

論文2001-38SP-11-3

인간시각필터의 수학적 모델링 해석

(Mathematical Modeling Analysis of the Human Visual Filters)

李 迪 植 *

(Juck Sik Lee)

요 약

인간시각체계에서 단순세포의 수용영역에 대한 수학적인 모델 연구가 정신물리학, 생리학, 신경과학 측면에서 발전되어 왔다. 여러 분야에서 사용되는 모델은 Gabor 복소함수, Gaussian 미분, Hermite 함수를 포함하며, 영상처리와 컴퓨터 시각 분야에 많이 응용되고 있다. 본 논문에서는 불확실성원리에 기초하여 고려된 함수들의 결합유효폭을 계산하고, 인간시각필터와 일치되는 중심주파수와 각 함수의 변수들을 결정하고, 결과적인 대역폭을 분석한다. 더욱이 함수들의 위치와 주파수 영역의 특성을 파악하여 정신물리학적으로 획득한 실험적인 데이터와의 관련성을 검토한다.

Abstract

The mathematical models for the receptive field of simple cells in the human visual system have been developed in the areas of psychophysics, physiology and neuroscience. The various models used in the fields of digital image processing and computer vision include Gabor complex, Gaussian derivatives and Hermite functions. In this paper, the effective widths for the models are derived based on the space-frequency uncertainty principle. The center frequency and parameters related to the models are determined in accordance with the human visual filters, and resultant bandwidths are analyzed. Furthermore, the characteristics of space and frequency for the models is analyzed and compared to the experimental data obtained from psychophysics.

I. 서 론

긴 진화 역사를 가지는 인간시각체계의 이해는 영상처리와 컴퓨터시각 분야의 초석이 될 것이다. 영상처리에서 사용되는 입력들은 대부분 인간의 생활 주변환경에서 볼 수 있는 것들이기 때문에 인간시각모델의 해

석을 더욱더 필요로 한다. 영상처리의 결과를 질적으로 평가할 때, 인간 시각에 의존하여 판단하는 경우가 많다. 일반적으로 오차의 척도로 사용되는 평균자승보다는 시각에 인지되는 오차들이 훨씬 중요하게 영향을 미친다. 그래서 인간시각 작용의 원리와 모델을 영상처리 과정에 포함시키면 출력 결과에 대한 인지오차를 감소시킬 수 있다.

인간시각체계에서 단순 세포(simple cell)의 필터 특징을 결정하는 수용영역의 수학적인 모델에 대한 연구가 정신물리학, 생리학, 신경과학 측면에서 이루어져 왔다. Gaussian 함수에 복소지수함수를 곱한 Gabor 복소함수는 시각피질의 수용영역(receptive field)을 표현하기 위해서 제안되었다^[1]. 불확실성 원리(uncertainty

* 正會員, 京畿大學校 電子機械工學部
(School of Electronic and Mechanical Eng., Kyonggi University)

“이 논문은 1999학년도 경기대학교 해외파견 연구비지원에 의해 연구되었음”

接受日字:2001年1月17日, 수정완료일:2001年8月3日

principle)에 의하면 위치와 주파수 불확실성의 곱은 어떤 상수보다 커지게 된다. Gabor 복소함수에 대한 두 불확실성의 곱은 최소를 만족시키기 때문에 영상처리, 컴퓨터 시각에서 많이 언급되고 있다^[2]. 그러나 실제적인 응용에서는 복소수 문제 때문에 실수 함수인 Gabor Cosine(GC)과 Gabor Sine(GS) 함수가 대신 사용된다^[3~5]. Young은 영상류의 시각피질에서 시각 수용영역의 형태가 Gabor 함수보다 가우시언의 미분(Gaussian Derivative: GD)에 의해서 더 정확히 나타낼 수 있다는 것을 보였다^[6]. 실제적인 GD의 수행은 이동된 가우시언들의 차이(Differences of Offset Gaussian)에 의해서 이루어졌고, GD 모델이 생리적인 데이터에 적합함을 여러 경우에 대해서 보였다. Morgan은 데이터 수가 커질수록 Hermite 다항식에 수렴하는 일련의 이산 수직 다항식(Krawtchouk)을 찾아서, GD를 컴퓨터 수행에 적합하도록 하였다^[7]. 3가지 형태의 이산 기저에 대해서 표준 JPEG과 영상압축 결과를 비교한 결과, 비슷한 성능으로 2배 정도의 빠른 영상복원을 보였다. 여러 가지 GD 중 2차 미분인 Laplacian of Gaussian (LOG)은 영상에 존재하는 가장자리 추출과 피라미드 영상처리에 많이 사용되며, 6차 미분인 D6은 인간시각의 해석에 많이 언급되고 있다^[8~10].

Hermite 함수(HF)의 공간과 주파수 불확실성의 곱에 대한 최적성은 논란의 여지가 존재한다. Stork와 Wilson^[2]은 Hermite 함수가 불확실성의 곱을 최소화시키는 실수함수로, Klein과 Beutter^[11]는 최대화시키는 함수로 주장하고 있다. Bloom과 Reed의 결과에서는 동일 차수에서 Hermite 함수의 불확실성 곱이 GD보다 크게 나타남을 보였다^[12].

인간시각필터의 모델을 다양한 함수 형태로 영상처리와 컴퓨터 시각에 적용하였지만, 여러 필터모델의 성능을 비교 분석한 것은 Bloom과 Reed에 의해서 시도되었다. 그들은 불확실성에 기초하여 3 실수 함수(HF, GC, GD)에 대해서 오직 결합유효폭만을 계산하여, GC 함수가 다른 함수보다 우수한 것을 보였다^[12].

한편 Bloom과 Reed는 주파수 영역을 균일하게 8 등분하여, 각 대역통과필터의 중심주파수에 해당하는 GD의 차수를 산출하고, 8개의 GD 함수를 사용하여 영상압축에 적용하였다^[13]. GD함수에서 표본화된 행렬의 크기는 입력영상과 동일하며, 역행렬의 계산이 필요로 한다. 동일한 신호대잡음비의 경우에 오차들이 균일하게 분포하여 DCT보다 시각적으로 우수함을 보였다.

Bloom과 Morgan이 사용한 8개 필터는 8x8 JPEG과 비교를 위한 것이고^[7,12], 현재까지 인간시각의 필터 개수는 6개가 존재한다는 것이 보편화되어 있다^[14,15]. 인간시각의 대조감도함수(contrast sensitivity function)는 일종의 대역통과필터의 형태임에도 불구하고, 양자화시 가중함수로 사용되는 행렬은 실제적인 시각필터의 성질을 이용하지 않았다. 인간시각의 필터는 주파수가 높아질수록 대역폭(옥타브 단위)이 감소하는 현상을 보여주고 있지만 발표된 논문들은 이러한 사실을 고려하지 않았다. 본 논문은 인간시각체계에서 알려진 6개의 필터와 각 필터에 대해서 다른 대역폭을 사용하여, 인간시각의 영상처리에 사용되는 여러 가지 수학적 모델을 실제적인 정신물리학에서 획득한 자료와 비교, 분석하고자 한다.

II. 인간시각의 주파수 감도 특성

공간시각(spatial vision)과 초정밀(hyperacuity)시각 모델을 위해서 공간 필터와 공간 표본화 개념이 중요하다. 생리적인 수용영역은 정신물리학적으로 고려할 때 공간 필터에 해당한다. 어떤 세포의 수용영역 중심이 망막의 특정한 점에 위치할 때, 그 세포의 감도는 2차원 공간 필터와 시각공간의 위치에 따른 영상밝기에 의해서 결정된다. 즉 각 위치의 밝기를 공간 필터와 곱하고, 결과를 2차원적으로 합하면 세포의 응답을 얻을 수 있다. Campbell과 Robson^[16]은 정현파 격자를 사용하여 대조 문턱치(contrast threshold)를 측정함으로써 처음으로 인간시각체계의 공간필터 특성 파악을 시도하였다. 문턱치의 역수를 감도(sensitivity)로 고려하여 인간시각체계를 특징짓는 공간 필터의 주파수 특성인 대조감도함수를 추론하였다. 더욱 정교한 방법으로 Wilson은 망막의 중심와(fovea)에 존재하는 6개의 공간 대역통과필터에 대한 자료를 실험으로 획득하였다. 주파수감도곡선의 대역폭은 0.8 cpd(cycle/degree)에서 2.2 옥타브, 10 cpd에서 1.3 옥타브로 최대감도주파수가 증가할수록 대역폭이 감소하는 경향을 보이며, 자세한 특성은 표 1에 나타나 있다^[14,15].

인간시각체계에서 사용되는 주파수의 단위는 cpd이고, 대역폭은 최대감도의 반이 되는 두 주파수의 비에 의해서 계산되며, 옥타브 단위로 다음과 같이 정의된다.

$$BW [\text{octave}] = \log_2 \frac{\omega_c + \delta\omega_u}{\omega_c - \delta\omega_l} \quad (1)$$

여기서 ω_c 는 최대감도를 갖는 중심주파수이고, $\omega_c + \delta\omega_u$ 와 $\omega_c - \delta\omega_l$ 는 최대감도의 반이 되는 상측 및 하측 주파수를 각각 의미한다. 위에서 정의된 대역폭은 일반적으로 전기, 전자공학 분야에서 사용되는 반전력 대역폭과 다르다.

표 1. 중심와에서 6개 필터 특성
Table 1. Characteristic of six filters at the human fovea.

중심주파수(cpd)	0.8	1.7	2.8	4.0	8.0	16.0
대역폭(octave)	2.2	2.0	1.5	1.5	1.3	1.3
대역폭(cpd)	6.4594	12.8177	16.8045	24.0064	42.4590	84.9180
최대감도	30	70	140	150	76.7	18.4

III. 시각체계의 수학적 모델

여러 관련 논문에서 자주 인용되는 시각체계 함수인 GD 계열, HF, Gabor 함수 계열에 대한 특성을 파악하여 실제 실험적으로 획득한 자료와의 일치성을 파악하고자 한다. 비교될 특성으로는 위치, 주파수의 불확실곱, 중심주파수와 연관되는 대역폭 그리고 대역폭의 변화 가능성을 다룬다. Gabor 함수는 복소함수이기 때문에 실제계에는 부적합하여 복소지수함수 대신에 코사인파와 사인 함수에 의해서 변조되는 두 함수, 그리고 GD 계열에서 컴퓨터 시각과 정신물리학에서 많이 언급되는 LOG와 D6도 고려하였다.

함수 $f(x)$ 와 그것의 주파수 변환을 $F(\omega)$ 라고 할 때, 위치와 주파수의 불확실($\Delta x, \Delta\omega$) 또는 유효폭(effective width)은 다음과 같이 정의된다^[2].

$$(\Delta x)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx},$$

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (2)$$

여기서 \bar{x} 와 $\bar{\omega}$ 는 아래식으로 정의되는 위치와 주파수의 평균값이며, 실수인 위치함수와 $\omega=0$ 에 대칭인 주

파수함수에 대해서 이들 평균값은 0이다.

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}, \quad \bar{\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (3)$$

불확실성원리에 의하면 위치와 주파수 결합불확실성(joint uncertainty: $\Delta x \Delta\omega$) 또는 결합유효폭은 0.5이상이며, Gabor 복소함수가 최소값을 만족한다. 그러나 이 함수는 복소수 형태여서 실제로 영상처리와 컴퓨터시각에 적용하려면 문제점을 야기시킨다.

1. Gaussian 미분 함수

기저함수로 GD를 사용하여 입력신호를 선형조합으로 표현하여 영상압축에 사용될 수 있다. 기저함수들은 제한된 범위에서 값을 가지고, 원래의 Gaussian을 제외한 모든 GD들은 대역통과필터특성을 지닌다. 1차원 Gaussian 미분기저함수 $g_n(x)$ 는

$$g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

$$g_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} H_{n,o}(x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

여기서 $H_{n,o}(x) = (\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})^n H_n(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma})$ 이며, $H_n(x)$ 는 n 차 Hermite 다항식이다. 원점에서 Gaussian 적고 GD 기저함수들은 다음과 같다.

$$\frac{1}{\sqrt{g_0(x)}} \frac{\sigma^n}{\sqrt{n!}} g_n(x) \quad (6)$$

기저함수의 주파수 변환은

$$G_0(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}, \quad G_n(\omega) = (j\omega)^n G_0(\omega) \quad (7)$$

g_0 는 저역통과필터 특성을 지니고 있기 때문에, 인간시각의 대역통과필터와 다르다. 위치유효폭은 $(\Delta x)^2 = \frac{(4n-1)\sigma^2}{2(2n-1)}$ 이고, 주파수유효폭은 $(\Delta\omega)^2 = \frac{2n+1}{2\sigma^2}$ 이므로 결합유효폭은 차수만의 함수로 다음과 같이 주어진다.

$$(\Delta x \Delta\omega) = \sqrt{\frac{(4n-1)(2n+1)}{4(2n-1)}} \quad (8)$$

중심주파수 ω_c 는 $dG_n(\omega)/d\omega = 0$ 을 만족하는 주파

수이며 다음과 같다.

$$\omega_c = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \tag{9}$$

차수와 대역폭 관계식을 얻기 위해서 아래 식 (10)을 차수에 대해서 정리하면, 크기가 반이 되는 상측과 하측 주파수에서 식 (11), (12)를 유도할 수 있다.

$$(\omega_c \pm \delta\omega)^n e^{-\frac{\sigma^2(\omega_c \pm \delta\omega)^2}{2}} = \frac{1}{2} \omega_c^n e^{-\frac{\sigma^2 \omega_c^2}{2}} \tag{10}$$

$$n = \frac{-\ln 2}{\ln(1 + \frac{\delta\omega_u}{\omega_c}) - [\frac{\delta\omega_u}{\omega_c} + \frac{1}{2}(\frac{\delta\omega_u}{\omega_c})^2]} \tag{11}$$

$$n = \frac{-\ln 2}{\ln(1 - \frac{\delta\omega_l}{\omega_c}) + [\frac{\delta\omega_l}{\omega_c} - \frac{1}{2}(\frac{\delta\omega_l}{\omega_c})^2]} \tag{12}$$

일반적인 GD함수는 차수에 따라서 대역폭이 변경 가능함을 알 수 있다. 식 (1), (9), (11), (12)을 이용하여 중심주파수와 대역폭을 만족하는 차수, $\delta\omega_l$, $\delta\omega_u$ 를 계산할 수 있다. 차수는 실수값으로 주어지므로 자연수를 선택하여 다시 $\delta\omega_l$, $\delta\omega_u$ 와 대역폭을 재조정하여, 최종적으로 결정된 GD의 변수들이 표 2에 나타나 있다. 차수를 자연수로 선택했기 때문에 표1의 대역폭과 조금 차이가 있다.

1) 정규화된 LOG 웨이브릿 함수

GD에서 차수가 2인 경우로 여러 논문과 영상처리에 서 LOG로 많이 사용된다. 정규화된 웨이브릿은 아래와

같으며, GD의 $g_2(x)$ 로부터 유도할 수 있다.

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}\sigma\pi^{1/4}} (\frac{x^2}{\sigma^2} - 1) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{13}$$

크기 s , 변위 t 인 웨이브릿 함수가 $\psi_{s,t}(x) = \sqrt{s}\psi(sx - t)$ 일 때, 크기만을 고려한 웨이브릿은

$$\psi_s(x) = \sqrt{s}\psi(sx) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sqrt{\frac{s}{\sigma}} [(\frac{s}{\sigma})^2 x^2 - 1] e^{-\frac{(s}{\sigma})^2 \frac{x^2}{2}} \tag{14}$$

위 식의 Fourier 변환은

$$\Psi_s(\omega) = -\frac{\omega^2}{(s/\sigma)^{2.5}} \sqrt{\frac{8}{3}} \pi^{1/4} e^{-\frac{\omega^2}{2(s/\sigma)^2}} \tag{15}$$

GD에서 차수가 2인 경우와 동일하므로 유효폭들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \frac{7}{6} (\frac{\sigma}{s})^2, \quad (\Delta\omega)^2 = \frac{5}{2} (\frac{s}{\sigma})^2, \\ (\Delta x \Delta\omega) &= \sqrt{\frac{35}{12}} \end{aligned} \tag{16}$$

중심주파수는 $\omega_c = \sqrt{2} \frac{s}{\sigma}$ 로 주어지며, $n = 2s^2$ 이 될 때 GD와 동일한 중심주파수를 갖는다. 대역폭에 대한 식은 식 (11)과 (12)에 차수 2를 대입하여 얻을 수 있다.

표 2. 인간시각필터 특성을 갖는 GD 변수
Table 2. GD parameters with the characteristic of human visual filters.

중심주파수(cpd)	0.8	1.7	2.8	4.0	8.0	16.0
차수(n)	1	2	3	3	4	4
$\delta\omega_l$	3.4226	5.5370	7.6603	10.9433	19.2545	38.5090
$\delta\omega_u$	4.6326	6.7994	9.0367	12.9096	22.1928	44.3857
대역폭(octave)	2.5903	1.7647	1.4228	1.4228	1.2244	1.2244
σ	0.1989	0.1324	0.0985	0.0689	0.0398	0.0199

표 3. 중심주파수를 일치시키고 계산한 σ (LOG)
Table 3. σ with the same center frequencies (LOG).

중심주파수(cpd)	0.8	1.7	2.8	4.0	8.0	16.0
$\delta\omega_l$	2.6056	5.5370	9.1198	13.0282	26.0565	52.1129
$\delta\omega_u$	3.1997	6.7994	11.1991	15.9986	31.9973	63.9946
σ	0.2813	0.1324	0.0804	0.0563	0.0281	0.0141

표 4. 중심주파수를 일치시키고 계산한 σ (D6)
Table 4. σ with the same center frequencies (D6).

중심주파수(cpd)	0.8	1.7	2.8	4.0	8.0	16.0
$\delta\omega_l$	1.6000	3.3999	5.5999	7.9998	15.9996	31.9992
$\delta\omega_u$	1.7951	3.8146	6.2829	8.9755	17.9510	35.9020
σ	0.4873	0.2293	0.1392	0.0975	0.0487	0.0244

표 5. Hermite 함수에 대한 12차까지의 중심주파수
Table 5. Center frequencies up to order of 12 for Hermite function.

차수 (n)	1	2	3	4	5	6
중심주파수 (ω_c)	$\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$	$\frac{\sqrt{5}}{2\sigma}$	$\frac{\sqrt{9+\sqrt{57}}}{2\sqrt{2}\sigma}$	$\frac{\sqrt{7+\sqrt{22}}}{2\sigma}$	$\frac{1.948955}{\sigma}$	$\frac{2.165520}{\sigma}$
차수 (n)	7	8	9	10	11	12
중심주파수 (ω_c)	$\frac{2.364705}{\sigma}$	$\frac{2.550088}{\sigma}$	$\frac{2.724171}{\sigma}$	$\frac{2.888783}{\sigma}$	$\frac{3.045308}{\sigma}$	$\frac{3.194824}{\sigma}$

주어진 차수와 중심주파수에서 식 (11)과 (12)를 만족하는 대역폭은 한 값이므로 인간시각필터의 중심주파수와 대역폭의 관계를 동시에 만족시킬 수 없다. 중심주파수를 일치시켜 σ 를 계산하면 표 3과 같다. 주어진 차수에서 위 식을 만족하는 $\delta\omega/\omega_c$ 는 오직 한 값이므로 대역폭은 모두 1.7647 옥타브로 동일한 값을 갖는다. 표 3의 σ 는 크기 s 가 1인 경우이다.

2) GD에서 차수가 6인 경우

$$(\Delta x \Delta \omega) = \sqrt{\frac{299}{44}} \quad (17)$$

식 (8)에서 차수가 6인 경우를 사용하였으며, LOG와 마찬가지로 중심주파수를 일치시켜 대역폭을 계산한 결과가 표 4와 같다. 차수가 고정이므로 대역폭은 0.9933 옥타브로 6개 필터 모두 동일하다. LOG와 D6은 중심주파수를 인간시각필터와 일치시킬 수 있으나, 이 경우 대역폭은 고정이므로 인간의 중심주파수 증가에 따른 대역폭 감소현상을 나타낼 수 없다.

2. Hermite 함수

Hermite 함수는 Hermite 다항식에 지수함수가 곱해진 아래의 형태이다.

$$hf_n(x) = H_{n,\sigma}(x) e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \quad (18)$$

주파수 변환은 아래와 같으며 역시 Hermite 다항식을

포함한다.

$$HF_n(\omega) = j^n \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^{n-1} e^{-\sigma^2 \omega^2} H_n(-\sqrt{2}\sigma\omega) \quad (19)$$

위치와 주파수의 유효폭 성분은 적분표^[17]를 이용하여 계산하면

$$(\Delta x)^2 = 2\sigma^2 \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (\Delta \omega)^2 = \frac{1}{2\sigma^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$(\Delta x \Delta \omega) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (20)$$

주파수 변환식으로부터 유도하면 n 차 중심주파수는 다음 식을 만족하는 주파수이다.

$$\sqrt{2}\sigma\omega H_n(\sqrt{2}\sigma\omega) - 2nH_{n-1}(\sqrt{2}\sigma\omega) = 0 \quad (21)$$

그리고 Hermite 다항식은 모든 x 에 대해서 다음 식을 만족한다^[17].

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (22)$$

식 (21)을 식 (22)에 대입하여 정리하면

$$H_{n+1}(\sqrt{2}\sigma\omega) = \sqrt{2}\sigma\omega H_n(\sqrt{2}\sigma\omega) \quad (23)$$

식 (21)과 (23)로부터 다음 식을 만족하는 주파수가 역시 n 차 중심주파수가 된다.

표 6. 인간시각필터 특성을 갖는 Hermite 함수의 변수

Table 6. Parameters of Hermite function with the characteristic of human visual filters.

중심주파수(cpd)	0.8	1.7	2.8	4.0	8.0	16.0
차수(n)	1	2	3	3	4	4
$\delta\omega_l$	3.4226	4.0489	4.8129	6.8756	10.9803	21.9606
$\delta\omega_u$	4.6326	5.6674	6.8356	9.7651	15.7264	31.4528
대역폭(octave)	2.5903	1.3016	0.9347	0.9347	0.7483	0.7483
σ	0.1407	0.1047	0.0818	0.0572	0.0340	0.0170

표 7. 중심주파수와 대역폭을 일치시키고 계산한 Gabor 복소함수의 σ

Table 7. σ of Gabor complex function with the same center frequencies and bandwidths.

중심주파수(cpd)	0.8	1.7	2.8	4.0	8.0	16.0
$\delta\omega_l = \delta\omega_u$	3.2293	6.4094	8.4041	12.0021	21.2146	42.5058
σ	0.3646	0.1837	0.1401	0.0981	0.0555	0.0277

$$\frac{H_{n+1}(\sqrt{2}\sigma\omega)}{H_{n-1}(\sqrt{2}\sigma\omega)} = 2n \quad (24)$$

일반적으로 n 차수 Hermite 함수는 양의 주파수 중에서 $(n+1)/2$ 개의 첨두값(peak)이 나타나지만(짝수 차수는 주파수 0에서 항상 첨두값이 존재), 중심주파수와 차수에 대한 일반식을 구할 수 없고, 12차까지 최대값을 갖는 중심주파수들은 표 5와 같다.

GD와 동일한 차수를 사용하여 해석하면 표 6와 같은 변수를 얻는다. 1차는 대역통과필터이고, 그 이상의 차수에서는 중심주파수에서 최대값을 나타내고 그 이하의 주파수에서 $(n-1)/2$ 개의 첨두값들이 존재하므로 대역통과 필터 특성을 갖지 않는다. 인간시각필터의 대역폭과 비교하면 GD보다 편차가 훨씬 심하다.

3. 정규화된 Gabor 복소함수

인간시각의 필터로 많이 거론되는 Gabor 복소함수는 Gaussian 함수가 복소지수함수에 의해서 변조된 것이다.

$$ga(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\pi}^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{j\omega_0 x} \quad (25)$$

Fourier 변환식은

$$GA(\omega) = \sqrt{2\sigma\pi}^{1/4} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2\sigma^2}{2}} \quad (26)$$

위치유효폭은 $(\Delta x)^2 = \frac{\sigma^2}{2}$ 이고, 주파수유효폭은

$(\Delta\omega)^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$ 로 주어지므로, 결합유효폭은

$$(\Delta x \Delta\omega) = \frac{1}{2} \quad (27)$$

결합유효폭은 σ 와 ω_0 에 무관하게 항상 불확실성원리에 의한 최소값을 만족한다. 중심주파수는 변조함수의 주파수와 동일한 $\omega_c = \omega_0$ 가 된다. 크기가 최대의 반이 되는 주파수 변위량은

$$\delta\omega_l = \delta\omega_u = \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sigma} \quad (28)$$

대역폭과 Gaussian 함수의 표준편차의 관계식은 식 (1)과 (28)을 이용하면 아래와 같다.

$$\sigma = \frac{\sqrt{2\ln 2} (2^{BW} + 1)}{\omega_c (2^{BW} - 1)} \quad (29)$$

중심주파수에 따라서 표준편차를 변화시키면 대역폭 변화가 가능하고, 인간시각필터의 중심주파수는 변조신호의 주파수로 쉽게 일치시킬 수 있다. 6개 필터의 중심주파수와 대역폭에 대한 Gabor 함수의 표준편차 (σ)는 표 7과 같다.

1) Gabor Cosine

Gabor 복소지수함수는 비록 결합유효폭의 최소값을 만족하지만 복소함수의 단점으로 GC가 일반적으로 영상처리와 컴퓨터시각 분야에 많이 사용된다.

$$g_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos(\omega_0 x) \quad (30)$$

$$GC(\omega) = \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2\sigma^2}{2}} + e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2\sigma^2}{2}} \right] \quad (31)$$

적분표^[17]를 참고하여 계산하면, 위치유효폭은 $(\Delta x)^2 = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{1 + (1 - 2\sigma^2\omega_0^2)e^{-\sigma^2\omega_0^2}}{1 + e^{-\sigma^2\omega_0^2}}$ 이고, 주파수유효폭은

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{1 + 2\sigma^2\omega_0^2 + e^{-\sigma^2\omega_0^2}}{1 + e^{-\sigma^2\omega_0^2}}$$

로 유도되어, 결합유효폭은

$$(\Delta x \Delta\omega)^2 = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{2\sigma^2\omega_0^2(1 - e^{-2\sigma^2\omega_0^2} - 2\sigma^2\omega_0^2 e^{-\sigma^2\omega_0^2})}{(1 + e^{-\sigma^2\omega_0^2})^2} \right] \quad (32)$$

중심주파수는 $\rho = \sigma\omega_0$ 일 때, 다음 식을 만족하는 ω 이다.

$$2\rho^2 \frac{\omega}{\omega_0} = \ln \frac{1 + \omega/\omega_0}{1 - \omega/\omega_0} \quad (33)$$

해석적인 방법으로 중심주파수를 구할 수 없으며, ρ 가 증가할수록 중심주파수는 ω_0 에 가까워진다. 여러 논문에서^[3-5] ω_0 를 중심주파수로 사용하고 있으나, 정확히 말하면 다르다. 특히 ω_0 와 σ 가 작을 경우는 많은 차이를 보인다. ρ^2 이 3보다 크면 $\omega_c \approx \omega_0$ 가 되며, 이때 GD 경우와 비교하면 $\rho^2 = n$ 이 된다. Gabor 복소함수와 비교하기 위해서 표 7에 나타난 ω_0 와 σ 를 사용하면 6가지 모두 ρ^2 이 3보다 크기 때문에 $\omega_c \approx \omega_0$ 가 된다.

2) Gabor Sine

Gabor 복소함수의 허수 부분에 해당하는 함수이다.

$$g_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \sin(\omega_0 x) \quad (34)$$

$$GS(\omega) = \frac{1}{2j} \left[e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2\sigma^2}{2}} - e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2\sigma^2}{2}} \right] \quad (35)$$

위치유효폭은 $(\Delta x)^2 = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{1 - (1 - 2\sigma^2\omega_0^2)e^{-\sigma^2\omega_0^2}}{1 - e^{-\sigma^2\omega_0^2}}$,

주파수유효폭 $(\Delta\omega)^2 = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{1 + 2\sigma^2\omega_0^2 - e^{-\sigma^2\omega_0^2}}{1 - e^{-\sigma^2\omega_0^2}}$ 로

계산되어, 결합유효폭은

$$(\Delta x \Delta\omega)^2 = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{2\sigma^2\omega_0^2(1 - e^{-2\sigma^2\omega_0^2} + 2\sigma^2\omega_0^2 e^{-\sigma^2\omega_0^2})}{(1 - e^{-\sigma^2\omega_0^2})^2} \right] \quad (36)$$

$\rho = 0$ 에서 GS의 결합유효폭은 $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\Delta x \Delta\omega) = 1.5$ 이다. 중심주파수는 $\rho = \sigma\omega_0$ 일 때, 다음 식을 만족하는 ω 이다.

$$2\rho^2 \frac{\omega}{\omega_0} = \ln \frac{\omega/\omega_0 + 1}{\omega/\omega_0 - 1} \quad (37)$$

GC 경우와 동일하게 해석적인 방법으로 구할 수 없고, ρ 가 증가할수록 중심주파수는 ω_0 에 가까워진다.

식 (32)과 (36)을 비교하면 두 결합유효폭은 $\rho = \sigma\omega_0$ 의 함수로만 나타나며, GC이 GS보다 전반적으로 우수하며, ρ 가 증가할수록 두 함수의 결합유효폭은 증가한다. ρ 가 3이상이면 GS과 GC의 결합유효폭이 거의 동일한 값을 갖는다.

IV. 비교 분석

1. 결합유효폭

결과적인 결합유효폭 식들을 비교하면, Gabor 복소함수는 이상적인 최소값인 0.5를 나타내고, GD와 HF는 미분차수 n 만의 함수로 주어지고, GS과 GC의 결합유효폭은 오직 $\rho = \sigma\omega_0$ 의 함수로 주어진다. 식 (8)과 (20)을 비교하면 미분차수가 0에 대해서 GD와 HF의 결합유효폭은 Gabor 복소함수와 동일한 최소값을 가지고, 차수가 1이면 결합유효폭이 1.5로 같고, 차수가 2 이상일 경우는 GD가 HF보다 우수한 성능을 보여준다.

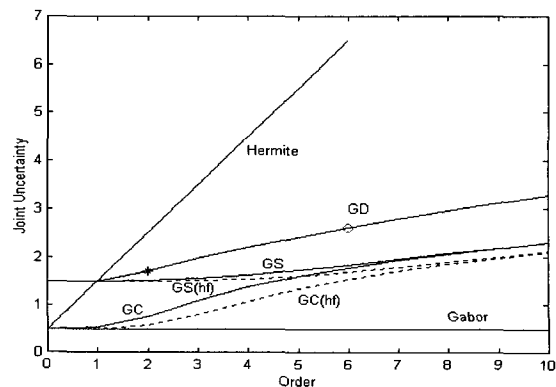


그림 1. 결합유효폭
Fig. 1. Joint effective width.

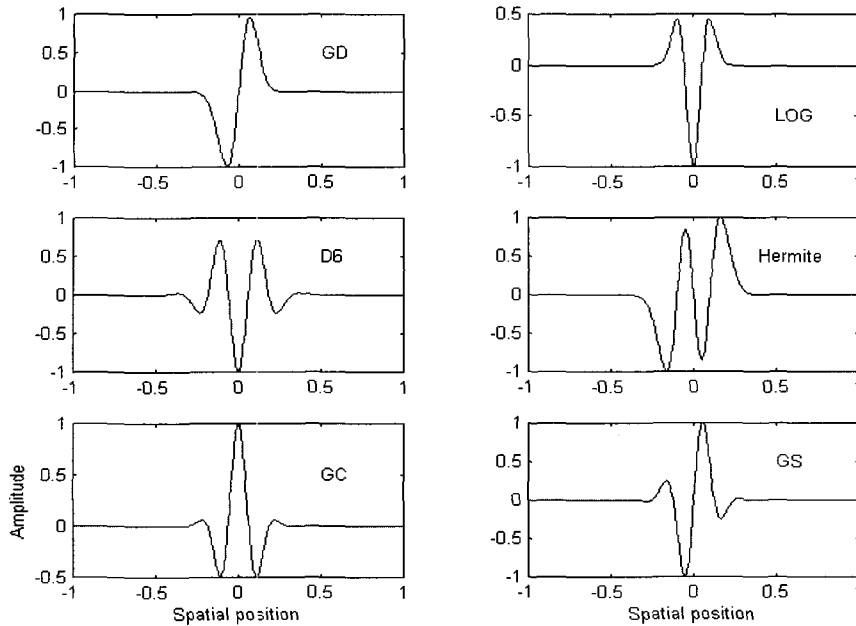


그림 2. 함수들의 공간영역 특성
 Fig. 2. Spatial-domain characteristic for the functions.

GD와 GC 또는 GS와 비교하기 위해서 중심주파수를 동일하게 선택하면 $\rho = \sqrt{n}$ 을 만족해야 한다. GD를 기준으로 차수 n 에 대한 결합유효폭의 결과가 그림 1에 보여준다. GS는 $\rho = 0$ 에서 1.5이며, $n = 0$ 에서 다른 모든 함수들은 최소값을 만족한다. 그림 1에서 Gabor로 표시된 Gabor 복소함수에 가장 가까운 실수 함수는 고려 대상 중에서 GC임을 알 수 있지만, 차수 8이상에서 GC와 GS는 거의 비슷한 성능을 보여준다. GD는 HF보다 좋지만 GC 또는 GS보다 큰 결합유효폭을 나타낸다. GD 경우에서 차수가 2인 LOG 그리고 6인 D6이 그림에서 각각 *와 o로 표시되어 있다.

$\rho = \sigma\omega_0$ 를 Hermite 함수와 동일하게 선택하여 계산한 GC와 GS의 결합유효폭은 동일한 그림에서 점선으로 각각 GS(hf)와 GC(hf)로 나타나 있다. HF의 중심주파수를 10차까지 계산하여 GC와 GS에 대입하여 얻은 결과이며, 전반적인 경향은 비슷하지만 GD를 기준한 것과 비교하면 Hermite를 기준한 것이 결합유효폭이 다소 작은 값을 보여준다.

GD, HF, Gabor 복소함수는 중심주파수와 대역폭 둘 다 변화 가능하며, LOG와 D6은 대역폭이 고정이다. 중심주파수를 인간시각 필터의 것과 일치시키고 대역폭을 비교하면, Gabor 복소함수는 완전히 인간시각체계의

필터와 동일하게 할 수 있으며, GC와 GS도 비슷한 대역폭을 가지게 할 수 있다. GD는 차수의 자연수 조건에 기인하여 대역폭이 인간시각필터와 차이가 발생하며, LOG와 D6은 중심주파수의 변화에 무관하게 각각 하나의 대역폭을 갖는다. HF의 대역폭은 GD보다 편차가 심하다. 결합유효폭으로 성능을 비교하면 Gabor 복소, GC, GS, GD, HF 순서이다.

2. 공간과 주파수 특성

앞에서 언급한 여러 함수들의 공간적인 특성을 6개의 필터 중, 감도가 가장 좋은 4번째 중심 주파수(4 cpd)에서 정규화하여 나타낸 결과가 그림 2에 있다. LOG, D6, GC는 우함수이며, GD, HF, GS는 기함수 형태이다. 인간시각의 수용영역은 중심부분과 주변부분이 서로 반대로 반응하는 특성(antagonistic surround)이 존재하므로 우함수가 더 바람직하다^[15,18]. Gabor 복소함수의 실수부분은 GC로, 허수부분은 GS로 고려하면 되기 때문에 별도로 나타내지 않았다.

주파수 응답곡선의 특성을 파악하기 위하여, 각 함수에 대해서 표 1에 나타난 6개의 중심주파수로 각각의 응답곡선을 계산하고, 최대감도를 가중치로 각 필터에 적용하고, 6개 필터를 합하여 정규화 과정을 수행한 후, 전체 응답곡선을 획득하였다.

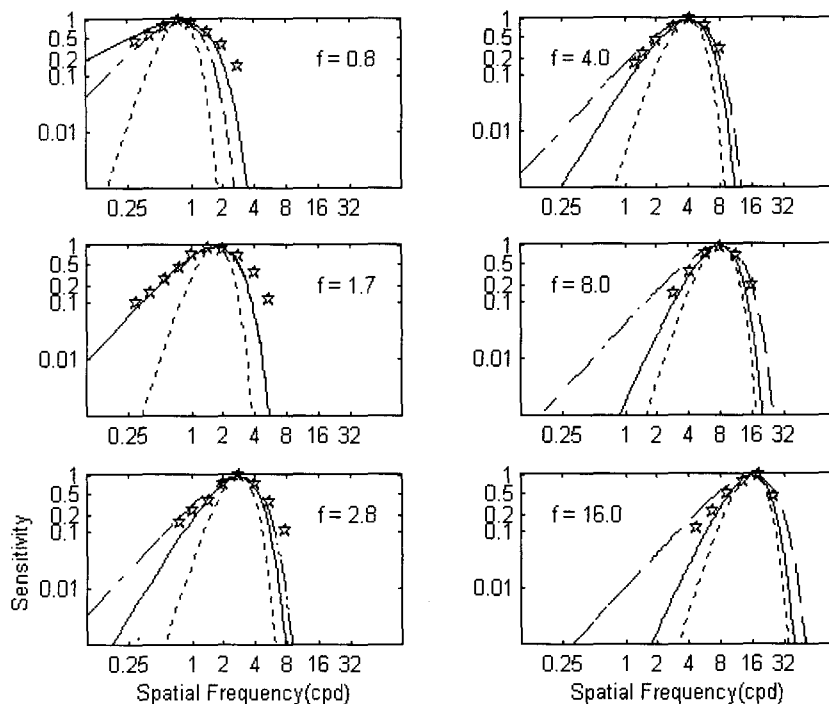


그림 3. Gaussian 미분 계열의 주파수 응답(solid line: GD, dashed line: LOG, dotted line: D6)
 Fig. 3. Frequency sensitivity for Gaussian derivatives.

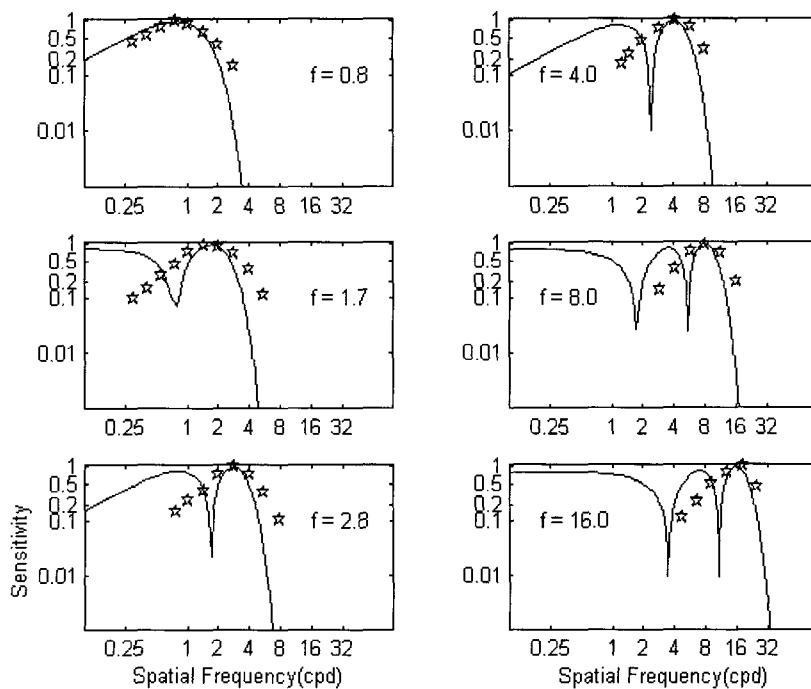


그림 4. Hermite 함수의 주파수 응답
 Fig. 4. Frequency sensitivity for Hermite functions.

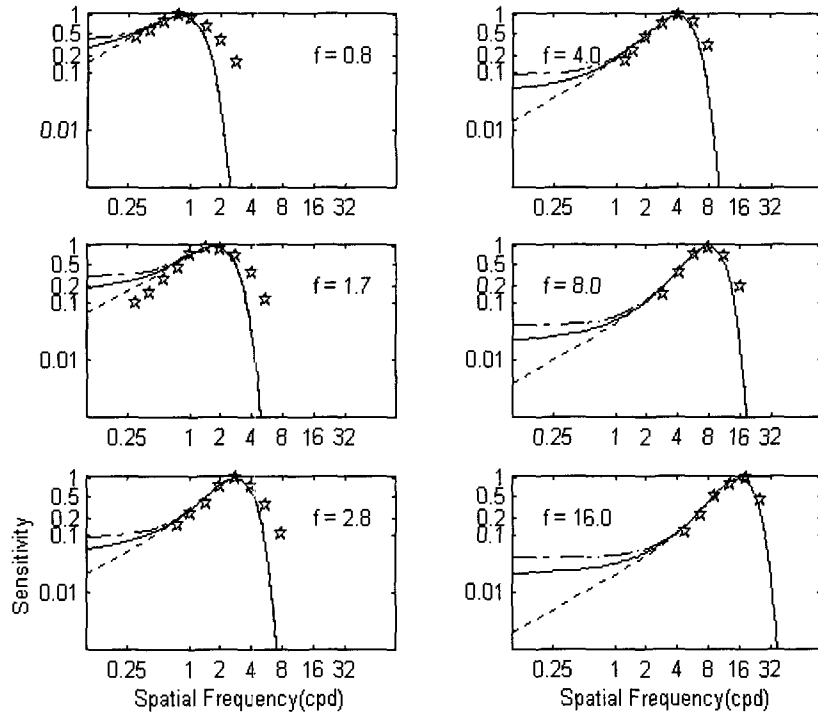


그림 5. Gabor 계열의 주파수 응답(solid line: Gabor complex, dashed line: GC, dotted line: GS)

Fig. 5. Frequency sensitivity for Gabor functions.

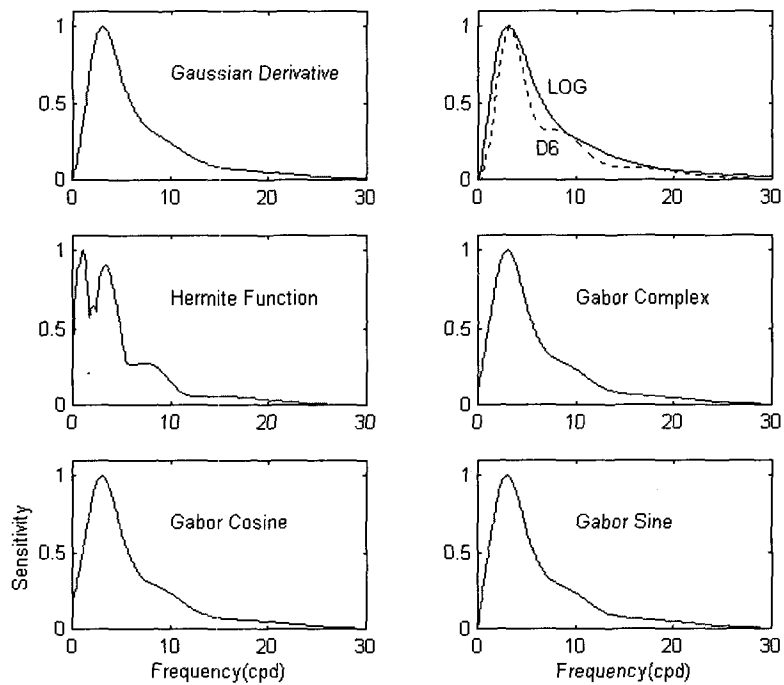


그림 6. 6개 필터를 통합한 주파수 응답

Fig. 6. Overall frequency sensitivity for six filters.

표 8. 실험 data와 모델의 평균자승오차

Table 8. Mean-squared error between experimental data and models.

Models	Gaussian Derivative	LOG	D6	Hermite	Gabor Complex	Gabor Cosine	Gabor Sine
MSE	0.0128	0.0153	0.0683	0.2924	0.0212	0.0230	0.0198

앞 표들에서 산출된 변수 값들을 근거로 그림 3은 GD 계열, 그림 4는 HF, 그림 5는 Gabor 계열의 주파수 응답 특성을 나타낸다. Wilson^[14]이 실험적으로 구한 45개의 주파수에 대한 인간시각필터의 감도를 그림에 별표로 표시하였다. 그림 3에서 중심주파수가 1.7cpd인 경우, LOG는 GD와 특성이 동일하다. GD의 경우에 중심주파수가 증가할수록 대역폭이 감소하나, LOG와 D6에서는 모두 동일한 대역폭을 가짐을 알 수 있다. GD 계열에서는 GD가 실험 데이터와 유사하여 가장 우수한 주파수 감도를 나타낸다. 그림 4의 HF는 거의 모든 필터가 저주파 성분을 강조하고, 여러 첨두 값을 가지며, 인간시각필터의 전반적인 특성과 상당한 차이점을 보여준다. 그림 5의 Gabor 계열은 모든 필터가 HF보다는 작지만 약간의 저주파 성분에 반응을 하고 있음을 볼 수 있다. 표 8은 실험적인 데이터와 수학적 모델 사이의 평균자승오차를 보여주며, GD가 가장 작은 오차를 갖는다. 그러므로 GD가 인간시각의 주파수 응답과 가장 유사한 함수임을 알 수 있다.

그림 6은 6개 필터를 통합하여 주파수에 대한 전체 응답을 나타낸 것으로, 우측상단의 그림에서 실선은 LOG, 점선은 D6의 주파수 응답이다. 직류 성분에 대한 감도를 비교하면 모든 GD 계열은 응답이 0이며, Gabor 계열은 기함수인 GS의 직류성분이 0이다. 직류성분을 갖는 함수 중에서 크기가 큰 순서로 나열하면 HF, GC, Gabor 복소함수이다. Gabor 계열 함수들은 직류성분에서 차이점을 제외하면 전반적으로 서로 유사한 특성을 보여준다. 인간시각의 단순세포는 균일한 밝기에 반응을 나타내지 않는다^[18,19]. 그러므로 직류성분의 응답면에서 GD 계열이 가장 좋은 성능을 나타낸다. GC의 직류성분은 Nill의 수학적 인간시각의 모델과 직류성분이 거의 동일하나, Nill^[20]과 Manno^[21]의 인간시각필터에 대한 수학적 모델의 주파수 응답은 5.11 cpd와 8 cpd에서 각각 최대값을 가지므로 고주파가 매우 강조되어 표 1의 실험 데이터와 상당히 차이가 있다. 이것은 GD를 사용하면 기준된 인간시각 주파수 모델을 수정할 수 있음을 알 수 있다.

V. 결 론

시간과 주파수 영역에서 분해능의 척도로써 결합유효폭을 GD, Hermite, Gabor 계열에 대해서 계산하고, 실험적으로 얻어진 인간시각의 6개 필터에 대한 중심주파수와 대역폭과의 일치성을 살펴보았다. 아울러 6개 필터를 통합한 주파수 응답곡선을 각 함수에 대해서 비교하였다. 이상적인 필터는 작은 결합유효폭을 가지면서 동시에 인간시각 필터와 동일한 6개의 중심주파수와 대역폭을 갖는 함수이다.

결합유효폭의 관점에서 성능을 비교하면 Gabor 복소함수, GC, GS, GD, HF 순서이다. LOG와 D6을 제외한 모든 함수는 중심주파수와 대역폭 둘 다 변화 가능하지만, 특히 GD, HF, Gabor 복소함수들이 인간시각필터의 대역폭과 쉽게 일치시킬 수 있는 함수이다. 정신물리적으로 획득한 감도에 대한 데이터와 수학적 모델과의 평균자승오차는 GD가 가장 우수하며, 직류성분에 대한 무반응 측면에서도 GD 계열이 좋다. 결론적으로 정의된 결합유효폭에 대해서는 Gabor 복소함수의 성능이 가장 좋고 그 다음 GC이며, 6개의 인간시각필터에 대해서는 GD가 가장 유사한 특성을 나타내어 Young이 주장한 시각세포의 수용영역을 GD 함수로 모델링할 수 있음을 확인하였다.

인간시각필터는 우선 우리 자신의 시각작용 이해에 큰 역할을 할뿐만 아니라, 디지털 영상처리와 컴퓨터 시각에서 영상의 최종 사용자가 인간인 경우에 전처리 과정의 필터로 사용될 수 있다. 응용분야로는 JPEG에서 DCT 변환 계수에 대한 양자화 간격을 결정하기 위해서 인간의 주파수 응답특성을 사용하고 있고, JPEG의 DCT보다 블록화 현상을 현저히 감소시키기 위하여 GD를 사용할 수 있다. 표준 영상에서 많이 사용되는 8x8 크기에 적합하도록 8개의 GD 기저함수를 사용하였지만^[13], 6개 인간시각 필터의 확실한 증거가 있으면 중심주파수와 대역폭을 인간시각필터에 일치시킨 6개의 기저함수 만으로 영상압축과 영상처리에 적용할 수

있다. 그리고 스테레오 시각에서 양안 변위 추출을 위해서 작은 결합유효폭을 갖는 함수를 사용할 수 있으며^[3], 평균자승오차가 가장 적은 GD를 사용하여 인간 시각의 전체 주파수 응답곡선의 모델링을 개선할 수도 있으며^[20,21], 3차원 물체 인식의 전처리 필터로도 사용될 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] T. D. Sanger, "Stereo disparity computation using Gabor filters," *Biological Cybernetics*, Vol. 59, pp. 405-418, 1988.
- [2] D. G. Stork and H. R. Wilson, "Do Gabor functions provide appropriate descriptions of visual cortical receptive fields?" *Journal of Optical Society of America*, Vol. 7, No. 8, pp. 1362-1373, Aug. 1990.
- [3] N. Qian and Y. Zhu, "Physiological computation of binocular disparity," *Vision Research*, 37, No. 13, pp. 1811-1827, 1997.
- [4] J. Jones and L. Palmer, "An evaluation of the two-dimensional Gabor filter model of simple receptive fields in cat striate cortex," *Journal of Neurophysiology*, Vol. 58, No. 6, pp. 1233-1258, Dec. 1987.
- [5] S. J. Prince and R. A. Eagle, "Stereo correspondence in one-dimensional Gabor stimuli," *Vision Research*, 40, pp. 913-924, 2000.
- [6] R. A. Young, "Simulation of human retinal function with the Gaussian derivative model," *Int'l Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 564-569, 1986.
- [7] A. P. Morgan, L. T. Watson and R. A. Young, "A Gaussian derivative based version of JPEG for image compression and decompression," *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 7, No. 9, pp. 1311-1320, Sept. 1998.
- [8] D. Marr and E. Hildreth, "Theory of edge detection," *Proc. of the Royal Society of London, Series B*, Vol. 207, pp. 187-217, 1980.
- [9] David Regan, *Vision and Visual Dysfunction* Volume 10, *Spatial Vision*, CRC Press, pp. 66-67, 1991.
- [10] C. Yu and D. M. Levi, "Spatial-frequency and orientation tuning in psychophysical end stopping," *Visual Neuroscience*, Vol. 15, No. 14, pp. 585-595, 1998.
- [11] S. A. Klein and B. Beutter, "Minimizing and maximizing the joint space-spatial frequency uncertainty of Gabor-like functions," *Journal of Optical Society of America A*, Vol. 9, pp. 337-340, 1992.
- [12] J. A. Bloom and T. R. Reed, "An uncertainty analysis of some real functions for image processing applications," *Int'l Conf. on Image Processing*, pp. 670-673, 1997.
- [13] J. A. Bloom and T. R. Reed, "On the compression of still images using the derivative of Gaussian transform," *Int'l Conf. on Image Processing*, Vol. 3, pp. 433-437, 1998.
- [14] H. R. Wilson, D. K. McFarlane and G. C. Phillips, "Spatial frequency tuning of orientation selective units estimated by oblique masking," *Vision Research*, 23, pp. 873-882, 1983.
- [15] I. P. Howard and B. J. Rogers, *Binocular Vision and Stereopsis*, Oxford Psychology Series No. 29, Oxford Press, 1995.
- [16] F. W. Campbell and J. G. Robson, "Application of Fourier analysis to the visibility of gratings," *Journal of Physiology*, 197, 551-566, 1968.
- [17] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 1965.
- [18] M. W. Matlin and H. J. Foley, *Sensation and Perception*, Allyn and Bacon, 1992.
- [19] J. J. Kulikowski, S. Marcelja and P. O. Bishop, "Theory of spatial position and spatial frequency relations in the receptive fields of simple cells in the visual cortex," *Biological Cybernetics*, Vol. 43, pp.187-198, 1982.
- [20] N. B. Nill, "A visual model weighted cosine transform for image compression and quality

- assessment," *IEEE Trans. on Communications*,
COM-33, No. 6, pp. 551-557, June 1985.
- [21] J. L. Mannos and D. J. Sakrison, "The effects
of a visual fidelity criterion on the encoding of
images," *IEEE Trans. on Information Theory*,
Vol. IT-20, No. 4, pp.525-536, July 1974.

저 자 소 개

李 迪 植(正會員) 第 33 卷 B 編 第 10 號 參照
현재 경기대학교 전자기계공학부 부교수