

확률적 가진입력을 받는 건축구조물의 최대응답 제한을 위한 선형이차안정기의 최적설계

Optimal Design of Linear Quadratic Regulator to Restrict Maximum Responses of Building Structures Subject to Stochastic Excitation

박지훈* 황재승** 민경원***
Park, Ji Hun Hwang, Jae Seung Min, Kyung Won

국문요약

본 연구에서는 부분적으로 정상상태 확률과정으로 모델링할 수 있는 가진입력에 대하여 확률적으로 정의된 구조물의 최대응답에 대한 구속조건을 만족시키면서 제어력을 최소화 할 수 있는 최적설계 방법을 제안한다. 최적화 과정에서 안정성의 확보를 위해 제어기를 전상태 피드백 LQR제어기의 형태로 한정하였으며 가중치 행렬을 설계변수로 하고 Riccati 행렬을 매개변수로 하여 목적함수와 구속조건 함수 및 그 기울기를 계산한다. 제안된 방법을 통해 설계된 전상태 피드백 LQR제어기는 목표 응답성능을 만족시킬 수 있었고 이에 필요한 최대 제어력을 확률적으로 정량화하여 제어장치의 제작에 유용한 자료가 될 수 있도록 하였다. 상태변수 추정을 위해 독립적으로 설계된 Kalman 필터와 최적화된 LQR 제어기가 결합된 LQG 제어기 및 그 차수를 축소시킨 제어기는 모두 큰 성능의 저하가 없었으며 따라서 제안된 설계방법을 이용하여 구조물의 최대응답에 관한 구속조건을 만족시키는 출력 피드백 제어기 설계가 충분히 가능함을 확인하였다.

주요어 : 확률과정, 교차율, 위험률, 최적설계, 선형2차안정기, Kalman 필터

ABSTRACT

In this research, a controller design method based on optimization is proposed that can satisfy constraints on maximum responses of building structures subject to ground excitation modeled by partially stationary stochastic process. The class of controllers to be optimized is restricted to LQR. Weighting matrix on controlled outputs is used as design variable. Objective function, constraint functions and their gradients are computed by the parameterization of control gain with Riccati matrix. Full state feedback controllers designed by proposed optimization method satisfy various design objectives and their necessary maximum control forces are computed for the production of actuator. LQG controllers composed of Kalman filter and LQR designed by proposed method perform well with little deterioration. So, it is possible to design output feedback controllers satisfying constraints on various maximum responses of structures.

Key words : stochastic process, crossing rate, failure probability, optimization, linear quadratic regulator, Kalman filter

1. 서 론

바람, 지진과 같은 외부하중을 받는 구조물의 진동을 제어하기 위하여 많은 제진장치들이 고안, 적용되고 있다. 이들 제진장치 중에 TMD는 건물의 1차모드에 동조된 부가 질량체를 설치하여 그 역학적 거동에 의해 발생하는 제어력을 이용하여 구조물의 진동을 제어하게 된다. 만약 TMD에 의해서 충분한 제어효과를 얻을 수 없는 경우에는 동력기를 사용하여 인공적으로 제어력을 발생시키는 AMD를 사용하기도 하나 일반적으로는 제진장치의 안정성과 효율성을 고려하여 평상시에는 TMD로 사용되다가 구조물의 응답이 커질 경우에는 능동제어로 전환되는 HMD가 일반적으로 많이 사용되며 국내에서도 최근에 인천국제공항 관제탑에 설치된 사례가 있다.⁽¹⁾ 이와 같은 능동제어기를 설계함에 있어서 문제가 되는 것 가운데 한가지는 제어 효과의 정량화이다. 지지하다시피 지진, 바람 등의 동적 하중은 그 크기와 형상을

미리 알 수 없기 때문에 확률적으로만 정의가 가능하다. 따라서 확률적으로 정의된 동적 하중에 대한 응답 역시 확률적으로만 정의된다.

확률적으로 정의되는 구조물의 동적 응답 가운데 일반적으로 많이 사용되는 것은 응답의 표준편차이다. 이는 백색 잡음 가진에 대한 선형시스템의 응답 표준편차에 대한 정해가 알려져 있으며 하나의 Lyapunov 방정식을 풀어서 쉽게 구할 수 있고 다수의 가진 입력은 백색 잡음 혹은 필터통과 백색잡음으로 비교적 정확하게 모델링이 가능하기 때문이다.⁽²⁾ 또한 일반적으로 널리 사용되는 제어 알고리즘인 LQR, LQG 제어 알고리즘은 구조물의 H_2 노음을 최소화하는 것으로서 H_2 노음은 백색잡음 가진 입력에 대한 응답의 표준편차라는 이유도 있다.

그러나 실제 구조물의 진동제어에 있어서 중요한 것은 응답의 최대치를 제한하는 것이라고 할 수 있다. 그러나 응답의 최대치에 대한 확률분포식은 근사해만이 알려져 있으며 이를 넘어서는 제어알고리즘이 개발되어 있지 않은 상태이다. 현재의 제어기 설계 관행은 학계에 발표된 논문들을 볼 때에 일반적으로 설계된 제어기에 대해서 몇 개의 표본 가진 입력에 대한 시뮬레이션을 통해 최대 응답을 계산해

* 서울대학교 건축학과, 박사과정(대표저자 : vibcont@snu.ac.kr)

** 현대건설기술연구소, 선임연구원

*** 단국대학교 건축공학과, 부교수

본 논문에 대한 토의를 2002년 2월 28일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.
(논문접수일 : 2001. 9. 17 / 심사종료일 : 2001. 10. 11)

보고 만족스럽지 않으면 재설계하는 시행착오법이 주류를 이루고 있다. 그러나 이와 같은 방법은 표본의 수가 많아질수록 신뢰도가 높아지는데 반해 그럴수록 설계에 드는 시간과 노력이 커진다. 또한 시행착오법에 의해서 복수의 제어대상 응답(변위, 절대가속도)과 제한조건들(질량체의 스트로크, 최대 제어력 등)을 만족시키는 데는 많은 어려움이 있으며 항상 그보다 더 나은 최적해의 존재 가능성이 있게 마련이다. 본 연구에서는 이와 같은 제어기 설계방법에 대한 대안으로서 최적화과정을 통해 구조물의 최대응답을 임계치 이하로 제한하면서 제어력을 최소화할 수 있는 설계방법을 제안한다.

기존 연구를 살펴 보면, 확률과정인 가진입력에 대한 구조물의 최대응답이 임계치를 초과할 확률을 목적함수로 사용하여 제어기를 설계하는 방법을 제시한 연구로는 Spencer의 연구와 May의 연구가 있었다. Spencer의 연구는 단자유도 진동계를 대상으로 구조물 파라미터의 불확실성을 종합적으로 고려한 전상대변수 피드백 제어기의 설계방법을 제시하였다.⁽³⁾ 이 연구에서는 목적함수를 구조물 응답이 임계치를 초과할 확률로 잡고 제어력의 RMS값을 구속조건으로 두었다. May는 3층 전단 구조물을 대상으로 구조물의 파라미터는 상대적으로 정확하다고 가정하고 지반가속도 모델의 파라미터 불확실성을 고려하여 가속도 출력 피드백 제어기의 최적설계 방법을 제안하였다.⁽⁴⁾ 이 연구에서는 구속조건을 두지 않고 응답과 제어력의 임계치 초과를 모두 포함한 위험률을 목적함수로 두었다.

그러나 실제로는 각 응답의 최대치에 대해서 임계치를 초과할 확률이 특정치 이하가 되도록 구속조건을 둘 필요가 있으며 이와 같은 목적을 달성할 수 있는 최소의 제어기를 구하는 것이 합리적이라고 할 수 있다. 하지만 제어력을 최소화 하는 것과 응답의 구속조건을 만족시키는 것은 서로 상반되는 것이며, 최적화 과정에서 해를 찾아가는 도중에 제어이득이 불안정한 영역으로 넘어갈 수가 있다. 이 경우에 불안정한 페루프 시스템은 응답이 발산하기 때문에 그 확률 분포 자체를 구할 수 없어서 최적화과정을 계속 수행할 수 없게 된다. Spencer의 연구에서는 단자유도 구조물을 대상으로 하였으므로 안정성에 관한 구속조건은 변위 및 속도 피드백 이득을 모두 양수로 제한하는 조건이 된다. 그러나 다자유도 구조물을 대상으로 하는 경우에는 안정성 구속조건을 추가하는 것이 쉽지 않다. 하지만 May의 연구에서는 이에 대한 논의가 없었다. 본 연구에서는 다자유도 구조물을 대상으로 하는 제어기를 안정한 제어기로 제한하기 위해서 LQR 형태의 제어기를 사용한다. 이 경우에 제어이득은 응답변수에 대한 가중치행렬에 의해서 결정되기 때문에 최적화 변수를 LQR 목적함수의 가중치 행렬로 설정하였다. 따라서 본 연구에서 제안하는 최적화 과정은 LQR 가중치 행렬 선정에 대한 일정한 기준이 없는 상황에서 시행착오법의 대안이 될 수 있을 것이다.

연구범위는 대상구조물이 선형탄성의 범위 안에 있다고 가정하였고, 구조물과 동력기, 지반가속도 필터의 파라미터

불확실성은 고려하지 않았으며 이는 본 연구에서 제시한 방법론을 확장시켜 추후 연구에서 다루도록 한다.

2. 가진입력 설정

가진입력은 지반가속도로서 Kanai-Tagimi 필터를 사용하여 진동수 성분을 모델링하며 필터의 입력은 다음과 같은 백색잡음을 사용한다.

$$E[w(t)w(t+\tau)] = 2\pi S_w \delta(\tau) \quad (1)$$

필터의 고유진동수와 감쇠비는 지반의 성질에 따라서 틀러 지는데 Kanai는 단단한 지반에 대해서 필터의 고유진동수는 15.6rad, 감쇠비는 60%를 사용할 것을 제안하였다.⁽⁵⁾ Spencer와 주석준은 관련 자료가 부족한 경우에는 저주파수 통과 필터(low pass filter)를 사용할 것을 제시하였다.^(6,7) 일반적으로 지반가속도는 비정상적 확률과정이므로 인공지진 생성시 이를 모델링하기 위해 필터의 입력으로서 정상적 백색잡음에 적절한 외피함수(envelope function)가 곱해진 비정상적 확률과정을 사용한다. 여러 기존 연구에서 다양한 외피함수가 제안되었으며 본 연구에서는 정상적 확률과정의 임계치 초과 확률을 제어효과의 지표로 사용하기 때문에 P. C. Jennings가 제안한 다음 식을 사용한다.⁽⁵⁾

$$f_{env}(t) = \begin{cases} (t/t_1)^2 & (t < t_1) \\ 1 & (t_1 \leq t \leq t_2) \\ e^{-c(t-t_2)} & (t > t_2) \end{cases} \quad (2)$$

위의 외피함수를 사용하면 가진입력이 부분적으로 시간 t_1 과 t_2 사이에서 정상상태 확률과정이라고 가정할 수 있게 된다. 필터의 입력이 되는 백색잡음의 PSD(power spectral density)의 크기는 지진의 강도와 관계되며 본 연구에서는 편의상 최대가속도의 평균치를 기준으로 정하였다. 백색잡음의 외피함수 식 (2)에서 $t_1=10\text{sec}$, $t_2=30\text{sec}$, $c=0.15$ 으로 설정하고 $S_w=1\text{m}^2/\text{sec}^3$ 인 경우에 1000회의 시뮬레이션을 통해 얻은 평균 최대가속도는 $34.7588\text{m}/\text{sec}^2$ 이었으며 스케일링을 통해 원하는 평균 최대 가속도를 얻을 수 있다. 그림 1은 최대 가속도 1g인 표본이다.

가진입력의 비정상성(nonstationarity)과 결과적인 응답의 비정상성을 좀더 정확하게 모델링하고자 한다면 점진적 스펙트럼 밀도(evolutionary spectral density)를 사용할 수 있다.

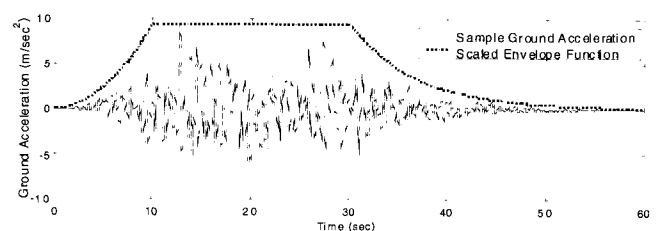


그림 1 지반가속도 표본의 시간이력과 백색잡음 외피함수

이때 응답의 스펙트럼 밀도는 가진입력의 스펙트럼 밀도와 외피함수, 구조물의 충격응답함수(impulse response function)에 의해 정의 되는 점진적 스펙트럼 밀도가 되며 이로부터 시간의 변화에 따른 확률밀도함수의 변화를 추정할 수 있다.⁽⁸⁾

3. 구조물 최대응답의 확률적 정량화

확률과정으로 표현되는 가진입력에 대한 구조물의 최대 응답을 정의하는 방법으로서 최대응답의 평균치를 사용하게 되면 실제 최대응답이 평균 최대응답을 넘을 확률은 50%이기 때문에 위험한 설계가 될 수 있다. 따라서 안전성과 경제성을 고려하여 최대응답이 임계치를 넘을 확률을 지정할 수 있다면 보다 합리적인 설계가 될 수 있다.

확률과정 X가 단위시간동안 임계치 u를 초과하는 횟수의 기대값을 교차율(crossing rate)이라고 한다. 확률과정 X가 가우스(Gauss) 확률분포를 가지는 정상적 확률과정이라면 다음과 같은 교차율의 식을 유도할 수 있다.⁽⁹⁾

$$v_{|x|}^+(u) = \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\pi\sigma_x} \exp\left(\frac{-u^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (3)$$

가우스 확률분포를 갖는 가진입력에 대한 선형시스템의 응답의 확률분포는 역시 가우스 확률 분포를 가진다. 본 연구에서는 가진입력이 부분적으로 정상상태인 가우스 확률과정이며 구조물은 탄성영역에 있다고 가정하고 선형제어기를 설계하는 것으로 범위를 제한하므로 응답 역시 부분적으로 정상상태 확률과정이라고 가정하고 식 (3)을 사용한다.

확률과정 X가 시간 0부터 t_s 사이에 임계치 u를 초과할 확률을 최대치의 위험률이라고 정의하며 정해가 알려져 있지 않기 때문에 다음과 같은 근사식을 사용한다.⁽⁹⁾

$$P_s(u, t_s) = 1 - \exp[-v_{|x|}^+(u)t_s] \quad (4)$$

여기서 X의 절대값이 u를 교차하는 사건을 발생 시간 간격이 서로 독립적인 Poisson 셈 과정(counting process)이라고 가정하였으며, 정상적 확률과정일 경우에 교차율은 시간과 무관하게 일정하다고 가정된 것이다. 또한 초기에 임계치를 넘지 않을 확률은 1로 가정되었다. t_s 는 식 (2)의 t_2-t_1 을 사용한다.

4. 설계대상 플랜트의 상태방정식

설계대상 플랜트(plant)는 구조물과 동력기 및 지반가속도 입력 필터로 구성된다. 먼저 n개의 자유도를 가지는 구조물에 1개의 TMD가 추가된 경우의 구조물 상태방정식은 다음과 같으며 여기서 상태변수는 n+1개의 상대변위와 n+1개의 상대속도, 입력변수는 지반가속도와 제어력이며 제어대상 출력변수는 n개의 건물 층간변위와 n개의 건물 층 절대

가속도 및 1개의 TMD 질량체 스트로크이다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_{s1} f + \mathbf{B}_{s2} u \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{L}_e \end{bmatrix} f + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}_a \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_s &= \mathbf{C}_{s1} \mathbf{x}_s + \mathbf{D}_{s11} f + \mathbf{D}_{s12} u \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_{ab} \\ \mathbf{q}_{a,TMD} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n \times (n+1)} & \mathbf{0}_{n \times (n+1)} \\ \mathbf{0}_{n \times (n+1)} & \mathbf{I}_{n \times (n+1)} \\ [\mathbf{0}_{1 \times n} \ 1] & \mathbf{0}_{1 \times (n+1)} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}_a \end{bmatrix} u \right) \end{aligned} \quad (6)$$

동력기의 동적 특성 역시 상태방정식으로 모델링 될 수 있다. Yang의 연구에서는 유압식 동력기를 1차의 저주파수 통과필터로 모델링하였으며⁽¹⁰⁾, 주석준의 연구에서는 서보모터를 시스템 식별을 통해 2차의 상태방정식 형태로 구하였다.⁽¹¹⁾ 본 연구에서는 유압식 동력기를 사용하여 Yang의 연구에서와 같이 Laplace 영역에서 다음 식 (7)로 표현할 수 있다고 가정하였으며 상태방정식 구현은 식 (8), (9)와 같다.

$$u(s) = \frac{\alpha_a \omega_a}{s + \omega_a} v(s) \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_a v \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}}_a = [-\omega_a] \mathbf{x}_a + [\omega_a] v \quad (8)$$

$$u = \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{D}_a v = [\alpha_a] \mathbf{x}_a + [0] v \quad (9)$$

가진입력 필터의 상태방정식은 Kanai-Tagimi 필터의 상태방정식 구현을 사용한다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_f &= \mathbf{A}_f \mathbf{x}_f + \mathbf{B}_f w \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_f \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_g^2 & -2\xi_g \omega_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_f \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} w \end{aligned} \quad (10)$$

$$f = \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f \Leftrightarrow f = [-\omega_g^2 \quad -2\xi_g \omega_g] \begin{bmatrix} q_f \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} \quad (11)$$

위의 상태방정식을 모두 통합한 전체 설계 대상 플랜트의 상태방정식은 다음과 같으며 2n+5개의 상태변수, 1개의 플랜트 외란, 1개의 제어입력변수와 2n+3개의 제어대상 출력변수로 이루어져 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 w + \mathbf{B}_2 v \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_s \\ \dot{\mathbf{x}}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_{s2} \mathbf{C}_a & \mathbf{B}_{s1} \mathbf{C}_f \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_f \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{s2} \mathbf{D}_a \\ \mathbf{B}_a \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} v \end{aligned} \quad (12)$$

$$z = C_1 x + D_{12} v$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_s \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{s1} & D_{s12} C_a & 0 \\ 0 & C_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_a \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{s12} D_a \\ D_a \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (12)$$

5. 제어 알고리즘의 선택

제어 알고리즘에는 크게 상태변수를 이용하는 상태피드백 제어와 측정변수를 이용하는 출력피드백 제어가 있다. 전자의 경우에는 플랜트의 상태를 완전히 기술할 수 있는 정보를 이용하지만 후자의 경우 제한된 정보만을 이용하기 때문에 일반적으로 전자의 제어효과가 더 우수하다고 할 수 있으나 모든 상태변수를 측정하기 어려운 경우에 출력변수로부터 상태변수를 추정하는 관측기가 사용된다. 이때 분리법칙(separation principle)에 의해 상태변수 피드백 제어기와 관측기는 독립적으로 설계될 수 있음이 알려져 있다.⁽¹²⁾ 본 연구에서는 관측기에 의한 상태변수 추정 오차가 미치는 악영향이 충분히 작다는 가정하에 최적의 상태변수 피드백 제어이득을 구한다. 관측기에 의한 상태변수 추정 오차의 영향이 크지 않다는 것은 7장에서 기술할 해석예제에서 충분히 검증된다.

이때 최적화 변수를 제어 이득으로 하는 최적화 알고리즘을 통해 직접적으로 제어이득을 구하는 방법을 사용할 수도 있으나^{(3),(4)} 이 방법의 단점은 최적화 과정에서 안정성이 깨지는 문제가 발생하며 이 경우에는 상태변수가 발산하므로 식 (3)에서 응답의 교차율을 구하는데 필요한 응답 및 그 변화율의 표준편차를 구하는 것이 불가능하게 되므로 안정성 구속조건을 추가시켜 줘야 하나 다자유도계 구조물의 경우에는 제어이득에 의한 명확한 구속조건의 표현이 어렵다는 단점이 있다. 또한 최적화 변수가 안정성 구속조건식이 활성화되는 값을 가지게 되면 플랜트의 고유치 가운데 실수부가 0이 되는 것이 생기므로 역시 구속조건의 계산에 필요한 Lyapunov 방정식의 해를 구할 수 없게 된다.⁽¹²⁾ 따라서 본 연구에서는 이와 같은 문제를 해결하기 위해 안정성이 뛰어난 LQR 제어알고리즘을 통해 간접적으로 안정성 문제를 해결한다.

LQR제어 알고리즘에서 제어이득을 결정하는 것은 Riccati 방정식의 해인 Riccati 행렬이며 이 방정식을 결정 짓는 것은 LQR 목적함수의 가중치 행렬이다. 따라서 제어이득을 직접적으로 최적화 변수로 택하는 대신에 LQR 목적함수의 가중치 행렬을 최적화 변수로 사용하고 Riccati 행렬을 이용해서 제어이득을 매개변수화 함으로써 LQR제어기의 범위 안에서 최대응답의 위험률을 최적화하되 제어력은 최소화할 수 있는 제어이득을 구한다. 이 방법은 제어이득의 범위를 한정하므로 위험률을 제한하는 제어이득의 전체 범위에서는 최적이라고 할 수 없다는 단점이 있으나 LQR 제어 알고리즘이 충분히 검증된 제어방식이므로 충분한 성능과 안정성을 보장할 수 있다고 본다.

LQR제어기는 그 자체로서 최적제어기이다. 그러나 여기서 최적이라고 함은 주어진 2차의 목적함수에 대해서 최적이기 때문에 여러 구조물의 응답, 질량체의 스트로크, 제어력, 제어신호가운데 어느 것에 큰 비중을 둔 목적함수를 사용하느냐에 따라서 상이한 최적제어이득이 계산된다. 일반적으로는 목적함수의 가중치 행렬을 선정하는데 있어서 엔지니어의 판단에 의한 시행착오법이 사용되고 있으나 다양한 제어 대상 변수에 대해 적절한 가중치를 선정하는 것은 쉽지 않은 일이며 건축구조물의 진동제어에 있어서는 각각의 최대응답에 대한 제한조건이 다르므로 이를 모두 만족시키면서 최소의 제어력을 사용하는 제어이득을 구하기는 더욱 쉽지 않다. 따라서 본 연구에서 제안하는 최적화 과정을 이용하면 이와 같은 설계상의 시행착오과정을 줄이면서 응답과 제어력에 대한 제한조건을 만족시킬 수 있는 보다 효율적인 제어기 설계과정이 될 수 있다.

6. 최적화 문제구성

목적함수는 설계목적에 따라 제어력, 제어신호 및 질량체의 스트로크 가운데 한가지 또는 이들의 조합에 대해서 그 RMS 값으로 설정할 수 있다. 구속조건은 제어대상 변수들(각 층층간 변위, 각 층 절대 가속도, 질량체의 스트로크, 제어력의 크기, 제어신호의 크기 등)의 최대응답 위험률에 대한 제한조건으로 설정할 수 있다.

그러나 구조물의 응답을 임계치 이하로 만드는 최대 제어력과 제어신호의 크기를 줄이는 데는 물리적 한계가 있으므로 이에 대한 강한 구속조건을 두게 되면 구조물 응답에 대한 구속조건과 상충되어 최적화 과정에서 해가 도출되지 않게 된다.

따라서 본 연구에서 구속조건은 구조물의 층간변위 및 절대가속도와 질량체 스트로크에 대해서만 두고 목적함수로서 제어력의 RMS값을 최소화 하도록 한다. 최종설계 결과로 도출된 제어이득으로부터 위험률에 기초한 최대 제어력과 최대 제어신호를 계산할 수 있으며 이는 구조물과 질량체 구속조건을 만족시키기 위해 필요한 최소한의 제어력으로서 설치될 동력기의 능력에 대한 하한치를 나타낸다고 할 수 있다.

여기서 혼동을 피하기 위해 제어대상 플랜트의 출력변수를 구속조건 출력변수와 제어대상 출력변수로 구분한다. 제어대상 출력변수는 LQR제어기 설계에 사용되는 목적함수에 포함되는 출력변수로서 구속조건 변수에는 포함되지 않은 제어력과 제어신호가 모두 포함된다(제어이득은 구조물의 응답과 제어력 사이의 상대적인 가중치에 의해 설계되기 때문이다. 그렇지 않으면 제어이득의 계산 자체가 불가능해진다). 결과적으로 제어대상 플랜트의 출력변수 산정식 (13)에서 z전체가 2n+3개의 제어대상 출력변수가 되고 이 가운데 z_s에 해당되는 2n+1개의 출력변수가 구속조건 출력변수가 된다. 최종적으로 최적화 문제는 다음과 같이 구성되며 P_{0,z_k}는 설계자가 지정한 k번째 구속조건 변수의 최대치 위

험률, t_s 는 정상상태 응답 지속시간으로서 본 연구에서는 정상상태 가진 지속시간과 동일하다고 가정하였다.

$$\min f(\mathbf{S}) \quad (14)$$

$$\text{sub. to } g(\mathbf{S}) < 0 \quad (15)$$

$$f(\mathbf{S}) = \sigma_u^2 \quad (16)$$

$$g_k(\mathbf{S}) = 1 - \exp[-v_{|x_k|}^+(u_k)t_s] - P_{0,z_k} \quad (k=1, \dots, 2n+1) \quad (17)$$

최적화 과정에서 각 제어대상 변수의 최대치 위험률은 정상상태 응답 지속시간과 교차율에 의해서만 결정된다. 정상상태 응답 지속시간을 고정하고 설계하므로 설계자가 지정하는 제어대상 변수의 최대치 위험률은 교차율과 다음과 같은 일대일 대응관계를 가지게 된다.

$$v_k = v_{|x_k|}^+(u_k) = \frac{-\log(1 - P_{0,z_k})}{t_s} \quad (18)$$

따라서 제어대상 변수의 최대치 위험률에 관한 구속조건은 교차율에 관한 구속조건으로 바꿀 수 있다.

$$g_k(\cdot) = \frac{\sigma_{z_k}}{\pi\sigma_{z_k}} \exp\left(\frac{-u_k^2}{2\sigma_{z_k}^2}\right) - v_k \quad (k=1, \dots, 2n+1) \quad (19)$$

설계변수 \mathbf{S} 는 LQR제어기 설계의 가중치 행렬로서 설계변수를 줄이기 위해 가중치 행렬을 대각행렬로 가정하면 제어대상 변수와 동일한 갯수의 원소를 가지게 된다. 이때 정상상태(steady state) LQR의 목적함수는 다음과 같다.

$$J = \int_0^\infty \mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z} dt = \int_0^\infty \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{v} dt \quad (20)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & & \\ 0 & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_p \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}_1^T \mathbf{S} \mathbf{C}_1; \quad \mathbf{N} = \mathbf{C}_1^T \mathbf{S} \mathbf{D}_{12}; \quad \mathbf{R} = \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{S} \mathbf{D}_{12} \quad (22)$$

외란이 가우스 확률분포를 가지는 백색잡음인 경우에 최적 제어 이득은 외란이 없는 경우와 동일한 것으로 알려져 있다.

따라서 목적함수 (20)을 최소화하는 제어 이득은 다음과 같은 Riccati 방정식을 풀어서 구한 행렬 \mathbf{P} 로부터 구할 수 있다.⁽¹³⁾

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - (\mathbf{P} \mathbf{B}_2 + \mathbf{N}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{P} \mathbf{B}_2 + \mathbf{N})^T + \mathbf{Q} = 0 \quad (23)$$

이때 제어이득 및 페루프 시스템은 다음과 같다.

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} + \mathbf{N}^T) \quad (24)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} \quad (25)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_c \mathbf{x} \quad (26)$$

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{G}; \quad \mathbf{C}_c = \mathbf{C}_1 - \mathbf{D}_{12} \mathbf{G} \quad (27)$$

구속조건 출력변수 \mathbf{z} 의 임계치 교차율을 구하기 위해서는 \mathbf{z} 와 \mathbf{z} 의 시간에 대한 변화율의 표준편차가 필요하며 이는 각각의 공분산 행렬로부터 구할 수 있다. 먼저 페루프 시스템에서 \mathbf{z} 의 시간에 대한 변화율은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}_c \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{C}_c \mathbf{B}_1 \mathbf{w} \quad (28)$$

구속조건 출력변수의 공분산 행렬은 다음과 같은 Lyapunov 방정식의 해로부터 구할 수 있다.⁽¹²⁾

$$\mathbf{A}_c \Sigma_{xx} + \Sigma_{xx} \mathbf{A}_c^T + 2\pi \mathbf{B}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{B}_1^T = 0 \quad (29)$$

$$\Sigma_{zz} = \mathbf{C}_c \Sigma_{xx} \mathbf{C}_c^T \quad (30)$$

구속조건 출력변수 변화율은 (28)에서 볼 수 있듯이 상태변수와 백색잡음 외란의 선형조합이다. 여기서 백색잡음 가인을 입력으로 하는 선형 시불변 시스템(linear time invariant system)의 상태변수는 Markov 과정이기 때문에 상태변수와 백색잡음의 공분산은 서로 독립이다. 따라서 식 (1), (28)로부터 제어대상 변수 변화율의 공분산은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Sigma_{zz} = \mathbf{C}_c \left[\mathbf{A}_c \Sigma_{xx} \mathbf{A}_c^T + 2\pi \delta(0) \mathbf{B}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{B}_1^T \right] \mathbf{C}_c^T \quad (31)$$

그러나 백색잡음의 공분산은 무한대이기 때문에 식 (31)에 의한 제어대상 출력변수 변화율의 공분산은 무한대가 된다. 백색잡음은 물리적으로는 존재할 수 없는 신호이며 실제 구조물의 응답은 구조물의 전달함수가 저주파 통과필터 역할을 하기 때문에 구조물의 대역폭보다 충분히 큰 제한대역 백색잡음을 사용한다면 거의 동일한 응답을 얻는다. 또한 제어장치의 운용이나 설계과정에서의 시뮬레이션 수행시에 디지털 컴퓨터를 통해 이산시간 영역의 데이터를 사용하므로 Nyquist 진동수보다 높은 진동수의 신호가 배제된다. 따라서 Nyquist 진동수를 제한대역 백색잡음의 대역폭으로 사용할 수 있으며, 이는 연속시간 백색잡음의 공분산 행렬을 이산시간 백색잡음의 공분산 행렬로 대체하는 것과 같다. 시간 간격 T 인 이산시간 백색잡음의 공분산은 연속시간 백색잡음의 PSD와 다음 관계를 가진다.

$$w_d(k) = w(kT) \quad (32)$$

$$E[w_d^2(k)] = 2\pi S_w^d = \frac{2\pi S_w}{T} \quad (33)$$

이로부터 제어대상 변수 변화율의 공분산은 다음과 같으며 식 (29), (30)과 함께 교차율 구속조건식 (19)의 계산에 사용된다.

$$\Sigma_{zz} = C_c \left(A_c \Sigma_{xx} A_c^T + \frac{2\pi}{T} B_1 S_w B_1^T \right) C_c^T \quad (34)$$

7. 목적함수와 구속조건의 기울기

먼저 목적함수와 구속조건 함수를 제어대상변수의 분산을 이용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$f(\cdot) = V_{z_{2n+2}} \quad (35)$$

$$g_k(\cdot) = \frac{V_{z_k}^{0.5}}{\pi V_{z_k}^{0.5} \exp\left(\frac{u_k^2}{2V_{z_k}}\right)} - v_k \quad (k=1, \dots, 2n+1) \quad (36)$$

$$V_{z_k} = [\Sigma_{zz}]_{kk}; \quad V_{z_k} = [\Sigma_{zz}]_{kk} \quad (37)$$

목적함수 및 k번째 구속조건 함수의 p번째 최적화변수에 대한 기울기는 후자의 경우 연쇄법칙을 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial s_p} = \frac{\partial V_{z_{2n+2}}}{\partial s_p} \quad (38)$$

$$\frac{\partial g_k(\cdot)}{\partial s_p} = \frac{\partial g_k(\cdot)}{\partial V_{z_k}} \frac{\partial V_{z_k}}{\partial s_p} + \frac{\partial g_k(\cdot)}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial s_p} \quad (39)$$

구속조건의 제어대상 변수 분산 및 제어대상 변수 변화율의 분산에 대한 기울기는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial g_k(\cdot)}{\partial V_{z_k}} = \left(\frac{u_k^2 - V_{z_k}}{2V_{z_k}^2} \right) \{g_k(\cdot) + v_k\} \quad (40)$$

$$\frac{\partial g_k(\cdot)}{\partial v_k} = \left(\frac{1}{2V_{z_k}} \right) \{g_k(\cdot) + v_k\} \quad (41)$$

제어대상 변수 분산의 설계변수에 대한 기울기는 Riccati 행렬을 매개변수로 하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial V_{z_k}}{\partial s_p} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_{z_k}}{\partial P_{ij}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial s_p} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \Sigma_{zz}}{\partial P_{ij}} \right]_{kk} \left[\frac{\partial P}{\partial s_p} \right]_{ij} \quad (42)$$

$$\frac{\partial V_{z_k}}{\partial s_p} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_{z_k}}{\partial P_{ij}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial s_p} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \Sigma_{zz}}{\partial P_{ij}} \right]_{kk} \left[\frac{\partial P}{\partial s_p} \right]_{ij} \quad (43)$$

여기서 제어대상 변수 공분산 행렬과 제어대상 변수 변화율 공분산 행렬의 Riccati 행렬에 대한 기울기는 각각 식 (30)과 (34)를 Riccati 행렬 원소로 미분하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \Sigma_{zz}}{\partial P_{ij}} = \frac{\partial C_c}{\partial P_{ij}} \Sigma_{xx} C_c^T + C_c \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial P_{ij}} C_c^T + C_c \Sigma_{xx} \frac{\partial C_c^T}{\partial P_{ij}} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_{zz}}{\partial P_{ij}} &= \frac{\partial C_c}{\partial P_{ij}} \left(A_c \Sigma_{xx} A_c^T + \frac{2\pi}{T} B_1 S_w B_1^T \right) C_c^T \\ &+ C_c \left(\frac{\partial A_c}{\partial P_{ij}} \Sigma_{xx} A_c^T + A_c \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial P_{ij}} A_c^T + A_c \Sigma_{xx} \frac{\partial A_c^T}{\partial P_{ij}} \right) C_c^T \\ &+ C_c \left(A_c \Sigma_{xx} A_c^T + \frac{2\pi}{T} B_1 S_w B_1^T \right) \frac{\partial C_c^T}{\partial P_{ij}} \end{aligned} \quad (45)$$

여기서 페루프 시스템 출력 행렬의 Riccati 행렬에 대한 기울기는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_c}{\partial P_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial P_{ij}} [C_1 - D_{12} R^{-1} (B_2^T P + N^T)] \\ &= -D_{12} R^{-1} B_2^T \mathbf{1}_{ij} \\ &= - \left[\mathbf{0}_{n_c \times (j-1)} \mid D_{12} R^{-1} [B_2^T]_{i-th \text{ column}} \mid \mathbf{0}_{n_c \times (n_c - j)} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

$$[\mathbf{1}_{ij}]_{kl} = \begin{cases} 1 & (k=i, l=j) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (47)$$

유사한 방법으로 페루프 시스템 행렬의 Riccati 행렬에 대한 기울기를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_c}{\partial P_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial P_{ij}} [A - B_2 R^{-1} (B_2^T P + N^T)] \\ &= - \left[\mathbf{0}_{n_c \times (j-1)} \mid B_2 R^{-1} [B_2^T]_{i-th \text{ column}} \mid \mathbf{0}_{n_c \times (n_c - j)} \right] \end{aligned} \quad (48)$$

상태변수 공분산 행렬의 Riccati 행렬에 대한 기울기를 구하기 위해서는 우선 공분산 행렬이 만족하는 Lyapunov 방정식을 Riccati 행렬 원소로 미분하여 만들어지는 다음과 같은 또다른 Lyapunov 방정식을 풀어서 구할 수 있다.

$$A_c \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial P_{ij}} + \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial P_{ij}} A_c^T + \frac{\partial A_c}{\partial P_{ij}} \Sigma_{xx} + \Sigma_{xx} \frac{\partial A_c^T}{\partial P_{ij}} = \mathbf{0} \quad (49)$$

다음으로 식 (42)와 (43)의 계산에 필요한 것은 Riccati 행렬의 가중치 행렬 원소에 대한 기울기 행렬이다. 이는 Riccati 방정식을 가중치 행렬 원소로 미분해서 만들어지는 다음 Lyapunov 방정식을 풀어서 얻어질 수 있다.

$$\frac{\partial P}{\partial s_p} A_c + A_c^T \frac{\partial P}{\partial s_p} + (D_{12} G - C_1)^T \mathbf{1}_{pp} (D_{12} G - C_1) = \mathbf{0} \quad (50)$$

$$[I_{pp}]_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j = p) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \quad (51)$$

만약 식 (7)~(9)와 같이 동력기 상태방정식이 완전 프로퍼(strictly proper)하면서 상태변수가 1개인 경우에는 B_2 행렬에서 0이 아닌 원소가 1개 뿐이다. 따라서 식 (46)과 (48)에 의한 C_c 행렬과 A_c 행렬의 Riccati행렬 원소에 대한 기울기가 0이 아닌 경우는 $i=2n+3, j=1, \dots, 2n+5$ 인 경우이다. 따라서 목적함수와 구속 조건식의 설계변수에 대한 기울기를 구할 때 고려할 Riccati 행렬 원소는 $(2n+5) \times (n+3)$ 개에서 $2n+5$ 개로 줄어들게 되므로 계산과정에 드는 노력이 많이 줄어들게 된다. 또한 제어신호에 대한 가중치를 고정시키고 나머지 제어대상 변수에 대한 상대적 가중치만을 변화시켜가며 설계하게 되므로 식 (46), (48)의 계산 결과는 전체 설계과정에 대해서 항상 동일하게 되어서 초기에 한번만 계산하면 된다. 그밖에도 구조물의 응답은 저차 모드 몇 개만으로도 충분히 표현이 가능하므로 축소모형을 사용하여 상태변수를 줄이면 Lyapunov 방정식들의 규모를 줄임으로써 계산량을 줄일 수 있다.

8. 해석예제

예제 구조물은 그림 2와 같은 10층의 전단건물로서 각 층의 질량과 강성, 고유진동수 및 감쇠비는 표 1과 같다. 예제 구조물에 설치된 제어장치는 HMD로서 수동제어 시는 TMD로 작동하고 능동 제어 시에는 유압식 동력기를 사용하여 질량체에 힘을 전달하는 것으로 가정한다. TMD 부분의 질량은 전체구조물 질량의 0.5%로 하였다. 이에 따른 최적 고유진동수 비와 감쇠비는 Ayorinde에 의한 식을 사용하였다.⁽¹⁴⁾

평균 최대 지반가속도는 0.1g로 가정하였으며 가진입력 필터와 동력기에 관한 파라미터를 표 2에 정리하였다. 구조물 최대응답과 질량체 스트로크 최대치에 대한 구속조건은 표 3과

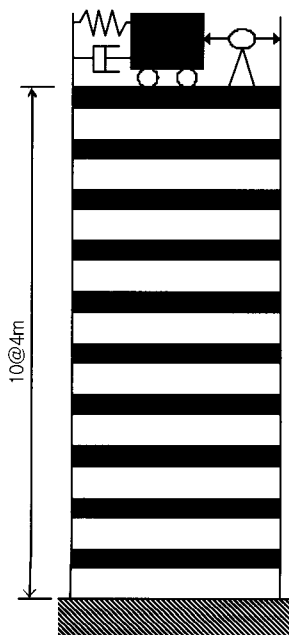


그림 2 HMD가 설치된 10층 전단건물

표 1 예제 구조물의 특성

층	질량 (kg)	층강성 (kgf/cm)	고유진동수 (Hz)	감쇠비 (%)
1	24300	10000	0.42 1.16/1.90/2.64 3.22/3.82/4.20 4.67/5.09/5.51	2
2, 3, 4	24300	8000		
5, 6, 7	24300	7000		
8, 9, 10	24300	5000		

표 2 설계조건

하중 조건	최대 지반가속도	0.1g
	백색잡음 PSD	$(0.1 \times 9.8/34.7588)^2 \text{m}^2/\text{sec}^3$
	필터 고유진동수	15.6rad/sec
	필터 감쇠비	0.6
	외피함수 파라미터	$t_1=20\text{sec}, t_2=40\text{sec}, c=0.15$
동력기 조건	ω_a	11.94rad/sec
	α_a	400

표 3 응답 구속조건(5% 위험률)

	구속조건A	구속조건B	구속조건C
층간변위	2cm	2cm	2cm
절대가속도	0.2g	0.2g	0.2g
TMD 스트로크	1.5m	1.75m	2m

같으며 각각에 대한 위험률은 5%로 하였다. 여기서 가진입력이 지반가속도인 경우에 절대가속도는 중요한 제어대상은 아니지만 제안된 최적화 과정의 유효성을 검증하기 위해 구속조건에 추가하였다.

본 연구에서 사용한 최적화 알고리즘은 sequential quadratic programming 방법으로서 상용프로그램인 MATLAB에서 제공하는 optimization toolbox를 이용하였다.⁽¹⁵⁾

8.1 상태변수 피드백 제어기 설계 결과

먼저 대상 구조물의 응답에 대한 RMS값으로부터 층간변위는 2층이 가장 큰 값을 가지며 그밖에 층강성이 불연속성을 가지는 5층, 8층의 층간변위가 크다는 것을 확인할 수 있었다. 절대가속도는 최상층에서 발생함을 확인할 수 있었다. 일반적으로 능동제어에 사용되는 동력기의 능력에는 한계가 있기 때문에 능동제어를 하더라도 모드형상에는 큰 변화가 없거나 변화가 있다 하더라도 전체적인 경향은 크게 바뀌지 않는다고 가정할 수 있으므로 질량체 스트로크, 제어력, 제어신호와 함께 LQR 목적함수에 포함되는 제어대상 변수를 모든 층의 층간변위 및 절대가속도로 하는 경우와 2층 층간변위 및 10층 절대가속도만으로 하는 경우로 나누어서 설계하였다. 각각에 대한 설계 결과는 표 4와 같으며 전자를 LQR (I)로 표기하고 후자를 LQR (II)로 표기한다.

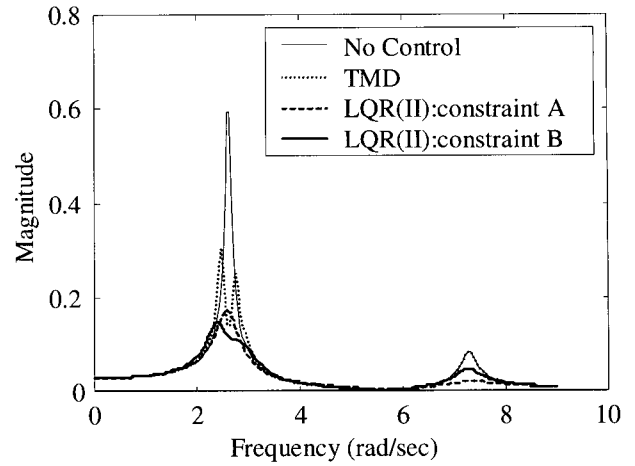
제어대상 변수를 5개로 축소할 경우에 오히려 제어력 및 제어신호가 약간 더 작은 경향이 있으며 활성화된 구속조건은 동일함을 알 수 있다. 이와 같은 결과는 제어대상 변수가

표 4 설계결과와 5% 위험률 기준 최대응답(음영부분은 활성화된 구속조건, 괄호안은 최대값의 평균+표준편차)

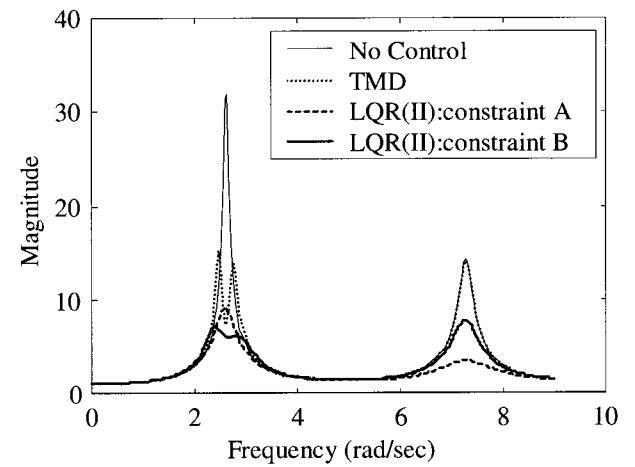
구분	2층층간 변위 (cm)	10층 가속도 (m/s ²)	질량체 스트로크 (m)	제어력 (kN)	제어 신호 (V)	
비제어	3.67 (3.41)	2.90 (2.71)				
TMD	2.70 (2.51)	2.53 (2.36)	1.41 (1.31)			
LQR (I)	구속 조건A	2.00 (1.86)	1.76 (1.65)	1.50 (1.39)	10.74 (10.04)	37.4 (35.2)
	구속 조건B	2.00 (1.86)	1.96 (1.83)	1.75 (1.62)	5.79 (5.40)	18.0 (16.9)
	구속 조건C	2.00 (1.86)	1.96 (1.83)	1.92 (1.78)	5.69 (5.31)	17.8 (16.7)
LQR (II)	구속 조건A	2.00 (1.86)	1.80 (1.68)	1.50 (1.39)	10.65 (9.94)	34.6 (32.5)
	구속 조건B	2.00 (1.86)	1.96 (1.83)	1.75 (1.62)	5.84 (5.44)	17.42 (16.3)
	구속 조건C	2.00 (1.86)	1.96 (1.83)	1.93 (1.80)	5.62 (5.25)	16.1 (15.0)
LQG	구속 조건A	2.01 (1.87)	1.81 (1.69)	1.51 (1.40)	10.21 (9.53)	33.2 (31.2)
	구속 조건B	2.00 (1.86)	1.96 (1.83)	1.75 (1.63)	5.83 (5.44)	17.4 (16.2)
	구속 조건C	2.00 (1.86)	1.96 (1.83)	1.94 (1.80)	5.62 (5.24)	15.9 (14.9)
축소 LQG	구속 조건A	2.00 (1.86)	1.81 (1.69)	1.51 (1.40)	10.23 (9.55)	33.3 (31.2)
	구속 조건B	2.00 (1.86)	1.96 (1.83)	1.75 (1.63)	5.88 (5.49)	17.7 (16.5)
	구속 조건C	2.01 (1.87)	1.97 (1.85)	1.94 (1.80)	5.57 (5.21)	16.0 (15.0)

많아지면 최적화 과정에서 수렴성이 나빠지기 때문인 것으로 판단되며 제어대상 변수를 줄이더라도 제어기 설계 결과로 나타나는 활성화 구속조건은 변함이 없이 2층 층간변위와 10층 절대 가속도이므로 이후에는 축소된 제어대상변수를 사용한 경우에 대해서만 언급한다.

설계 결과에서 볼 수 있듯이 질량체 스트로크에 대한 구속조건이 엄격해질수록 제어력과 제어 신호의 크기가 증가함을 볼 수 있다. 이는 그림 3의 전달함수 변화에서 볼 수 있듯이 1차모드에 동조된 질량체의 스트로크를 줄이려고 하면 1차 모드 응답이 늘어나는 대신에 이를 보상하기 위해 2차 모드 응답을 줄이려고 하기 때문인 것으로 보인다. 또한 스트로크를 1.25m로 놓고 최적설계를 수행한 경우에는 사용된 제어알고리즘이 수렴하지 못하고 종료함을 확인하였는데 이는 주어진 응답 구속조건을 만족하기 위해서 필요한 최소한의 스트로크가 존재함을 의미한다고 할 수 있다. 따라서 공간적인 제약 때문에 질량체의 스트로크를 제한하려고 한다면 본 연구에서 제안한 방법을 통해 스트로크의 구속조건을 점점 줄여 감으로써 최소한의 소요 스트로크를 추정할 수 있다고 본다. 그러나 이와 같은 방법을 통해 스트로크를 제



(a) 백색잡음 입력으로부터 2층 층간변위에 대한 전달함수



(b) 백색잡음 입력으로부터 10층 절대가속도에 대한 전달함수

그림 3 질량체 스트로크의 구속조건에 따른 전달함수 변화

한할 때에는 2차모드 제어력이 증가하기 때문에 제어력이 많이 든다는 단점이 있으므로 가급적이면 제어력을 줄이는 것을 우선하고 차후에 스트로크를 줄이기 위해서 제어이득 스케줄링(gain scheduling) 또는 추가적인 복원력을 사용하는 것이 바람직하다고 생각된다.^{(16),(17)} 그러나 이와 같은 방법을 사용하는 경우에도 기본적으로 선형제어기의 설계결과를 바탕으로 하기 때문에 본 연구에서 제시하는 방법은 그 유용성을 가진다고 할 수 있다.

주어진 구속조건을 만족시키기 위한 최대 제어력과 최대 제어신호의 크기는 필요한 동력기와 신호처리 장치의 선정에 도움이 될 것으로 판단된다. 동력기의 선택 시에는 최대 제어력 뿐만 아니라 차단 주파수(cut-off frequency)도 중요한 변수가 될 수 있으므로 이를 변화시켜 가면서 최적설계를 수행하고 그에 따른 최대 제어력의 크기를 살펴보았다. 동력기의 차단 주파수는 TMD설치 이전의 구조물 1차모드 고유진동수에서 4차 모드 고유진동수까지 변화시켜 보았다. 설계결과는 표 5와 같으며 차단주파수에 따른 최대제어력의 변화는 미미한 수준이나 그에 필요한 최대 제어신호의 크기 및 감소 정도는 차단주파수가 증가할수록 줄어드는 것을 알 수 있다. 차단주파수가 증가하면 노이즈의 영향 증가와 구조

표 5 차단주파수 별 최대제어력 및 제어신호(5% 위험률 기준)

구분		차단주파수			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
구속 조건A	제어력(kN)	11.92	11.92	10.65	10.60
	제어신호(V)	1120.8	407.0	34.6	31.7
구속 조건B	제어력(kN)	5.85	5.82	5.84	5.80
	제어신호(V)	44.6	26.5	17.4	16.2
구속 조건C	제어력(kN)	5.62	5.62	5.62	5.62
	제어신호(V)	48.6	23.0	16.1	16.1

물의 고차모드에 대한 불확실성 존재 시에 spill-over 효과를 발생시킬 수 있으므로 제어력과 제어신호의 최대값에 큰 차이가 없다면 가급적 작게 해주는 것이 좋을 것이다. 또한 사용되는 동력기는 상당히 무거운 질량체를 움직여야 하므로 실제로 제작, 사용되는 동력기의 차단 주파수에는 한계가 있음도 고려해야 할 것이다.

8.2 출력변수 피드백 제어기 설계 결과

앞에서는 전상태변수 피드백 제어기를 설계하였으나 실제적인 경우에는 모든 구조물 상태변수가 측정되기는 어려우므로 관측기의 사용이 필요하다. 제어대상 플랜트의 외란과 측정잡음이 백색잡음인 경우에 2차의 성능지수에 대한 최적 출력피드백 제어기는 LQR제어기와 Kalman필터가 결합된 LQG 제어기이며 앞서 언급한 바와 같이 각각은 개별적으로 설계될 수 있다. 본 절에서는 앞서 설계된 전상태변수 피드백 제어기를 바탕으로 Kalman filter를 사용한 LQG 제어기를 설계하고 이때 발생하는 성능의 변화를 살펴본다. 또한 Kalman 필터를 사용한 제어기는 전체 제어대상 플랜트와 동일한 개수의 상태변수를 가지는 동적 제어기(dynamic controller)이므로 실시간으로 제어력 계산시 과도한 계산량에 의한 시간지연 현상을 발생시킬 수 있다. 따라서 설계된 Kalman 필터의 차수를 줄인 축소 제어기를 사용하는 경우에 대한 성능 변화의 정도를 검증한다.

먼저 측정되는 변수는 건물의 2, 6, 10층 및 질량체의 절대가속도 4가지로 하였다. Kalman필터의 설계 파라미터는 설계대상 플랜트의 외란과 측정 잡음의 공분산 행렬이다. 플랜트 외란의 공분산 행렬은 LQR 설계시와 동일하며, 측정 잡음의 공분산은 각 측정 변수마다 동일하면서 HMD가 TMD로만 기능할 때의 10층 가속도 분산의 5%가 되도록 하였고 각각의 측정 잡음은 서로 독립인 것으로 가정하였다.

표 4의 설계 결과를 살펴 보면 모든 상태변수가 측정되는 것으로 가정한 LQR과 제한된 측정변수와 관측기를 사용한 LQG 제어기의 성능에 큰 차이가 없다. 따라서 제어기의 최적 설계 과정에서 관측기를 포함한 전체 제어기의 통합설계를 하지 않고 상태변수 피드백 이득만을 먼저 설계하고 관측기를 추가해도 충분히 구속조건을 만족하는 제어기를 설계할 수 있다.

설계된 LQG제어기는 설계대상 플랜트와 동일한 숫자의 상태변수를 가지므로 본 예제의 경우에 25차의 상태방정식 형태가 된다. 실시간 제어시의 계산량을 감소시키기 위한 방법으로는 설계대상 플랜트 자체를 축소시키는 방법과 설계된 제어기의 차수를 줄이는 방법이 있다. 본 예제에서는 앞서 설계된 25차의 LQG제어기에 균등구현(balanced realization)에 의거한 모델 차수 축소 방법을 적용하였다. 균등구현은 상태변수가 출력변수들과 입력변수들에 대해 갖는 연관관계가 균등하도록 만들어주는 것으로서 이로부터 출력변수와 입력변수 모두에 대해 연관관계가 적은 상태변수를 제거한다.⁽¹¹⁾ 이 때 스트로크 구속조건이 엄격해 질수록 고차모드를 제어하는 경향이 있으므로 스트로크 구속조건 1.5m, 1.75m, 2.0m에 대해서 각각 19, 15, 15차의 상태방정식으로 제어기를 축소하였다. 각각의 축소된 제어기의 성능은 원래의 제어기와 크게 다르지 않음을 표 4에서 확인할 수 있다.

8.3 최대 응답 신뢰도의 통계적 검증

다음으로는 각 설계 결과에 대해서 최대응답의 위험률을 통계적으로 검증해 보기 위해서 각 설계결과별로 1000회의 시뮬레이션을 수행하였다. 이 때 사용한 가진입력은 앞서 언급한 Kanai-Tagimi 필터를 통과시킨 비정상적 백색잡음을 사용하였다. 표 6에서 볼 수 있듯이 각각의 주요 최대응답별로 위험률이 일부를 제외하고는 설계 구속조건인 5%보다 약간 작은 편이다(구속조건 A의 10층가속도와 구속조건 C의 질량체 스트로크는 활성화되지 않았으므로 상대적으로 위험률이 매우 낮다). 이는 응답의 위험률이 정상적 확률과정을 대상으로 하고 있으나 시뮬레이션에 사용된 가진입력이 정상상태에 도달하기 전에는 상대적으로 작은 가진입력이라는 점이 이후에도 영향을 미치기 때문에 예상치보다 약간 낮은 최대응답 위험률을 보이는 것으로 생각된다. 따라서 이점을 고려하려면 점진적 스펙트럼을 사용하는 방법을 고려할 필요가 있을 것이다. LQG제어기 및 축소된 LQG제어기의 경우에도 전상태피드백 제어기와 유사한 통계적 확률을 가짐을 확인할 수 있었다.

표 6 최대응답 위험률의 통계적 확인(1000회 시뮬레이션 평균, 음영부분은 활성화된 구속조건 및 제어력, 제어신호)

구분		2층 층간 변위	10층 가속도	TMD 스트로크	제어력	제어신호
구속 조건 A	LQR (II)	4.1	0.9	3.9	4.6	4.1
	LQG	4.1	0.8	3.9	4.6	3.1
	축소LQG	4.2	0.8	4.0	5.0	3.1
구속 조건 B	LQR (II)	3.7	4.0	3.4	3.5	4.4
	LQG	3.6	4.1	3.5	3.7	4.1
	축소LQG	3.6	4.2	3.6	3.7	4.1
구속 조건 C	LQR (II)	4.7	4.2	1.5	5.4	3.7
	LQG	4.6	4.2	1.6	5.3	5.0
	축소LQG	4.9	4.6	1.6	5.1	5.2

9. 결 론

본 연구는 부분적으로 정상적 확률과정으로 모델링 될 수 있는 지반가속도 입력에 대하여 확률적으로 정의되는 구조물의 최대 응답을 임계치 이하로 줄이면서 제어력을 최소화 할 수 있는 제어기 최적설계 방법을 제안하였다. 최적화 과정에서 제어기의 안정성에 대한 구속조건을 두는 대신 안정성이 뛰어난 LQR 형태의 최적 제어이득을 찾았다. 10층 전단건물에 대한 해석 예제를 통해 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 제안된 설계방법은 제어대상 변수의 최대응답 위험률을 제한할 수 있었으며 제어대상 변수의 종류별로 가장 위험한 변수만을 선별적으로 설계에 포함시켰을 때 좀 더 우수한 수렴성과 설계결과를 보임을 알 수 있었다.
- 2) 스트로크의 제한이 엄격해지면 스트로크에 상대적으로 영향이 적은 고차모드를 제어하는 경향 때문에 제어력이 크게 증가하므로 이 경우에는 제어이득 스케줄링 등 부가적인 방법을 사용하여 스트로크를 줄일 필요가 있다.
- 3) 최적설계된 상태변수 피드백 LQR제어기에 Kalman 필터를 결합하여 구성한 LQG제어기는 관측기 오차에 의한 성능의 저하가 무시할 정도였으며, 따라서 제어기와 관측기의 설계를 독립적으로 수행하여도 목표한 응답수준을 획득할 수 있었다.
- 4) 실시간 제어시 계산량을 줄이기 위하여 축소된 제어기를 사용하는 경우에도 적절한 차수를 보유하고 있는 경우에는 목표한 성능을 충분히 유지할 수 있었다.
- 5) 통계적으로 확인된 제어기의 성능은 설계목표보다 약간 보수적인 경향을 가졌는데 이는 초기 가진입력의 비정상성(nonstationarity)에 기인한 것으로 추정되며 비정상성이 강한 가진입력에 대한 추후연구가 필요하다고 사료된다.
- 6) 본 연구에서는 설계대상 플랜트의 파라미터 불확실성을 고려하지 않고 있으나 제안된 설계방법의 확장을 통해 이를 고려할 수 있도록 추후 연구가 필요하다고 사료된다.

감사의 글

본 연구는 한국 과학재단 특정기초연구 과제(과제번호 : 1999-1-310-001-3)의 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

1. 황재승, 김윤석, 홍성목, "인천국제공항 관제탑 제진장치의 특성", 대한건축학회학술발표논문집, 대한건축학회, 제19권, 제1호, 1999, pp. 63-68.
2. Soong, T. T. and Grigoriu, M., *Random Vibration of Me-*

- chanical and Structural Systems*, Prentice Hall, New Jersey, 1993, p. 402.
3. Spencer Jr., B. F., Kaspari Jr., D. C., and Sain, M. K., "Structural control design : a reliability-based approach," *Proceedings of the American Control Conference*, IEEE, 1994, pp. 1062-1066.
4. May, B. S. and Beck, J. L., "Probabilistic control for the active mass driver benchmark structural model," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 27, 1998, pp. 1331-1346.
5. Clough, R. W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Singapore, 1993, p. 738.
6. Spencer Jr., B. F., Suhardjo, J., and Sain, M. K., "Frequency domain optimal control strategies for aseismic protection," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 120, No. 1, 1994, pp. 135-158.
7. 주석준, "건축구조물의 지진응답의 강인제어에 대한 실험적 연구", 박사학위논문, 서울대학교, 2000, p. 162.
8. Lin, Y. K. and Cai, G. Q., *Probabilistic Structural Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1995, p. 476.
9. Lutes, L. D. and Sarkani, S., *Stochastic Analysis of Structural and Mechanical Vibrations*, Prentice Hall, New Jersey, 1997, p. 509.
10. Yang, J. N. and Samali, B., "Control of tall buildings in along-wind motion," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 109, No. 1, 1983, pp. 50-68.
11. 주석준, 박지훈, 민경원, 홍성목, "건축구조물의 지진응답제어를 위한 시스템 식별의 실험적 연구", 한국지진공학회논문집, 제3권, 제4호, 1999, pp. 47-59.
12. Burl, J. B., *Linear Optimal Control*, Addison-Wesley, California, 1999, p. 462.
13. Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., *Optimal Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989, p. 380.
14. Ayorinde, E. O. and Warburton, G. B., "Minimizing structural vibrations with absorbers," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 8, 1980, pp. 219-236.
15. Coleman, T., Branch, M. A., and Grace, A., *Optimization Toolbox for Use with MATLAB*, Math. Works, 1999.
16. Nagashima, I. and Shinozaki, Y., "Variable gain feedback control technique of active mass damper and its application to hybrid structural control," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 26, 1997, pp. 815-838.
17. 구정모, 주석준, 홍성목, "능동질량 감쇠기의 포화효과 보상 기법", 대한건축학회논문집, 제15권, 제5호, 1999, pp. 39-46.