - \mu - |\mu - T|, \mu - LSL - |\mu - T|)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \tag{2.6}$$

여기서 μ는 공정의 평균, σ^2은 공정의 분산, USL, LSL및 T는 각각 공정의 규격 상한치, 규격 하한치 및 목표치를 나타낸다.

2.2 정규공정의 불량률의 측도

상기 공정능력지수 C_p, $C_{pk}(C_{pu}, C_{pl})$와 불량률 P의 관계를 조사하기로 한다. 공정은 $N(\mu, \sigma^2)$한다고 가정하고 P_L과 P_U는 각각 규격하한과 규격상한을 벗어나는 확률로 정의한다. 즉 P_L과 P_U는 $P_L = P(X \leq LSL)$, $P_U = P(X \geq USL)$이다.

(1) P와 C_p의 관계

P_L은 $P_L = \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right)$로 정의되기 때문에 식(2.7)로 나타낼 수 있다.

$$\frac{LSL - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(P_L) \tag{2.7}$$

동일한 방법으로 1- P_U는 식(2.8)

$$1 - P_U = \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right) \tag{2.8}$$

로 나타낼 수 있기 때문에 식(2.9)로 변환된다.

$$\frac{USL-\mu}{\sigma}=\Phi^{-1}(1-P_U) \tag{2.9}$$

식(2.9)에서 식(2.7)을 빼서 6으로 나누면 식(2.10)과 같이 된다.

$$C_p=\frac{[\Phi^{-1}(1-P_U)-\Phi^{-1}(P_L)]}{6} \tag{2.10}$$

여기서 Φ는 표준화정규분포의 누적분포로 나타낸다.

(2) P와 $C_{pk}(C_{Pl},\ C_{pu})$의 관계

P_L은 식(2.2)에서 $P_L=\Phi(-3C_{pl})$로 되기 때문에 C_{pl}은 식(2.11)로 된다.

$$C_{pl}=-\frac{1}{3}\Phi^{-1}(P_L) \tag{2.11}$$

P_U도 식(2.2)에서 $P_U=1-\Phi(3P_U)$로 되기 때문에 C_{pu}는 식(2.12)로 된다.

$$C_{pu}=\frac{1}{3}\Phi^{-1}(1-P_U) \tag{2.12}$$

따라서 C_{pk}는 식(2.13)으로 된다.

$$C_{pk}=\frac{1}{3}\min[-\Phi^{-1}(P_L),\ \Phi^{-1}(1-P_U)] \tag{2.13}$$

3. 비정규공정에 대한 공정능력의 측도

3.1 공정능력지수의 측도

3.1.1 Pearson 시스템에 의한 공정능력지수: C_{psk}

C_p값을 추정하기 위해서 식(2.1)에서 Clements는 6σ 대신 U_a-L_a로 교체하여 식(3.1)과 같이 나타낸다[8].

$$C_p=\frac{USL-LSL}{U_a-L_a} \tag{3.1}$$

여기서 U_a는 99.865 백분위수이고, L_a는 0.135 백분위수인 점의 값을 나타낸다

C_{pk}도 동일한 접근으로 식(2.2)에서 $USL-\mu$ 대신에 $USL-M_e$로, $\mu-LSL$ 대신에 M_e-LSL로 변경되며, 3σ도 각각 U_a-M_e, M_e-L_a로 되어 식(3.2)와 같다.

$$\begin{aligned}C_{pk}&=\min\left[\frac{USL-M_e}{U_a-M_e},\frac{M_e-LSL}{M_e-L_a}\right]\\&=\min(C_{pu},\ C_{pl})\end{aligned} \tag{3.2}$$

C_{pm}, C^*_{pm}, C_{pmk}를 Pearson 과 Kotz의 방법으로 나타내면 식(3.3)~식(3.5)와 이 된다[14].

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left(\frac{U_a - L_a}{6}\right)^2 + (M_e - T)^2}} \tag{3.3}$$

$$C^*_{pm} = \frac{\min[USL - T,\ T - LSL]}{3\sqrt{\left(\frac{U_a - L_a}{6}\right)^2 + (M_e - T)^2}} \tag{3.4}$$

$$C_{pmk} = \min\left[\frac{USL - M_e}{3\sqrt{\left(\frac{U_a - M_e}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}},\ \frac{M_e - LSL}{3\sqrt{\left(\frac{M_e - L_a}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}}\right] \tag{3.5}$$

본 연구에서는 Clements의 방법을 제 4세대 공정능력지수에까지 확장시킨 결과, 새로운 공정능력지수인 C_{psk}를 식(3.6)으로 나타낼 수 있다.

$$C_{psk} = \min\left[\frac{USL - M_e - |M_e - T|}{3\sqrt{\left(\frac{U_a - M_e}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}}, \right. \qquad (3.8)$$

$$\left. \frac{M_e - LSL - |M_e - T|}{3\sqrt{\left(\frac{M_e - L_a}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}}\right] \qquad (3.6)$$

3.1.2 Johnson 시스템에 의한 공정능력지수

비정규공정에 대한 공정능력지수의 정의를 일반화시킬 때의 C_p는 식(3.7)과 같다[9].

$$C_p = \frac{USL - LSL}{U_{\alpha_2} - L_{\alpha_1}} \tag{3.7}$$

정규분포에 대해서는 $L_{\alpha_1} = \mu - 3\sigma$, $U_{\alpha_2} = \mu + 3\sigma$가 되며, Johnson곡선에 의한 비정규분포에 대한 L_{α_1}와 U_{α_2}는 <표 3.1>에서 $z = -3$ 과 $z = 3$으로 치환하여 사용한다. 예를 들면 S_B곡선을 사용할 때 L_{α_1}, U_{α_2}값은 식(3.8)과 같다.

$$L_{\alpha_1} = \varepsilon + \lambda\left[1 + \exp\left(\frac{\gamma + 3}{\eta}\right)\right]^{-1}$$

$$U_{\alpha_2} = \varepsilon + \lambda\left[1 + \exp\left(\frac{\gamma - 3}{\eta}\right)\right]^{-1}$$

C_{pk}인 경우의 일반화는 식(2.2)을 규격 한계치인 LSL과 USL을 Johnson변환을 통하여 Z_L과 Z_U 값으로 치환하여 식(3.9)와 같이 나타낸다.

$$C_{pk} = \min\left(-\frac{Z_L}{3}, \frac{Z_U}{3}\right) \tag{3.9}$$

<표3.1> x에 관한 Johnson 곡선의 형태별 등식

Johnson곡선형태	Z 의 x에 관한 등식	비 고
(1) S_U	$x=\varepsilon - \lambda \sinh\left(\frac{\gamma-z}{\eta}\right)$	$\sinh(u)=\frac{e^u-e^{-u}}{2}$
(2) S_B	$x=\varepsilon+\frac{\lambda}{1+\exp\left(\frac{\gamma-z}{\eta}\right)}$	-
(3) S_L	$x=\varepsilon+\lambda\exp\left(\frac{z-\gamma}{\eta}\right)$ $=\varepsilon+\lambda\exp\left(\frac{z-\gamma^*}{\eta}\right)$	$\gamma^*=\eta\ln\left[\frac{\frac{n}{p}-1}{p\left(\frac{m}{p}\right)^{1/2}}\right]$

이 접근의 대안적인 방법은 Pearn과 Kotz에 의해 정의된 식(3.2)가 된다. 비정규 공정능력지수 적용을 위한 Johnson 방법의 실행단계는 다음과 같다.

[단계1] 적절한 Z값을 사용하여 P_{-3z}, P_{-z}, P_z, P_{3z} 에 일치하는 데이터의 분위수인 x_{-3z}, x_{-z}, x_z, x_{3z}을 추정한다.(추정된 분위수에서 편의를 줄이기 위해 각 확률치에 ($i-1/2)N$과 같은 표준절차를 사용하여 분류된 데이터에서 i 번째 값을 추정한다.)

[단계2] 판별력을 계산하고 곡선형태를 선택한다.

[단계3] η, γ, λ, ε의 곡선 모수들을 식(3.10)~식(3.13)에 의거 추정한다.(모수들의 추정식은 참고문헌 [9], [16]참조)

$$\hat{\eta}=\frac{z}{\cosh^{-1}\left[\frac{1}{2}\sqrt{(1+\frac{p}{m})(1+\frac{p}{n})}\right]} \tag{3.10}$$

$$\hat{\gamma}=\hat{\eta}\sinh^{-1}\left[\frac{(\frac{p}{n}-\frac{p}{m})\sqrt{(1+\frac{p}{m})(1+\frac{p}{n})-4}}{2(\frac{p}{m}\frac{p}{n}-1)}\right] \tag{3.11}$$

$$\hat{\lambda}=\frac{P\sqrt{\left[(1+\frac{p}{m})(1+\frac{p}{n})-2\right]^2-4}}{\frac{p}{m}\frac{p}{n}-1} \tag{3.12}$$

$$\hat{\varepsilon}=\frac{x_z+x_{-z}}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{p(\frac{p}{n}-\frac{p}{m})}{2(\frac{p}{m}\frac{p}{n}-1)} \tag{3.13}$$

[단계4] 히스토그램으로 분포모양을 알아본다.

[단계5] 규격을 벗어난 비율을 계산한다.([단계3]으로부터 추정된 모수를 사용하여

LSL과 USL에 해당하는 Z_L과 Z_U값을 구하여 계산한다.)

[단계6] 공정능력지수를 계산한다.([단계 3]에서 추정된 모수들로부터 L_{α_1}와 U_{α_2}값을 구하여 계산한다.)

3.1.3 왜도에 민감한 공정능력지수: C_s

구멍-천공 공정에 의해 전형화 된 이 지수는 제 3세대 공정능력지수인 C_{pmk}가 적절한 경고를 주질 못하기 때문에 제안되었다. C_{pmk}는 공정이 나빠지게 되면 공정의 분산과 평균변화에 기초한 경고를 주지만 분포형태의 변화를 무시하고 있기 때문에 비대칭경향을 보이는 공정에서는 이 지수의 사용은 문제가 된다. 따라서 이러한 공정의 공정능력의 감소를 검출하는데 적합한 새로운 지수가 필요하게 된다. Wright는 이와 같이 왜도에 민감한 새로운 지수인 C_s를 개발하였다[17]. 왜도의 측도로 3차 중심적률 $\mu_3 = E(X-\mu)^3$를 사용하여 식(3.14)와 같은 공정능력지수를 정의한다.

$$C_s = \frac{\min(USL-\mu,\ \mu-LSL)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2+|\mu_3/\sigma|}} = \frac{d-|\mu-T|}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2+|\mu_3/\sigma|}} \tag{3.14}$$

여기서 μ_3는 비대칭 항을 신뢰하기 위하여 분모에 있는 다른 항과 동일한 단위로 되도록 σ로 나누며 절대값은 음의 비대칭을 신뢰시키고 또한 지수에 손실을 부과시킨다. 그리고 C_s의 각 항을 σ로 나누면 식(3.15)와 같이 된다.

$$C_s = \frac{d/\sigma-|(\mu-T)/\sigma|}{3\sqrt{1+\{(\mu-T)/\sigma\}^2+|\beta_1^{1/2}|}} \tag{3.15}$$

여기서 $\sqrt{\beta_1} = \mu_3/\sigma^3$은 왜도의 전통적 표준화된 측도이다.

3.1.4 가중분산에 기초한 공정능력지수(WVM)

가중분산법(the weighted variance method : WVM)의 주된 개념은 동일한 평균과 상이한 표준편차를 갖는 2개의 새로운 분포를 만드는 것을 의미하는 것으로 즉, 편의 혹은 비대칭분포를 2개의 정규분포로 분할하는 것이다. WVM은 가정하는 모집단이 편의 되었을 때 적용하는 관리도로 Choobinch & Ballard에 의해 소개되었고[6], 그 개념은 Choobinch & Branting의 반분산 근사에 기초한다[7]. 따라서 가중분산에 기초한 공정능력지수들은 정규공정에 대한 공정능력지수들을 다음과 같이 수정하여 나타낼 수 있다.

$$\hat{C}_p(WV) = \frac{USL-LSL}{3(s_1+s_2)} \tag{3.16}$$

여기서

$$s_1^2 = \frac{2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2}{2n_1-1} \tag{3.17}$$

로 측정치가 $\overline{X}$와 같거나 작은 n_1 관측으로부터의 샘플 표준편차 s_1을 계산할 수 있다. 또한, $\overline{X}$보다 큰 n_2 관측으로부터의 샘플 표준편차 s_2는 다음과 같이 나타낸다.

$$s_2^2 = \frac{2\sum_{i=1}^{n_2}(X_i - \overline{X})^2}{2n_2 - 1} \tag{3.18}$$

한편, 목표치(T)로부터 샘플 표준편차 s_{T1}과 s_{T2}는 다구찌 불편추정량을 고려함으로써 다음과 같이 나타낸다.

$$s_{T1}^2 = \frac{2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - T)^2}{2n_1} = \frac{2n_1 - 1}{2n_1}\, s_1^2 + (\overline{X} - T)^2 \tag{3.19}$$

$$s_{T2}^2 = \frac{2\sum_{i=1}^{n_2}(X_i - T)^2}{2n_2} = \frac{2n_2 - 1}{2n_2}\, s_2^2 + (\overline{X} - T)^2 \tag{3.20}$$

$$\hat{C}_{pk}(WV) = \min\left[\frac{\overline{X} - LSL}{3s_1},\ \frac{USL - \overline{X}}{3s_2}\right] \tag{3.21}$$

$$\hat{C}_{pm}(WV) = \frac{USL - LSL}{3(s_{T1} + s_{T2})} \tag{3.22}$$

$$\hat{C}_{pm}^{*}(WV) = \min\left[\frac{T - LSL}{3s_{T1}},\ \frac{USL - T}{3s_{T2}}\right] \tag{3.23}$$

$$\hat{C}_{pmk}(WV) = \min\left[\frac{\overline{X} - LSL}{3s_{T1}},\ \frac{USL - \overline{X}}{3s_{T2}}\right] \tag{3.24}$$

$$\hat{C}_{psk}(WV) = \min\left[\frac{\overline{X} - LSL - |\overline{X} - T|}{3s_{T1}},\ \frac{USL - \overline{X} - |\overline{X} - T|}{3s_{T2}}\right] \tag{3.25}$$

3.2 불량률의 측도

비정규공정에 대한 공정능력을 평가하는 방법은 크게 2가지 측도로 구분할 수 있다. 즉 분위수를 사용하는 방법과 불량률을 사용하는 방법이다. 가장 일반적인 방법으로는 분위수를 사용하여 비정규분포에 대한 공정능력의 측도는 Pearson 시스템을 이용한 공정능력지수로 나타내는 것이다. 이 방법의 결점은 불량률을 추정하는데 어려움이 있을뿐 아니라, 정규공정 공정능력지수와 관련시켜 공정능력을 비교하기도 용이하지 않다. 따라서 이러한 결점을 보완하기 위해서 그 대안으로 Johnson 시스템을 제시하여 비정규공정의 공정능력의 평가를 공정능력지수와 불량률의 종합적 측도로 나타내고자 한다. 본 연구에서 Johnson 시스템을 적용하게된 배경은 표준정규곡선으로 변환함으로써 확률계산을 용이하게 할 수 있다는 것이다. 또한 이러한 특성은 실무에서 공정능력의 정보원으로서 유효하게 활용될 수 있는 불량률의 측도가 공정능력지수의 측도와

서로 호환성을 갖는 측도로 병행하여 사용할 수 있는 잇점도 있다. 본 연구에서는 비정규공정에 관해 불량률의 측도로 Pearson 시스템, Johnson 시스템, Burr 시스템의 3가지 시스템을 사용하여 공정능력을 평가하기로 한다.

3.2.1 Pearson 시스템

Pearson 시스템은 식(3.26)의 미분방정식을 만족시키는 $y = f(x)$ 의 분포들이다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-c_0)\,y}{c_1 + c_2 x + c_3 x^2} \tag{3.26}$$

Pearson 시스템에서 핵심역할은 적률을 이용해서 모수를 결정하고 적절한 곡선형태의 선정기준을 제시해 준다.

본 연구에서 Pearson 시스템을 적용하여 공정의 불량률을 추정하는 절차는 다음과 같다.

① 표본으로부터 $\overline{X}$, s, S_K, K_U 의 통계량을 구한다.

② S_K, K_U 로부터 K값을 구하여 분포를 확인한다.

③ S_K, K_U 의 통계량에 해당(또는 근접)하는 Pearson 시스템의 표준화된 분위수에 일치하는 값을 Gruska et al.의 표에서 구한다[10].

④ 규격을 벗어나는 불량률을 구한다.

3.2.2 Johnson 시스템

Johnson 시스템의 누적분포함수는 식(3.27)과 같다[8].

$$G_i(x) = P\{z \le \gamma + \eta\ K_i(x, \lambda, \varepsilon)\} \tag{3.27}$$

여기서 $G_i(x)$ 는 누적분포함수이며, Johnson 시스템의 형태 $i(i=1,2,3)$ 를 나타낸다. γ와 ε은 위치모수, λ, η는 척도모수이다. 확률밀도함수 $g_i(x)$ 는 $G_i(x)$ 를 미분함으로써 <표 3.2>와 같은 밀도함수를 구할 수 있다. 여기서 $f(z)$ 는 $z = \gamma + \eta K_i(x, \lambda, \varepsilon)$ 에서 계산된 표준정규밀도함수를 나타낸다. Johnson 시스템에서의 불량률 추정 절차는 3.1.2항에서 불량률 추정 절차를 동시에 언급하였기 때문에 생략하기로 한다.

<표 3.2> Johnson시스템 형태의 밀도함수

Johnson curve type	Density function
S_U	$g_1(x) = \left(\frac{\lambda}{\eta}\right) f(z) \left[1 + \left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$
S_B	$g_2(x) = \eta\lambda \frac{f(z)}{(x-\varepsilon)(\lambda+\varepsilon-x)}$
S_L	$g_3(x) = \eta \frac{f(z)}{x-\varepsilon}$

3.2.3 Burr 시스템

데이터 집합을 묘사하는 전통적인 접근은 밀도함수를 사용한다. 이 경우 데이터 비교를 위한 이론적 확률을 구하기 위해서 적분을 하여 적절한 분포함수를 구하는데 적분은 성가시고, 대부분의 밀도함수들을 구할 수 없는 현실적인 문제가 발생하게 된다. 그러나 누적분포함수가 직접 구해질 수가 있다면 불량률은 쉽게 추정할 수 있다. 이러한 접근은 Burr 와 Hatke에 의해 식(3.28)과 같은 미분방정식을 고려함으로써 시도되었다[10].

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)\,g(x,y) \qquad y = F(x) \tag{3.28}$$

여기서 $g(x,y)$ 는 $0 < y < 1$ 에 관해 양수이고 $F(x)$ 는 $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$ 인 비감소 함수이다.

Burr에 의해 고려된 한가지 편리한 해는 식(3.29)와 같다. 이것이 Burr 누적분포이다.

$$\begin{aligned} F(x) &= 1-(1+x^c)^{-K}, && x \geq 0 \\ &= 0\ , && x < 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

여기서 c, K는 Gruska et. al.[10]의 Burr 시스템의 모수의 표에서 주어지는 실수인 값들이고, 확률밀도함수는 식(3.30)과 같다.

$$F'(x) = f(x) = \frac{Kcx^{c-1}}{(1+x^c)^{K+1}} \tag{3.30}$$

Burr 시스템을 적용하여 불량률을 구하는 절차는 다음과 같다.

① 표본으로부터 $\overline{X}$, s, S_K, K_U 의 통계량을 구한다.

② S_K, K_U 값에 해당(또는 근접)하는 Burr 시스템의 모수의 표로부터 c, K, $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ 를 구한다.

③ $P_r(x < \hat{x}_0)$ 를 계산하기 위해서 아래 식을 사용해서 x_0 를 구한다.

$$\frac{x_0-\mu}{\sigma} = \frac{\hat{x}_0-\bar{x}}{s}$$

또는

$$x_0 = \sigma(\hat{x}_0-\bar{x})/s+\mu$$

이 때 $P_r(x < \widehat{x_0}) = F(x_0\,;\,c,K)$

④ 확률 P를 계산한다.

$$P = F(x_0\,;\,c,K)$$

즉

$$x_0 = [\,(1-p)^{-1/k}-1]^{1/c}$$

4. 수치 예제

수치 예제는 Hahn and Shapiro가 제시한 예제를 인용한다[11]. <표 4.1>은 $LSL=0.4$, $USL=0.9$인 공정으로부터 T = 0.5Ω 저항을 500개 측정한 데이터를 도수분포표로 정리하여 나타내었다.

<표 4.1> 0.5 Ω 저항를 500개 측정하여 정리한 도수분포표(단위 : ohm)

N0	중앙값	도수	S_B
1	0.4 미만	4	6.5
2	0.425	33	36.1
3	0.475	78	74.1
4	0.525	99	93.8
5	0.575	87	90.4
6	0.625	76	73.0
7	0.675	51	52.0
8	0.725	32	33.7
9	0.775	21	19.9
10	0.825	7	10.9
11	0.875	5	5.5
12	0.9 초과	7	4.1
합계		500	500
χ^2의 값			3.64

4.1 공정능력지수의 추정 절차

4.1.1 Pearson 시스템(Clement 방법)에 의한 공정능력지수의 추정

Pearson 시스템에 의한 공정능력지수의 추정은 다음과 같은 절차에 의해 실시한다.

[단계 1] 표본통계량 $\overline{x}$, s, S_K , K_U 를 구한다.

[단계 2] $L_{\alpha}^{'}$값에 대해 양수의 왜도값과 음수의 왜도값은 Grusk et al.의 표를 사용하여 표준화된 0.135 분위수를 찾는다[10].

[단계 3] $U_{\alpha}^{'}$값으로 양수의 왜도값과 음수의 왜도값은 Grusk et al.의 표를 사용하여 표준화된 99.865 분위수를 찾는다[10].

[단계 4] $M^{'}$ 값으로 Grusk et al.의 표에 의하여 표준화된 메디안의 값이 양수의 왜도값일 때는 - 부호를 갖고, 음수의 왜도값일 때는 그대로 둔다[10].

[단계 5] 0.135분위수 L_{α}를 식(4.1)에 의해 추정한다.

$$\hat{L}_{\alpha}=\overline{X}-sL_{\alpha}^{'} \tag{4.1}$$

[단계 6] 99.865 분위수 U_a를 식(4.2)에 의해 추정한다.

$$\hat{U}_a = \overline{X} - sU_a' \tag{4.2}$$

[단계 7] 메디안 M_e를 식(4.3)에 의해 추정한다.

$$\hat{M}_e = \overline{X} + sM' \tag{4.3}$$

[단계 8] $\hat{L}_a$, $\hat{U}_a$, $\hat{M}_e$ 를 사용하여 C_p, C_{pk}, C_{pm}, C^*_{pm}, C_{pmk}, C_{psk} 의 추정치를 식(3.1)~식(3.6)에 대입하여 계산한다.

Clements에 의해 제시된 계산용지에 의해 Pearson 시스템에 의한 공정능력지수를 계산하기 위해서 측정 데이터로부터 $\overline{x}=0.59$, $s=0.105$, $S_K=0.54$, $K_U=2.98$이 구해졌다. 이 값에 의해 $\hat{U}_a=1.06$, $\hat{L}_a=0.26$, $\hat{M}_e=0.58$로 추정되었다. 상기 값들을 식(3.1)~식(3.6)에 대입하여 추정된 공정능력지수 값을 구한 결과는 <표 4.2>와 같다.

4.1.2 Johnson 시스템에 의한 공정능력지수의 추정

Johnson 시스템에 의한 공정능력지수의 추정은 다음과 같다.

[단계1] $Z=0.5483$를 적용하여 $x_{-3z}=0.432$, $x_{-z}=0.516$, $x_z=0.635$, $x_{3z}=0.786$ 값이 추정되었다.

[단계2] 판별 함수식 $mn/p^2=0.896$ 이므로 S_B곡선에 해당된다.

[단계3] 곡선의 모수 추정을 식(3.10)~식(3.13)에 의거 계산하면 다음과 같다.

$$\hat{\eta} = \frac{0.5483}{\cosh^{-1}\left[\frac{1}{2}\sqrt{(1.788)(2.417)}\right]} = 1.959$$

$$\hat{\gamma} = 1.959\sinh^{-1}\left[\frac{(1.417-0.788)\sqrt{(1.788)(2.417)-4}}{2[(0.788)(1.417)-1]}\right] = 2.373$$

$$\hat{\lambda} = \frac{(0.119)\sqrt{[(1.788)(2.417)-2]^2-4}}{(0.788)(1.417)-1} = 1.203$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{0.635+0.516}{2} - \frac{1.203}{2} + \frac{(0.119)(1.417-0.788)}{2[(0.788)(1.417)-1]} = 0.295$$

[단계4] 분포형태는 우측 비대칭인 분포이다.

[단계5] 식(4.4)을 이용하여 Z_L과 Z_U를 추정한다.

$$Z = \gamma + \eta\ln\left(\frac{x-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon-x}\right) \tag{4.4}$$

$$\hat{Z}_L = \hat{\gamma} + \hat{\eta}\ln\left(\frac{LSL - \hat{\varepsilon}}{\hat{\lambda} + \hat{\varepsilon} - LSL}\right) = -2.225$$

$$\hat{Z}_U = \hat{\gamma} + \hat{\eta}\ln\left(\frac{USL - \hat{\varepsilon}}{\hat{\gamma} + \hat{\varepsilon} - USL}\right) = 2.390$$

$$P(X < LSL) = P(Z < Z_L) = P(Z < -2.225) = 0.01222453288 \fallingdotseq 0.0122$$

$$P(X > USL) = P(Z > Z_U) = P(Z > 2.390) = 0.0084$$

[단계6] $$L_{\alpha_1} = \varepsilon + \lambda\left[1 + \exp\left(\frac{\gamma + 3}{\eta}\right)\right]^{-1} = 0.378$$

$$U_{\alpha_2} = \varepsilon + \lambda\left[1 + \exp\left(\frac{\gamma - 3}{\eta}\right)\right]^{-1} = 0.992$$

L_{α_1}와 U_{α_2}값을 식(3.7) 및 식(3.9)에 대입하고, 나머지 공정능력지수는 Pearson 시스템과 동일한 방법으로 적용하여 구한 결과를 <표 4.2>에 정리하였다.

4.1.3 왜도에 민감한 공정능력지수(C_s) 및 가중분산에 기초한 공정능력지수의 추정

이 2가지 공정능력지수의 계산 결과를 <표 4.2>에 정리하였다.

<표 4.2> 정규공정과 비정규공정의 공정능력 측도 비교(( )는 최소값을 나타낸다.)

공정능력 측도 / 공정 분류 및 적용 구분		공 정 능 력 지 수								불량률(PPM)		비 고
			$\hat{C}_{pk}$									
		$\hat{C}_p$	$\hat{C}_{pl}$	$\hat{C}_{pu}$	$\hat{C}_{pm}$	$\hat{C}^*_{pm}$	$\hat{C}_{pmk}$	$\hat{C}_s$	$\hat{C}_{psk}$	$P(X<LSL)$	$P(X>USL)$	$E_q \cdot C_{pk}$는 정규공정의공정능력지수로 추정한값을의미
정규공정		0.79	(0.60)	0.98	0.60	0.24	0.46	0.33	0.24	35,150	1,589	$\hat{C}_{pk}$ =0.60
비정규 공 정	WVM	1.08	(0.98)	1.15	0.70	0.30	0.57	--	0.30	--	--	--
	Pearson 시스템	0.63	(0.56)	0.67	0.54	0.21	0.45	--	0.25	9,120	6,390	$E_q \cdot C_{pk}$=0.79
	Johnson 시스템	0.80	(0.74) (0.78)	0.89 0.85	0.64	0.25	0.48	--	0.31	13,019	8,424	$E_q \cdot C_{pk}$=0.74
	Wright	--						0.33	--	--	--	--
	Burr 시스템	--								8,900	5,632	$E_q \cdot C_{pk}$=0.79

4.2 불량률 추정 절차

4.2.1 Pearson 시스템

3.2.1 항에서 불량률을 추정하는 절차를 언급하였다.

4.2.2 Johnson 시스템

3.2.2 항에서 불량률을 추정하는 절차를 언급하였다.

4.2.3 Burr 시스템

3.2.3 항에서 불량률을 추정하는 절차를 언급하였다.

4.3 공정능력의 평가

4.3.1 공정능력지수

이 공정은 규격을 벗어나고 있고 또한 공정의 평균과 메디안이 각각 목표치를 약간 벗어나고 있어 지속적인 품질개선이 요구된다. 이러한 내용을 반영 시켜주는 $\hat{C}_{psk}$의 값은 정규공정일 때 0.24로 비정규공정의 Pearson 시스템인 경우 0.25와 거의 같고, 본 논문에서 새롭게 제안된 WVM의 경우 0.30은 Johnson시스템의 경우 0.31과 유사하여 두 시스템간의 차는 거의 없다고 판단된다. <표 4.2>에서 알 수 있듯이 목표치를 벗어남을 감지하는 감도의 우수성은 $T \neq M$인 경우 Pearson과 Johnson 방법에서는 C_{psk}가 C^*_{pm} 보다 감도가 조금 떨어지나, 본 논문에서 제안하는 비정규공정에 대한 새로운 공정능력지수 $C_{psk}(WV)$는 $T \neq M$인 경우에 C^*_{pm}보다는 감도가 결코 떨어지지 않고, 특히 왜도에 민감하게 개발된 C_s 보다 우수함을 보여주어 비정규공정의 공정능력을 올바르게 반영시키고 있음을 알 수 있다.

4.3.2 불량률

불량률의 척도로 공정능력을 평가하면, 비정규공정을 정규공정으로 가정할 때 최대허용 불량률은 Johnson 시스템의 경우와 비교하면, 15,296 PPM으로 되어 공정 불량률을 과대 추정함으로써 해당 공정을 과소 평가함을 알 수 있다. 즉, 정규공정과 Johnson 시스템의 공정능력지수의 차 0.14에 해당하는 불량률이 15,296 PPM이다. 그리고 Pearson 시스템과 Johnson 시스템 및 Burr 시스템의 불량률을 정규 공정능력지수로 추정한 $E_q \cdot C_{pk}$로 비교해 볼 때 3가지 시스템간에 큰 차가 없다고 판단되며, Pearson 시스템과 Burr 시스템이 비교적 근사하게 추정되어짐을 알 수 있다.

5. 결론

정규공정에 있어서 제 4세대 지수 C_{psk}는 목표치로부터 공정의 벗어남에 대한 여분의 손실로서 분자에 인자 $|\mu - T|$를 도입함으로써, C_{pmk}로 부터 만들어졌다. 목표치로부터 동일하게 떨어진 공정이라 하더라도 공정이 규격 한계치 이내에 있는 경우와 그렇지 못한 경우를 식별하기 위해서 C_{psk}가 제시되어 대칭인 경우와 비대칭인 경

우, 공정이 목표치로부터 변화할 때 방향에 관계없이 실행되는 지수로 C_{psk}는 평가받고 있다. 현 공정능력지수들은 정규분포의 가정 하에 개발되었기 때문에 비정규공정 데이터에 대해서는 적용하기가 힘들다. 그래서 Clements 방법은 이러한 전통적 공정능력 지수들을 분위수들을 사용하여 재표현 함으로써 비정규공정에 대한 공정능력지수로 정의하는 것이다.

본 연구에서는 비정규공정에 대하여 Clements방법을 확장시켜 새로운 공정능력지수인 $C_{psk}(WV)$를 제안하여 Johnson 방법의 S_B곡선을 적용시켜 사례를 통해 살펴본 결과, 공정 메디안이 목표치 벗어남을 식별하는 감도는 Johnson 시스템의 경우 C_{psk}가 C^*_{pm}보다 조금 떨어지는 경우를 제외하고는 비정규 공정능력을 잘 반영하고 있음을 알 수 있다. WVM과 Johnson 시스템과는 거의 일치함을 알 수 있었다. 그러나 공정능력지수로 공정능력을 평가할 때의 큰 결점은 공정의 불량률의 정보가 무시되기 쉽다는 사실이다. 따라서 이의 대안으로 불량률에 의한 공정능력 평가를 시도함으로써 비정규공정의 공정능력 평가에 추가 정보를 제공할 수 있어 실무자로 하여금 공정의 개선을 유도하는데 유용한 측도로 활용할 수 있다. 또한 불량률의 측도는 공정능력지수와 상호 호환성을 갖기 위해 $E_q \cdot C_{pk}$로 나타냄으로써 두 측도간의 비교의 용이성을 추구하였다. 불량률의 측도에 의한 공정능력의 평가는 Pearson 시스템과 비교하면 Burr 시스템이 비교적 근사하게 추정되어짐을 알 수 있다. 그러나 $E_q \cdot C_{pk}$로 3가지 시스템을 비교해 볼 때 그다지 큰 차이는 없다고 판단된다.

6. 참고문헌

[1] 김홍준, 김진수, 송서일, ˝불량률의 측도로 비정규 공정능력의 평가 : Gamma 분포˝, 품질경영학회지, 제27권, 제1호, pp.18~34, 1999

[2] Benson, E. D., "Statistical Properties of a System of Fourth-Generation Process Capability Indices C_{psk}(U,V,W)", Ph. D. Dissertation, University of Maryland, 1994.

[3] Boyles, R. A., "The Tagux Capability Index", Journal of Quality Technology, 23(1), pp. 17-26, 1991

[4] Chan, L. K., Cheng, S. W., and Spiring, F. A., "A New Measure of Process Capability: C_{pm}", Journal of Quality Technology, 20(3), pp. 162 - 175, 1988

[5] Choi, B. C., and Owen, D. B., "A Study of New Process Capability Index", Communication in Statistics. -Theory and Method, 19(4), pp. 1231 - 1245, 1990

[6] Choobinch, F., Ballard, J. L., ˝Control-limits of QC Charts for Skewed Distributions using Weighted-Variance˝, IEEE Trans. Reliab., REL-36, pp. 473-477, 1987

[7] Choobinch, F., Branting, D., "A Simple Approximation for semivariance", Eur. J. Oper. Res., 27, pp. 364-370, 1986
[8] Clements, J. A., " Process Capability Calculations for Non-normal Distributions", Quality Process, 22(9), pp. 95-100, 1989
[9] Farnum, N. R., "Using Johnson Curves to Describe Non-Normal Process Data", Quality Engineering, 9(2), pp. 329 - 336, 1996~7
[10] Gruska, G. F., Lamberson, L. R., and Mirkhani, K., "Non-Normal Data Analysis", Multiface Publishing Co., Michian, 1989
[11] Hahn, G. J., and Shapiro, S. S., "Statistical Models in Engineering", John Wiley & Sons, Inc., New York. p. 207, 1967
[12] Kane, V., "Process Capability Indices," Journal of Quality Technology, 18(1) , pp. 41 - 52, 1986
[13] Lovelace, C. R., " The Development of a Process Capability Index for Non-Normal Processes Naturally Bound at Zero", Ph. D. Dissertation, University of Alabama in Huntsville, 1994
[14] Pearn, W. L., and Kotz, S., "Application of Clements' Method for Calculating Second-and-Third-Generation Process Capability Indices Non-Normal Pearsonian Population", Quality Engineering, 7(1), pp. 139-145, 1994~5
[15] Pearn, W. L., Kotz, S., and Johnson, N. L., "Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices", Journal of Quality Technology, 24(4), pp. 216 - 231, 1992
[16] Slifker, J. F., and Shapiro, S. S., "The Johnson System : Selection and Parameter Estimation", Technometrics, 22(2), pp. 239 - 246, 1980
[17] Wright, P. A., "A Process Capability Index Sensitive to Skewness", Journal of Statistical Computation and Simulation, 52, pp. 195-203, 1995

저 자 소 개

김진수

건국대학교 산업공학과를 졸업하고, 동 대학원에서 석사 학위를 취득하였다. 현재 대전산업대학교 산업공학과 교수로 재직중이며, 주요 관심분야는 품질경영 및 신뢰성, 실험계획/분석, 다변량 분석, 생산/일정계획 등이다.

김홍준

건국대학교 산업공학과를 졸업하였으며, 동아대학교 대학원 산업공학과에서 석사 및 박사 학위를 취득하였다. 현재 대구산업정보대학 산업안전과에 재직중이며, 주요 관심분야는 품질공학, 다변량 분석, 분산 최적 설계, 생산 자동화, TPM, ISO 등이다.