

## 근접하여 회전하는 두 원통 사이의 윤활유동해석

이승재 · 정호열 · 정재택\*<sup>†</sup>

전남대학교 대학원 기계공학과  
\*전남대학교 자동차공학부

### Analysis for Lubrication between Two Close Rotating Cylinders

Seung-Jae Lee, Ho-Eyoul Jeong and Jae-Tack Jeong\*<sup>†</sup>

Dept. of Mechanical Eng. Graduate School, Chonnam Nat. Univ  
\* School of Automotive Eng., Chonnam Nat. Univ

**Abstract** – Two dimensional slow viscous flow around two counter-rotating equal cylinders is investigated based on Stokes' approximation. An exact formal expression of the stream function is obtained by using the bipolar cylinder coordinates and Fourier series expansion. From the stream function obtained, the streamline patterns around the cylinders are shown and the pressure distribution in the flow field is determined. By integrating the stress distributions on the cylinder, the force and the moment exerted on the cylinder are calculated. The flow rate through the gap between the two cylinders is also determined as the distance between two cylinders varies. Special attention is directed to the case of very small distance between two cylinders concerned with the lubrication theory and the minimum pressure is calculated to explain a possible cavitation.

**Key Words** – Stokes' approximation, bipolar cylinder coordinates, biharmonic equation, fourier series, lubrication, rotating cylinders, cavitation.

#### 1. 서 론

물체 주위의 느린 점성유동에 대한 연구는 오래 전부터 많이 진행되어 왔는데[1], 이는 점성의 영향에 의한 유동 특성 변화에 많은 관심이 있기 때문이다. 2차원의 느린 점성에 대한 연구로는 벽면에 부착된 돌출물을 지나는 점성 유체의 유동[2, 3], 점성 유체 내의 두 원통에 의한 유동[4], Stokes 유동에서의 박리유동[5, 6]등에 대한 연구가 있다. 이러한 연구 중에서 회전하는 두 실린더 주위의 유동장에 대한 연구는 실제 응용분야와 관련하여 중요한 연구 대상이다. 이와 같은 유동은 쌍롤에 의한 주조시 주물의 유동이나 고 점도 윤활유를 필요로 하는 저널 베어링 부의 유동, 점성을 갖는 작동 유체의 누설 방지 및 외부의 이물질 침입을 차단하기 위한 오일시일 부의 유동, gerotor에서 로터

와 하우징의 접촉부에서의 윤활유의 유동 등과 같이 두 고체 면이 접촉하는 경우의 윤활 모델로 취할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 근접한 두 원통이 서로 반대 방향으로 회전하는 경우 두 원통사이의 틈새에서의 유동을 이론적으로 고찰 하고자 한다. 두 원통사이의 틈새가 매우 작은 경우, 유동의 Reynolds수는 충분히 작으며 유동의 관성력은 점성력에 비하여 무시할 수 있다. 쌍극좌표계(bipolar coordinates)를 이용한 이론해석의 결과로부터 임의의 거리만큼 떨어져 회전하는 두 원통 주위의 유동장에 대한 엄밀해를 구하였다. 특히, 윤활 문제의 해석을 위하여 두 원통 사이의 거리가 두 원통의 반경에 비하여 매우 작은 경우에 대하여 유선의 형태와 압력의 분포, 전단응력, 단위 길이당 원통 사이를 통과하는 유량, 원통이 받는 힘과 모멘트 등의 물리량을 결과로 제시하였으며 유동장내의 최소 압력을 계산하여 공동현상(cavitation)의 발생조건을 규명하였다.

<sup>†</sup>주저자(책임저자) : jtjeong@chonnam.ac.kr

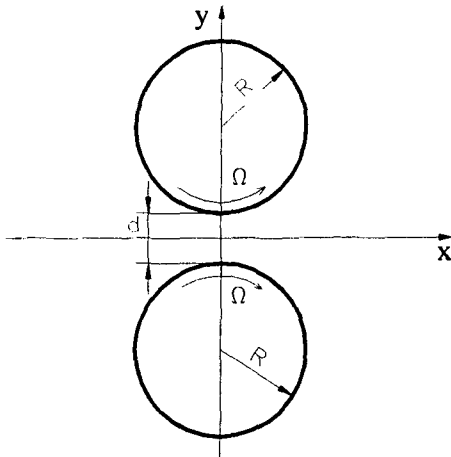


Fig. 1. Definition sketch.

## 2. 수학적 전개

### 2-1. 지배방정식

Fig. 1과 같이 무한유체 내에 평행으로 놓인 두 원통은 서로 반대 방향으로 회전 각속도  $\Omega$ 의 크기로 회전하고 있다. 또한, 일반성을 잃지 않고 원통의 반경  $R$ 로 길이를 무차원화 하면  $R=1$ 로 둘 수 있다.

Reynolds수 ( $Re = \rho\Omega R^2/\mu$ )가 아주 작은 느린 점성 유동(creeping flow)의 경우는 Navier-Stokes 방정식에서 관성항을 무시하는 Stokes의 근사에 의하여 유동의 지배방정식은 다음의 Stokes 방정식으로 된다.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{v} \tag{2}$$

여기서,  $\vec{v}, p$ 는 각각 속도 및 압력이고  $\mu$ 는 점성계수이다. 유동함수  $\Psi$ 를 다음과 같이 도입하면

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{3}$$

Stokes' 방정식 (1),(2)로부터 유동함수  $\phi$ 는 다음과 같은 biharmonic equation으로 표현된다[7].

$$\nabla^4 \Psi = 0 \tag{4}$$

여기에서  $\Psi$ 가  $y$ 에 대하여 반대칭을 감안하면,  $\Psi$ 에 대한 경계조건은 상원통의 표면에서 회전속도에 부합하는 no-slip조건을 적용하면 충분하다.

$$\Psi = \Psi_0 \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = -\Omega \tag{5}$$

여기서,  $\Psi_0$ 는 상원통표면에서 미지의 유동함수값이며  $n$ 은 원주의 바깥으로 수직인 방향의 단위벡터이다.

### 2-2. 좌표변환

원통 표면에서의 경계조건을 쉽게 적용하기 위해 다음과 같은 쌍극좌표계(bipolar cylinder coordinates)  $\xi, \eta$ 를 도입하자.

$$x = \frac{\sinh \xi_0 \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \tag{6}$$

$$y = \frac{\sinh \xi_0 \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta} \tag{7}$$

그러면 위 두 식에서  $(x, y)$ 와  $(\xi, \eta)$ 의 관계로 Fig. 2와 같이 상·하 두 원통의 표면은 각각  $\xi = \xi_0$ 와  $\xi = -\xi_0$ 로 간단히 표현된다. 직각좌표계  $(x, y)$ 와 쌍극 좌표계  $(\xi, \eta)$ 의 관계식(6),(7)은 다음과 같은 복소함수 관계식으로 나타낼 수 있다.

$$x + iy = i \sinh \xi_0 \cosh \frac{1}{2} (\xi + i\eta) \tag{8}$$

또한 (6)식과 (8)식에서  $\eta$ 를 소거해보면 다음과 같은 원의 방정식을 얻을 수 있다.

$$x^2 + (y - \sinh \xi_0 \coth \xi)^2 = \frac{\sinh^2 \xi_0}{\sinh^2 \xi} \tag{9}$$

즉,  $\xi = const.$ 는 원을 나타내며  $\xi = \xi_0$ 일 때는 다음

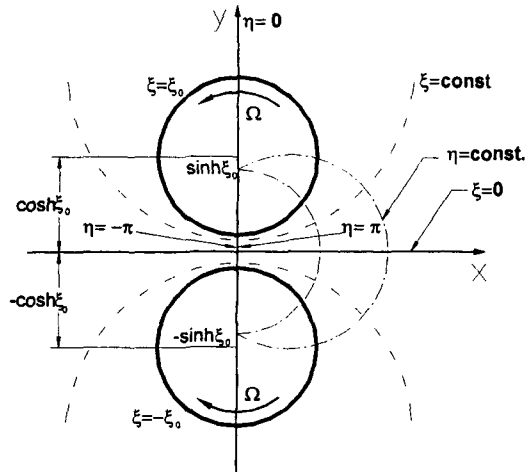


Fig. 2. Bipolar cylinder coordinates  $(\xi, \eta)$ .

과 같이 중심이  $(0, \cosh \xi_0)$ 이고 반경이 1인 원을 나타낸다.

$$x^2 + (y - \cosh \xi_0)^2 = 1 \tag{10}$$

따라서,  $\xi = \pm \xi_0$ 는 상하의 원통 표면을 나타내고 두 원통의 간격  $d$ 는 그림에서와 같이  $d = 2(\cosh \xi_0 - 1)$ 가 되며, 실제로  $d$ 가 주어지면  $\xi_0$ 를 계산할 수 있다. 마찬가지로 (6)식과 (7)식에서  $\zeta$ 를 소거하면 원의 방정식이 되므로  $h = \text{const.}$ 도 원을 나타낸다.

여기에서 두 원통 외부의 유동영역은  $(\xi, \eta)$ 좌표계에서 다음과 같은 영역으로 표현된다.

$$-\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad -\pi \leq \eta \leq \pi \tag{11}$$

해석적인 취급을 간단히 하기 위해 새로운 함수  $\Phi(\xi, \eta)$ 를

$$\Phi = \frac{\Psi}{h}, \quad h = \frac{\sinh \xi_0}{\cosh \xi - \cos \eta} \tag{12}$$

와 같이 정의하면 식(4)로부터

$$\nabla^4(h\Phi) = \frac{(\cosh \xi - \cos \eta)^3}{\sinh^3 \xi_0} \times \tag{13}$$

$$[\Phi_{\xi\xi\xi\xi} + 2\Phi_{\xi\xi\eta\eta} + \Phi_{\eta\eta\eta\eta} - 2\Phi_{\xi\xi} + 2\Phi_{\eta\eta} + \Phi] = 0$$

로 쓸 수 있다. 따라서  $\Phi$ 가 만족하는 방정식은

$$\Phi_{\xi\xi\xi\xi} + 2\Phi_{\xi\xi\eta\eta} + \Phi_{\eta\eta\eta\eta} - 2\Phi_{\xi\xi} + 2\Phi_{\eta\eta} + \Phi = 0 \tag{14}$$

로 된다. 또한, 경계조건(5)는

$$\Phi(\xi_0, \eta) = \frac{\cosh \xi_0 - \cos \eta}{\sinh \xi_0} \Psi_0 \tag{15}$$

$$\Phi_{\xi}(\xi_0, \eta) = \Omega + \Psi_0 \tag{16}$$

로 표현된다.

### 3. 유동장 해석

#### 3-1. 유동함수

유동함수의 해석에 있어서 유동의 흐름은  $y$ 축 ( $h=0, \pm\pi$ )에 대하여 대칭으로 가정할 수 있으므로  $\Psi$ 는  $x$ 에 관하여 우함수가 되고  $\Phi$ 도  $x$ 에 관하여 우함수, 즉  $\eta$ 에 관하여 우함수가 된다. 또한  $\Phi$ 는  $\eta$ 에 대하여  $2\pi$ 의 주기함수로 나타낼 수 있으므로 다음과 같은 Fourier cosine series로 나타낼 수 있다[8].

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\xi) \cos n\eta \tag{17}$$

위의 식을 (14)식에 대입하여 계산하면 (15)식은  $\xi$ 만의 함수로 표현되며 일반 해를 구해보면

$$\Phi_n(\xi) = a_n \cosh(n+1)\xi + b_n \sinh(n+1)\xi + c_n \cosh(n-1)\xi + d_n \sinh(n-1)\xi \tag{18}$$

와 같이 되므로 함수  $\Phi$ 는 다음과 같이 3가지의 경우로 나타낼 수 있다.

(i)  $n=0$ 일 때

$$\Phi = a_0 \cosh \xi + b_0 \sinh \xi + (c_0 \sinh \xi + d_0 \cosh \xi) \xi \tag{19}$$

(ii)  $n=1$ 일 때

$$\Phi = (a_1 + b_1 \xi + c_1 \cosh 2\xi + d_1 \sinh 2\xi) \cos \eta \tag{20}$$

(iii)  $n \geq 2$ 일 때

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n \cosh(n+1)\xi + b_n \sinh(n+1)\xi + c_n \cosh(n-1)\xi + d_n \sinh(n-1)\xi\} \cos n\eta \tag{21}$$

유동함수  $\Psi$ 는  $y$ 또는  $\xi$ 에 대하여 기함수이므로  $\Phi$  또한  $\xi$ 에 대하여 기함수이어야 한다. 즉  $\Phi(\xi, \eta) = -\Phi(-\xi, \eta)$ 을 만족해야 한다. 따라서 (19)-(21)식에서 우함수인 항은 제거되고,  $\Phi$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi(\xi, \eta) = b_0 \sinh \xi + d_0 \xi \cosh \xi + (b_1 \xi + d_1 \sinh 2\xi) \cos \eta + \sum_{n=2}^{\infty} \{b_n \sinh(n+1)\xi + d_n \sinh(n-1)\xi\} \cos n\eta \tag{22}$$

위 식의 계수를 결정하기 위하여 경계조건(15)(16)을 적용하여  $\cos n\eta$ 의 계수를 비교하면  $\Phi(\xi, \eta)$ 는  $\eta$ 에 대하여 상수항과  $\cos \eta$ 항, 즉  $n$ 이 0과 1일 때만 값을 갖게되며,  $n \geq 2$ 일 때의 항은 존재하지 않아야 한다.

또한 상수  $b_0, d_0, b_1, d_1$ 에 대하여는 경계조건 (15)식 (16)식의 계수를 비교하고 3.2절에 설명될 압력분포의 계산에서 압력은  $\eta$ 에 대하여  $2\pi$ 주기 함수가 된다는 조건으로부터 얻어지는

$$d_0 + b_1 = 0 \tag{23}$$

이라는 관계식을 사용하면 다음과 같이 계수  $b_n, d_n$ 과 원통표면에서의 유동함수 값  $\Psi_0$ 를 구할 수 있다.

$$b_0 = \frac{-\Omega \cosh^2 \xi_0}{\sinh 2\xi_0 \sinh \xi_0} \tag{24}$$

$$d_0 = \frac{\Omega \cosh 2\xi_0}{\sinh 2\xi_0 \sinh \xi_0} \quad (25)$$

$$b_1 = \frac{-\Omega \cosh 2\xi_0}{\sinh 2\xi_0 \sinh \xi_0} \quad (26)$$

$$d_1 = \frac{\Omega}{2\sinh 2\xi_0 \sinh \xi_0} \quad (27)$$

$$b_n = d_n = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

$$\Psi_0 = \frac{\Omega(2\xi_0 \cosh 2\xi_0 - \sinh 2\xi_0)}{2 \sinh 2\xi_0} \quad (28)$$

또한 위의 계수들을 (22)식에 대입하고 이를 다시 (12)식에 대입함으로써 유동함수는 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$\Psi(\xi, \eta) = \frac{\Omega}{\sinh 2\xi_0} \left[ \xi \cosh 2\xi_0 - \frac{\cosh^2 \xi_0 \sinh \xi - 1/2 \sinh 2\xi \cos \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \right] \quad (29)$$

여기서,  $(\xi, \eta)$ 는  $(x, y)$ 와 (10)(11)의 관계에 있다.

3-2. 유동장내의 압력분포

지배 방정식(2)식과 (3)식으로부터

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \Psi) \quad (30)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Psi) \quad (31)$$

로 쓸 수 있다.

여기에서 복소변수  $z = x + iy$ 를 도입하고 다음과 같이 복소함수  $f(z)$ 를 정의하자.

$$f(z) = p + i\mu \nabla^2 \Psi \quad (32)$$

(32)식의 실수부와 허수부는 Cauchy-Riemann 의 방정식을 만족하므로  $f(z)$ 는  $z$ 에 대한 복소 해석 함수이다[9]. 또한  $z$ 와  $\xi (= \xi + i\eta)$ 가 (8)식의 관계에 있으므로  $f(z)$ 는  $\xi$ 에 대하여도 해석 함수이며  $\xi, \eta$ 로 표현되는 Cauchy-Riemann 관계식을 만족한다. 여기에서 앞의 (27)식을 (13)식에 대입하면 다음과 같이  $\nabla^2 \Psi$ 를 구할 수 있다.

$$\nabla^2 \Psi = \frac{2}{\sinh \xi_0} [(d_0 + b_1)\xi - (d_0 + b_1)\sinh \xi \cos \eta + d_1(2 \sinh \xi \cos \eta - \sinh 2\xi \cos 2\eta)] \quad (33)$$

$\xi, \eta$ 로 나타낸 (34)식과 (35)식에 (36)식을 대입하고 적분하여  $p$ 를 구하면

$$p = \frac{-2\mu}{\sinh \xi_0} [(d_0 + b_1)\eta - (d_0 + b_1)\cosh \xi \sin \eta + d_1(2 \cosh \xi \sin \eta - \cosh 2\xi \sin 2\eta)] + C \quad (34)$$

와 같은 압력분포 식을 얻을 수 있다. 여기에서 압력은 모든  $\xi$ 에 대하여  $p(\eta = \pi) = p(\eta = -\pi)$ 을 만족해야 하므로  $d_0 + b_1 = 0$ 이 되고, 또한  $y$ 축에 대한 압력 값을  $p(\eta = 0, \pm\pi) = 0$ 으로 놓으면 적분 상수는  $C = 0$ 으로 되므로 압력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p(\xi, \eta) = \frac{-\mu\Omega}{\sinh 2\xi_0 \sinh^2 \xi_0} \times [2 \cosh \xi \sin \eta - \cosh 2\xi \sin 2\eta] \quad (35)$$

3-3. 원통 표면에서의 전단응력 분포

전단응력을 해석함에 있어서 Fig. 3과 같이 상하 두 원통 중 상부 원통에서  $x=0$ 인 곳에서  $\theta$ 가 반 시계 방향으로 증가한다고 하면 전단응력  $\tau$ 는  $r$ 과  $\theta$ 의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\tau = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right] \quad (36)$$

여기서,  $u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$ ,  $u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$  이며 원통상에서 ( $\xi = \xi_0$ )  $u_r = 0, u_\theta = \Omega$ 임을 적용하면, 원통표면에서의 전단응력은

$$\tau(\eta) = -\mu [\nabla^2 \phi + 2\Omega]_{\xi=\xi_0} = \frac{-\mu\Omega}{\sinh 2\xi_0 \sinh^2 \xi_0} [2 \sinh \xi_0 \cos \eta]$$

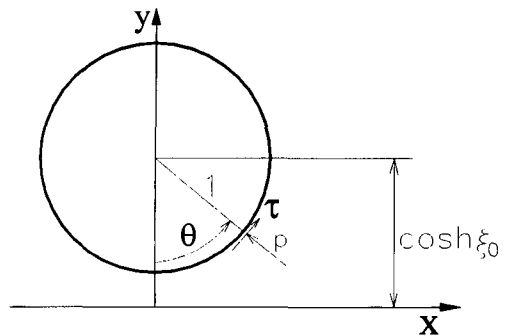


Fig. 3. Pressure and shear stress on the cylinder.

$$-\sinh 2\xi_0 \cos 2\eta] - 2\mu\Omega \quad (37)$$

로 표현된다. (35)식과 (37)식에서 원통 표면에서  $p$ 와  $\tau$ 를 Fig. 3과 같이  $\theta$ 의 함수로 나타내기 위하여  $\eta$ 와  $\theta$ 의 관계를 구하면 다음과 같다.

$$\cos \eta = \frac{1 - \cos \theta \cosh \xi_0}{\cosh \xi_0 - \cos \theta} \quad (38)$$

$$\sin \eta = \frac{\sin \theta \sinh \xi_0}{\cosh \xi_0 - \cos \theta} \quad (39)$$

### 3.4. 원통이 받는 회전모멘트 및 힘

원통이 받는 회전모멘트는 전단응력분포 (37)식을 원통의 둘레를 따라서 적분함으로써 구할 수 있다. 따라서, 반경1인 단위 원통이 받는 회전 모멘트는 다음과 같이 된다.

$$M = \int_0^{2\pi} \tau d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \tau(\eta) h d\eta \quad (40)$$

$$= -4\pi\mu\Omega \coth 2\xi_0$$

이때,  $\xi_0 \rightarrow \infty$ 이면 단위 원통이 회전할때 받는 회전 모멘트와 일치하게 된다.

$$M = -4\pi\mu\Omega \quad (41)$$

원통이 받는 힘은 Fig. 3에서 나타낸 것과 같은 방법으로 압력과 전단응력에 의한 힘을 각 방향에 대하여 원통의 둘레를 따라 적분하면 다음과 같다.

$$F_x = \int_0^{2\pi} -p \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \tau \cos \theta d\theta = 0 \quad (42)$$

$$F_y = \int_0^{2\pi} -p \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \tau \sin \theta d\theta = 0 \quad (43)$$

즉, 상·하 두 원통에 대하여 각각 원통 전체에 작용하는 힘은 0이 됨을 알 수 있다.

## 4. 결과 및 고찰

회전하는 두 원통사이의 유희현상을 조사하기 위하여 두 원통의 틈새간격이 아주 작을 때 즉,  $\xi_0 = 0.1$  ( $d = 2(\cosh \xi_0 - 1 \approx 0.01)$ ) 인 경우의 결과를 고찰하였다.

Fig. 4와 Fig. 5에 (29)식의 유동함수로부터 두 원통 주위의 유선과 원통사이의 유선들을 나타내었다. Fig. 4는 원통주위의 전체 유동장을 보여주며 Fig. 5는 원통사이의 좁은 틈새에서의 유선모양을 보여준다. 틈새

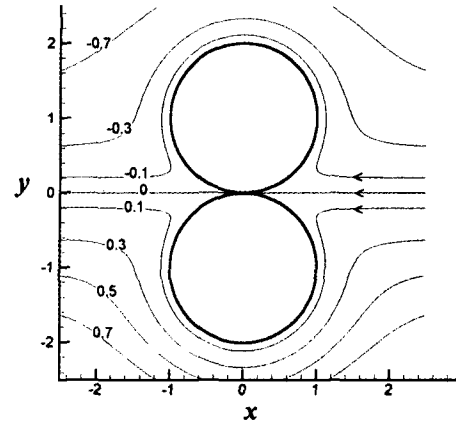


Fig. 4. Streamline pattern around cylinders ( $\xi_0 = 0.1$ ).

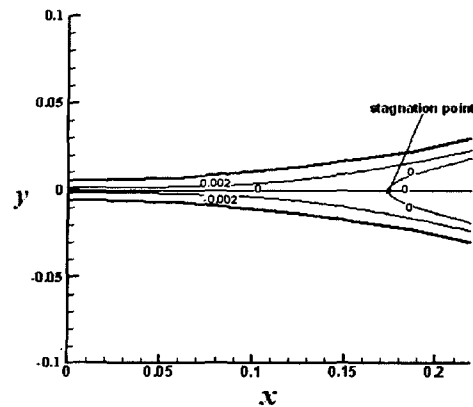


Fig. 5. Streamlines near the gap between two cylinders ( $\xi_0 = 0.1$ ).

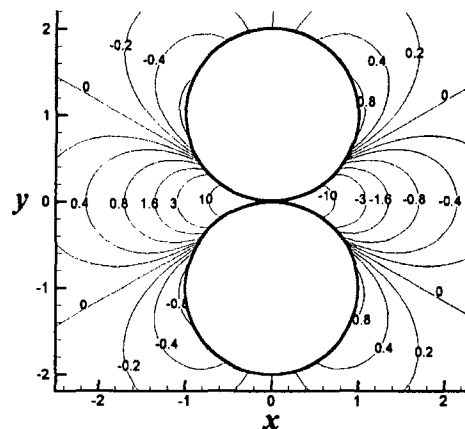


Fig. 6. Pressure contour around cylinders ( $\xi_0 = 0.1$ ).

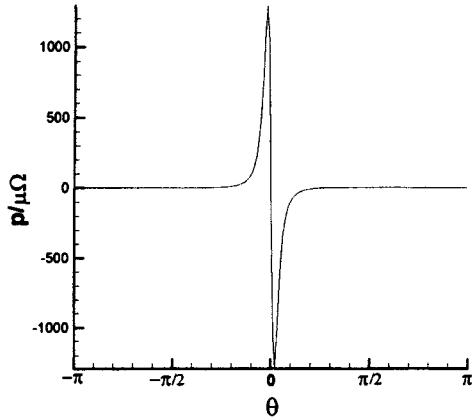


Fig. 7. Pressure distribution on the cylinder ( $\xi_0 = 0.1$ ).

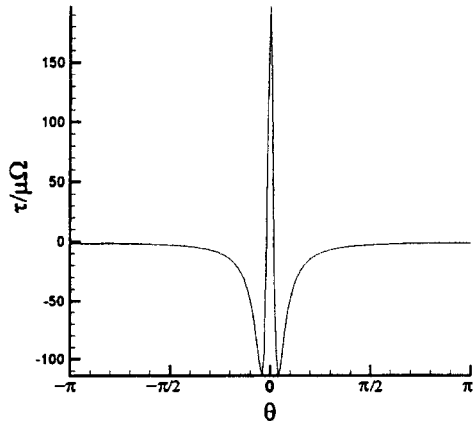


Fig. 8. Shear stress distribution on the cylinder ( $\xi_0 = 0.1$ ).

의  $x = \sqrt{3} \sinh \xi_0, y = 0$  에서 정체점(stagnation point) 이 존재하며 유동방향이 바뀌고 전체 유동장과 부합됨을 알 수 있다.

또한 Fig. 6은 (35)식으로부터 두 원통 주위의 압력 분포를 등압력선으로 나타낸 것이며, Fig. 7과 Fig. 8 에 각각 원통표면에서의 압력분포와 전단응력 분포를 Fig. 3의  $\theta$ 에 따라 나타내었다.

여기에서  $\theta = 0$ 을 중심으로 틈새내부에서 압력과 전단응력이 급변하는 것을 볼 수 있다. 특히,  $\theta = 0^\circ$ 인 근방에서 압력  $p$ 가 음의 부호로 매우 큰 값을 갖게 되는데, 이는 공동현상(cavitation)이 일어날 가능성을 의미한다[10].

이러한 공동현상의 가능성을 조사하기 위하여 유동장 내의 최소압력( $p_{min}$ )을 구해야 한다. 압력장은  $\nabla^2 p = 0$  을

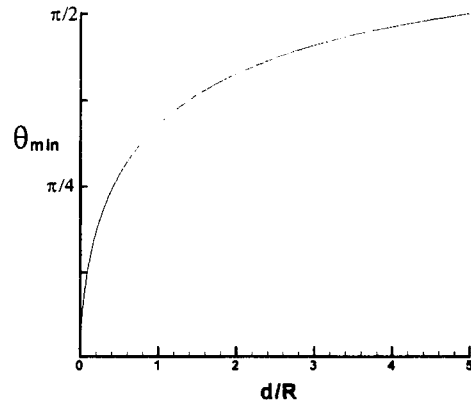


Fig. 9. Location of the minimum pressure on the cylinder.

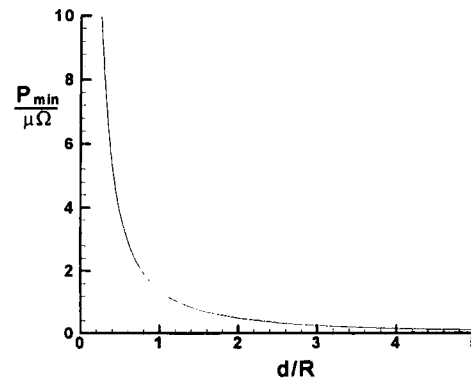


Fig. 10. The minimum pressure which occurs at on the cylinder.

만족하므로  $p$ 의 최소값은 경계인 원통표면( $\xi = \xi_0$ )에서 발생하며 (35)식에서 압력을 최소로 하는  $\eta = \eta_{min}$ 을 결정할 수 있다.

Fig. 9에 두원통의 틈새간격에 따라 최소압력이 발생하는 원주각  $\theta = \theta_{min}$ (Fig. 3)을 나타내었으며, Fig. 10에 그 점에서의 최소압력( $p_{min}$ )의 계산값을 도시하였다. 따라서 Fig. 10의  $p_{min}$ 이 액체의 증기압 이하로 되는 경우에 두 원통사이의 틈새에서 공동현상이 일어나며 유동장에 큰 변화가 생기게 된다. 실제의 윤활 문제에서는 외부의 공기가 틈새의 점성유체로 유입되어 압력은 매우 낮은 값으로 되지 않는 것으로 알려져 있다[11]. 이에 대한 해석을 위해서는 다른 새로운 모델이 필요하다.

Fig. 11는 (28)식을 원통 사이의 거리  $d$ 에 대한 함수로 바꾸어서 두 원통 사이의 틈새로 통과하는 유량

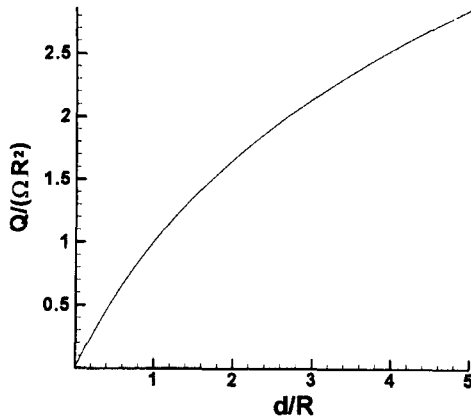


Fig. 11. Flow rate through the gap between two cylinders.

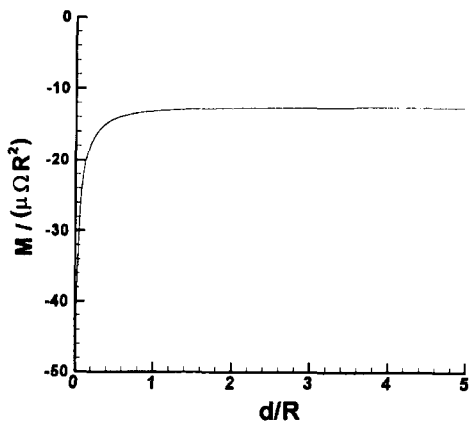


Fig. 12. Moment exerted on the cylinder.

Q의 값을 보여주고 있으며

$$d \rightarrow 0 \text{ 일 때 } \frac{Q}{\Omega R^2} \approx \frac{4d}{3R} + O\left(\frac{d^2}{R^2}\right),$$

$$d \rightarrow \infty \text{ 일 때 } \frac{Q}{\Omega R^2} \rightarrow 2 \ln\left(\frac{d}{R} + 2\right) - 1$$

로 된다.

Fig. 12는 (40)식의 원통에 작용하는 회전모멘트를  $d$ 의 변화에 따라 도시하였다. 여기서,  $d$ 가 무한대로 증가함에 따라서 앞에서 언급한 것과 같이 단일 원통이 받는 모멘트( $M/\mu\Omega R^2 = -4\pi \approx -12.57$ )에 수렴함을 알 수 있고,  $d \rightarrow 0$ 일 때는  $M/\mu\Omega R^2 \rightarrow -2\pi(d/R)^{-1/2}$ 로서 매우 큰 회전모멘트가 원통에 작용함을 알 수 있다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 점성 유체 안에서 크기가 같은 두 원통이 서로 반대방향으로 회전할 때의 유동장을 해석하였다.

1. 원통의 간격이 원통의 반경에 비하여 매우 작은 경우에 두 원통사이의 틈새 가까이에서 정체점이 존재하고 그 점의 바깥에서는 틈새유동의 방향과 반대방향인 유동이 보여지고 있다.

2. 원통의 표면에 나타나는 최소압력은 두 원통의 간격이 작아짐에 따라 매우 큰 음의 값을 갖게되므로 두 원통사이로 지나가는 유체에서 공동현상이 발생가능성을 예측할 수 있다.

3. 전단응력의 분포로부터 원통의 회전속도보다 큰 유속이 두 원통사이에서 나타남을 알 수 있다.

4. 두 원통의 간격이 작아짐에 따라 원통에서 점성에 의하여 발생하는 모멘트는 무한대로 접근하며, 원통이 받는 힘의 합력은 0으로 됨을 알 수 있다.

5. 유체의 점성에 의한 원통에 작용하는 회전모멘트를 두 원통사이의 거리에 따라 알 수 있으므로 두 회전 로울러의 축간거리에 따른 회전모멘트를 예측할 수 있다.

본 연구는 점성유체에 잠긴 두 원통이 회전하는 경우의 유동을 해석적으로 규명하였으며, 이와같은 해석 방법은 각종 베어링이나 로울러 사이의 윤활 유동해석 뿐만 아니라 마이크로 머신이나 미생물운동과 같은 저 Reynolds수 유동분야에도 적용될 수 있을 것이다.

### 후 기

이 논문은 2000년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

### 참고문헌

1. J. Happel and H. Brenner, "Low Reynolds number hydrodynamics," Prentice-Hall Inc., 1965.
2. M.-U. Kim, "Slow viscous flow around a vertical fence on a plane," J. Phys. Soc. Jpn. Vol. 49, No. 6, pp. 2387-2391, 1980.
3. J.-T. Jeong and M.-U. Kim, "Slow viscous flow around an inclined fence on a plane," J. Phys. Soc. Jpn. Vol. 52, No. 7, pp. 2356-2363, 1983.
4. S. Wakiya, "Application of bipolar coordinates to the two-dimensional creeping motion of liquid," II. Some

- problems for two circular cylinders in viscous fluid, *J. Phys. Soc. Jpn.* Vol 39, pp. 1603-1607, 1975.
5. D. H. Michael and M. E. O'Neill, "The separation of Stokes flow," *J. Fluid Mech.* Vol. 80, pp. 785-794, 1977.
  6. S. Wakiya, "Application of bipolar coordinates to the two-dimensional creeping motion of liquid," III. Separation in Stokes flows, *J. Phys. Soc. Jpn.* Vol 45, pp. 1756-1763, 1978.
  7. F. M. White, "Viscous fluid flow," 2nd Ed., McGraw-Hill Inc., pp. 173-174, 1991.
  8. S. J. Farlow, "Partial differential equation for scientists & engineers," *John Wiley & Sons Inc.*, 1982.
  9. J. W. Brown and R. V. Churchill, "Complex variables and applications" 6th. Ed., McGraw-Hill Inc. pp. 48-50, 1996.
  10. A. Cameron, "Basic lubrication theory," Longman 1971.
  11. F. S. Sherman, "Viscous Flow," McGraw-Hill Inc. pp. 240-244, 1990.