1820 대한기계학회논문집 A 권, 제 25 권 제 11 호, pp. 1820~1828, 2001

6-3 스튜워트 플랫폼 운동장치의 운동방정식 해석

김 낙 인† · 이 종 원*

(2001년 4월 16일 접수, 2001년 8월 23일 심사완료)

A New Dynamic Analysis of 6-3 Stewart Platform Manipulator

Nag-In Kim and Chong-Won Lee

Key Words : Stewart Platform Manipulator(스튜워트 플랫폼 운동장치), Lagrangian Equation (라그란지 방정식), Newton-Euler Method(뉴튼-오일러 방법)

Abstract

The dynamics of the 6-3 Stewart platform manipulator (SPM) is newly derived based on the kinematic relations particularly developed for the SPM. The essence of the analysis is to deal with three subsystems of the SPM, each consisting of the command and feedback line links associated with two joined neighboring actuators. The dynamics of the command and feedback line links are first formulated using Lagrange and Newton-Euler method and then combined to derive the dynamic equations of motion for the SPM. The derived nonlinear equations of motion are so computationally effective that it can be easily applied to real-time high-speed tracking control of 6-3 SPM.

1. 서 론

최근, 링크가 직렬로 구성된 운동장치(serial manipulator)에 비해, 정밀위치제어, 운동방향에 대한 강성 및 하중 분산 특성이 상대적으로 우수한 병렬형 운동장치 (parallel manipulator)에 대한 관심이 증가되고 있다. 이러한 장점은, 병렬형 운동장치가 가지는 특성으로 각각의 액추에이터가 부하를 나누어 분담하는 현상에서 기인한다.[1] 그 결과, 병렬형 운동장치는 고속, 고 정밀 및 대 부하를 필요로 하는 곳에 주로 응용되고 있으며, 특히, 6 자유도 병렬형 운동 장치인 스튜워트 플랫폼 운동장치 (Stewart Platform Manipulator: SPM)는 자동차 시뮬레이터,[2] 항공기 시뮬레이터 및 공작기계의 이송장치[3]에 주로 사용되어 왔다. 이러한 병렬형 운동장치에 대한 특성 및 응용연구는 초기 Hunt에 의해서 시작되었으며, 가장 많이 알려진 폐 루프 운동장치에 대한 실제적인 응용은 1965 년 Stewart에 의해서 제안된 SPM[1]으로서 항공기 시뮬레이터의 6 자유도 운동재현장치를 위해 개발되었다.

SPM 의 가장 일반적인 형태인 6-6 SPM 은 순 기구학이 매우 복잡하여 완전 해에 대한 연구 결과가 발표되어 있지 않다.[4] SPM 의 제작 및 설계 관점에서 6-6 SPM 이 제한적 요소를 가장 적게 가지는 구조이지만, 액추에이터를 연결하는 상판, 혹은 하판관절 개수를 3 개로 제작할 수 있는 6-3 SPM 은, 상판(혹은 하판)에 3 개의 관절부만을 가지고 있으므로, 그 크기를 소형화 할 수 있어 haptic device[5] 및 작은 크기의 운동장치[6]를 필요로 하는 설계에 적절하다. 일반적으로, 6-3 SPM (혹은 3-6 SPM)은 6-6 SPM 의 기구학 및 운동방정식[7]을 사용하며, SPM 의 순 기구학 계산을 위해 수치해석방법을 사용하기 위해서는 6x6 행렬에 대한 역행렬을 구해야 하는 단점이 있다. 김 등[8]은 6-3 SPM 을 위한 전용 기구학 해를 유도, 새로운 해석방법을 제시하였으며, 비록 효율화 되지 않은 형태지만, 6-3 SPM 의 운동방정식을 사용하여 고속 실시간 제어에 적용한 예[9]도 발표되고 있다.

주로 저속, 대 부하를 필요로 하는 SPM 의 고전적 응용 분야에서는 각 액추에이터 축 방향 비례-미분-적분제어(PID) 및 적응제어[10] 등이 주로 사용되어져 왔다. 그 이유는, 저속의 운동제어에 필요한 액추에이터의 제어력은 주로 부하의 자중 및 외란 만을 보상하면 되기 때문이다. 한편, 고속운동과 높은 추종성능을 필요로 하는 다 자유도 진동제어[11] 및 공작기계의 이송장치[12] 등의 실 시간제어에서는 운동장치가 고속으로 운동하기 위한 동역학적인 힘이 상대적으로 커서 이를 보상할 수 있는 운동방정식을 기반으로 하는 제어방법이 필요하다.

† 책임저자, 회원, 대우종합기계 중앙 연구소
E-mail : nikim@dhiltd.co.kr
TEL : (032)760-1420 FAX : (032)760-1964
* 회원, 한국과학기술원 기계공학과 소음 및 진동제어센터

본 연구에서는 기 발표된 6-3 SPM 에 대한 기구학 유도[8] 개념에 기초하여 6-3 SPM 에 대한 운동방정식을 유도하였다. CLL(Command Line Link)[8]의 동역학은 상판 및 부하를 Newton-Euler 방법을 이용하였으며, FLL(Feedback Line Link)[8]의 동역학은 Lagrangian 및 Newton-Euler 방법을 이용하여, 액추에이터 축 방향 제어(decentralized control)에 적용할 수 있도록 운동방정식이 유도 되었다. 개발된 운동방정식과 기 발표된 기구학식[8]은 6-3 SPM 을 대상으로 유도되어, 기존 6x6 SPM 을 위해 개발된 기구학 및 운동방정식을 사용하는 것보다 6x3 SPM 의 고속 실시간 제어에 효율적으로 응용할 수 있다.

2. 6-3 SPM 내부 시스템의 운동해석

SPM 은 Fig. 1 과 같이 상판과 하판으로 나뉘며, 상, 하판의 관절 갯수에 따라 *n-m* SPM 이라고 정의한다. 여기서 *n* 은 하판의 관절 갯수이며, *m* 은 상판의 관절 갯수이다. 본 연구에서는 Fig. 1 과 같은 6-3 SPM 에 대한 동역학 해석이며, 6 개의 동일한 선형 액추에이터가 상판과 하판에 연결되어 자유로운 6 자유도 운동을 한다.

2.1 CLL 및 FLL 의 D-H 링크계수 정의

SPM 의 요구신호는 Fig. 1 에서 하판중심, O_B, 에 대한 상판중심, O_U, 의 상대운동, $X=\{x \quad y \quad z \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma\}^T$, 으로 x, y, z 의 선형 운동과 회전 운동으로 피치, α, 롤, β, 요우, γ, 의 값으로 각각 정의될 수 있으며, CLL 의 운동을 정의한다. 상판은 3 개의 관절을 가지므로 CLL 을 구성하는 것은 3 개의 가상적인 개루프 운동장치가 되며, 3 개의 개루프 운동장치는 하판중심에서 상판 중심까지의 가상적인 링크를 공유하고, 상판중심에서 FLL 과 연결되는 관절로 향한다.

FLL 은 SPM 에서 실제 변위를 발생시키고 측정되는 링크라인을 따라 형성된 가상적인 링크이다. 각각의 관절 및 링크는 Fig. 2 와 같은 기하학적인 정의를 이용하여 구성 되었으며, 회전 운동 관절과 직선운동 관절은 Fig. 2 에서 실제적인 액추에이터 b_{i1}-u_i 및 b_{i2}-u_i 에 의해서 변위가 형성되는 가상적인 관절이다. 그러므로, 이 가상적인 관절의 변위 및 회전은 실린더 b_{i1}-u_i 및 b_{i2}-u_i 의 변위에 의해서 결정된다. Fig. 2 에서 SPM 내의 평면 운동장치는, b_{i1} 과 b_{i2} 를 연결하는 가상적인 축을 중심으로 실제적인 액추에이터 b_{i1}-u_i 및 b_{i2}-u_i 을 포함하는 가상적인 평면이 회전, θ_{i2}, 하며, 이 가상적 면내에서 2 개의 실제 적인 선형 액추에이터가 면내에 서 직선, l_{ij}, 과 회전 운동, α_{ij}, 을 하는 형태로 모든 운동을 정의할 수 있다.

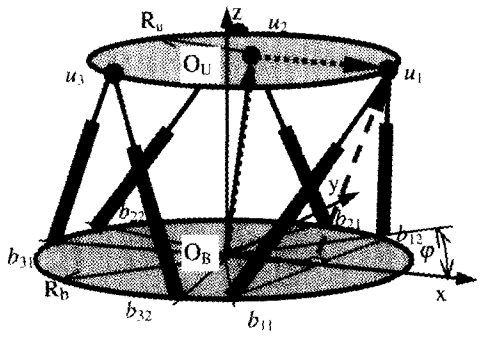

Fig. 1 Stewart platform manipulator and the coordinates (⋯► :Command line link, ━► :Feedback line link)

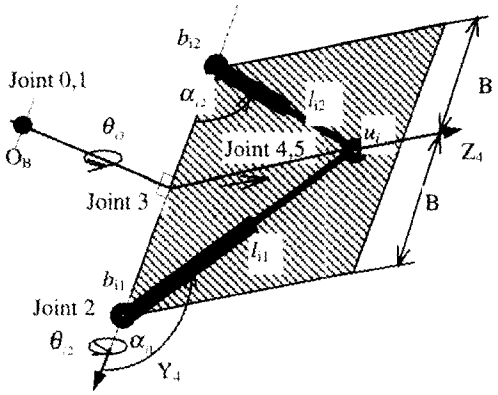

Fig. 2 Definition of plane *i* in the SPM system

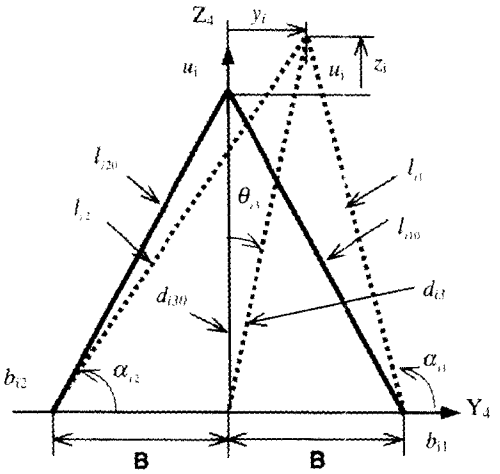

Fig. 3 Motion definition in the plane *i*

FLL 은 CLL 과 같이 3 개의 독립된 링크를 유지한다.

2.2 평면 운동장치의 속도 및 가속도 해석

i 번째 평면 운동장치의 각 액추에이터 길이벡터는 Fig. 3 의 새로이 정의되는 면내 좌표계에 대하여 다음과 같이 도시할 수 있다. 여기서 y-z 평면 상을 운동하는 평면 운동장치만을 고려하므로 x 방향의 운동은

고려 하지 않는다.

$$\boldsymbol{l}_{i1}=\{0 \quad y_i-B \quad d_{i30}+z_i\}^T,\ \boldsymbol{l}_{i2}=\{0 \quad y_i+B \quad d_{i30}+z_i\}^T$$
$$\mathbf{d}_{i3}=\{0 \quad y_i \quad d_{i30}+z_i\}^T,\ i=1,2,3 \tag{1}$$

각 액추에이터가 가지는 방향 여현 (direction consine)은 다음과 같다.

$$\frac{\boldsymbol{l}_{ij}}{|\boldsymbol{l}_{ij}|}=\{0 \quad cos\alpha_{ij} \quad sin\alpha_{ij}\}^T,\ \frac{\mathbf{d}_{i3}}{|\mathbf{d}_{i3}|}=\{0 \quad sin\theta_{i3} \quad cos\theta_{i3}\}^T \tag{2}$$

액추에이터와 FLL 의 가상적인 속도벡터는 Fig. 3 의 평면 운동장치의 꼭지 점, u_i, 에서 동일하다는 원리를 이용하여 다음을 구할 수 있다.

$$\frac{d(\boldsymbol{l}_{ij})}{dt}=\dot{l}_{ij}\frac{\boldsymbol{l}_{ij}}{|\boldsymbol{l}_{ij}|}+\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{ij}\times\boldsymbol{l}_{ij}=\{0 \quad \dot{y}_i \quad \dot{z}_i\}^T$$
$$\frac{d(\mathbf{d}_{i3})}{dt}=\dot{d}_{i3}\frac{\mathbf{d}_{i3}}{|\mathbf{d}_{i3}|}+\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i3}\times\mathbf{d}_{i3}=\{0 \quad \dot{y}_i \quad \dot{z}_i\}^T \tag{3}$$

식 (3)과 액추에이터 속도 및 변위를 이용하여 면내 변수에 대한 속도성분을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix}\dot{\alpha}_{i1}\\ \dot{\alpha}_{i2}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-cot(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})}{l_{i1}} & \frac{csc(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})}{l_{i1}}\\ \frac{-csc(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})}{l_{i2}} & \frac{cot(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})}{l_{i2}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{l}_{i1}\\ \dot{l}_{i2}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{J}_{\alpha i}\dot{\boldsymbol{l}}_i \tag{4}$$

$$\begin{Bmatrix}\dot{y}_i\\ \dot{z}_i\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\alpha_{i1} & 0\\ sin\alpha_{i1} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{l}_{i1}\\ \dot{l}_{i1}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}-l_{i1}sin\alpha_{i1} & 0\\ l_{i1}cos\alpha_{i1} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\alpha}_{i1}\\ \dot{\alpha}_{i2}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{J}_{vzi}\dot{\boldsymbol{l}}_i \tag{5}$$

$$\begin{Bmatrix}\dot{d}_{i3}\\ \dot{\theta}_{i3}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}sin\theta_{i3} & cos\theta_{i3}\\ -\frac{cos_{i3}}{d_{i3}} & \frac{sin\theta_{i3}}{d_{i3}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{y}_i\\ \dot{z}_i\end{Bmatrix}=\boldsymbol{J}_{ci}\dot{\boldsymbol{l}}_i \tag{6}$$

여기서

$$\boldsymbol{l}_i=\{l_{i1} \quad l_{i2}\}^T,\quad \dot{\boldsymbol{l}}_i=\{\dot{l}_{i1} \quad \dot{l}_{i2}\}^T$$

가속도역시 속도와 같이 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d^2(\boldsymbol{l}_{ij})}{dt^2}=\frac{d^2(\mathbf{d}_{i3})}{dt^2}=\{0 \quad \ddot{y}_i \quad \ddot{z}_i\} \tag{7}$$

$$\begin{Bmatrix}\ddot{\alpha}_{i1}\\ \ddot{\alpha}_{i2}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}cot(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})/l_{i1} & -csc(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})/l_{i1}\\ csc(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})/l_{i2} & -cot(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})/l_{i2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{l}_{i1}\\ \ddot{l}_{i2}\end{Bmatrix}$$
$$+\begin{Bmatrix}-2\dot{\alpha}_{i1}\dot{l}_{i1}/l_{i1}-\dot{\alpha}_{i1}^2cot(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})+\dot{l}_{i2}\dot{\alpha}_{i2}^2csc(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})/l_{i1}\\ -2\dot{\alpha}_{i2}\dot{l}_{i2}/l_{i2}+\dot{\alpha}_{i2}^2cot(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})-\dot{l}_{i1}\dot{\alpha}_{i1}^2csc(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})/l_{i2}\end{Bmatrix} \tag{8}$$
$$=\boldsymbol{J}_{\alpha i}\ddot{\boldsymbol{l}}_i+\boldsymbol{V}_{\alpha i}$$

$$\begin{Bmatrix}\ddot{y}_i\\ \ddot{z}_i\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\alpha_{i1} & 0\\ sin\alpha_{i1} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{l}_{i1}\\ \ddot{l}_{i2}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}-l_{i1}sin\alpha_{i1} & 0\\ l_{i1}cos\alpha_{i1} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\alpha}_{i1}\\ \ddot{\alpha}_{i2}\end{Bmatrix}$$
$$+\begin{Bmatrix}-\dot{\alpha}_{i1}\left(2\dot{l}_{i1}sin\alpha_{i1}+\dot{\alpha}_{i1}l_{i1}cos\alpha_{i1}\right)\\ \dot{\alpha}_{i1}\left(2\dot{l}_{i1}cos\alpha_{i1}-\dot{\alpha}_{i1}l_{i1}sin\alpha_{i1}\right)\end{Bmatrix}=\boldsymbol{J}_{vpli}\ddot{\boldsymbol{l}}_i+\boldsymbol{V}_{xpli} \tag{9}$$

$$\begin{Bmatrix}\ddot{d}_{i3}\\ \ddot{\theta}_{i3}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}sin\theta_{i3} & cos\theta_{i3}\\ -cos\theta_{i3}/d_{i3} & sin\theta_{i3}/d_{i3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}_i\\ \ddot{z}_i\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-\dot{\theta}_{i3}^2d_{i3}\\ 0\end{Bmatrix}$$
$$=\boldsymbol{J}_{ci}\ddot{\boldsymbol{l}}_i+\boldsymbol{V}_{ci} \tag{10}$$

$\boldsymbol{\theta}_2=\{\theta_{12} \quad \theta_{22} \quad \theta_{32}\}$ 에 대한 속도, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_2$, 및 가속도, $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_2$, 성분은 Fig. 1 과 같이 FLL 에서 하판 원점과 상판 u_i 까지의 거리관계에서 구할 수 있으며, u_i와 u_j 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{U}_{t,ij}={}^0_4\boldsymbol{P}_{f,i}-{}^0_4\boldsymbol{P}_{f,j},\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,3 \tag{11}$$

여기서

$${}^0_4\boldsymbol{P}_{f,1}=\begin{Bmatrix}R_b cos\varphi-d_{13}cos\theta_{13}sin\theta_{12}\\ -d_{13}sin\theta_{13}\\ d_{13}cos\theta_{12}cos\theta_{13}\end{Bmatrix}$$

$${}^0_4\boldsymbol{P}_{f,2}=\begin{Bmatrix}-\frac{1}{2}R_b cos\varphi+\frac{1}{2}d_{23}\left(cos\theta_{23}sin\theta_{22}+\sqrt{3}sin\theta_{23}\right)\\ \frac{\sqrt{3}}{2}R_b cos\varphi-\frac{1}{2}d_{23}\left(\sqrt{3}cos\theta_{23}sin\theta_{22}-sin\theta_{23}\right)\\ d_{23}cos\theta_{22}cos\theta_{23}\end{Bmatrix}$$

$${}^0_4\boldsymbol{P}_{f,3}=\begin{Bmatrix}-\frac{1}{2}R_b cos\varphi+\frac{1}{2}d_{33}\left(cos\theta_{33}sin\theta_{32}-\sqrt{3}sin\theta_{33}\right)\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}R_b cos\varphi+\frac{1}{2}d_{33}\left(\sqrt{3}cos\theta_{33}sin\theta_{32}+sin\theta_{23}\right)\\ d_{33}cos\theta_{32}cos\theta_{33}\end{Bmatrix}$$

u_i 와 u_j 사이의 거리는 상판상에서 고정된 거리 $|\boldsymbol{U}_{t,ij}|$라는 관계를 이용하면,

$$f_{ij}(\theta_{i2},\theta_{i3},d_{i3},\theta_{j2},\theta_{j3},d_{j3})=P_{x,ij}^2+P_{y,ij}^2+P_{z,ij}^2-|\boldsymbol{U}_{t,ij}|^2=0$$
$$i\neq j,\quad i,j=1,2,3 \tag{12}$$

여기서

$$P_{x,ij}(\theta_{i2},\theta_{i3},d_{i3},\theta_{j2},\theta_{j3},d_{j3})={}^0_4P_{f,ix}-{}^0_4P_{f,jx}$$
$$P_{y,ij}(\theta_{i2},\theta_{i3},d_{i3},\theta_{j2},\theta_{j3},d_{j3})={}^0_4P_{f,iy}-{}^0_4P_{f,jy} \tag{13}$$
$$P_{z,ij}(\theta_{i2},\theta_{i3},d_{i3},\theta_{j2},\theta_{j3},d_{j3})={}^0_4P_{f,iz}-{}^0_4P_{f,jz}$$

식 (12)를 시간에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{df_{ij}}{dt}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_{ij}}{\partial\theta_{i2}} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial\theta_{j2}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\theta}_{i2}\\ \dot{\theta}_{j2}\end{Bmatrix}+$$
$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f_{ij}}{\partial d_{i3}} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial\theta_{i3}} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial d_{j3}} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial\theta_{j3}}\end{bmatrix}\{\dot{d}_{i3} \quad \dot{\theta}_{i3} \quad \dot{d}_{j3} \quad \dot{\theta}_{j3}\}^T=0 \tag{14}$$

$$\boldsymbol{J}_{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 + \boldsymbol{A}_{\theta 3d}\dot{\boldsymbol{P}}_3 = \boldsymbol{0} \tag{15}$$

여기서

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 = \{\dot{\theta}_{12} \quad \dot{\theta}_{22} \quad \dot{\theta}_{32}\}^T, \quad \dot{\boldsymbol{P}}_3 = \{\dot{d}_{13} \quad \dot{\theta}_{13} \quad \dot{d}_{23} \quad \dot{\theta}_{23} \quad \dot{d}_{33} \quad \dot{\theta}_{33}\}^T$$

$\boldsymbol{J}_{\theta}$의 특이조건은 Fig. 2 와 같은 평면운동장치가 b_{i1}-b_{i2}를 연결하는 회전방향으로 토크를 전달할 수 없는, 즉, 평면 운동장치와 상판이 일직선상에 존재할 때 발생한다. 그러므로, 적절하게 설계된 SPM에서 $\boldsymbol{J}_{\theta}$의 특이성은 발생할 수 없다. 그러므로, 식 (10) 및 (8)를 이용해서 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_2$는 다음과 같다.

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 = -[\boldsymbol{J}_{\theta}]^{-1}\boldsymbol{A}_{\theta 3d}\boldsymbol{J}_c\dot{\boldsymbol{i}} \tag{16}$$

여기서

$$\boldsymbol{J}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{c1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{c2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{c3} \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{i}} = \{\dot{i}_{11} \quad \dot{i}_{12} \quad \dot{i}_{21} \quad \dot{i}_{22} \quad \dot{i}_{31} \quad \dot{i}_{32}\}^T$$

$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_2$는 식 (14)를 시간에 대해서 다시 한번 미분하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d^2 f_{ij}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{ij}}{\partial \theta_{i2}} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial \theta_{j2}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{i2} \\ \dot{\theta}_{j2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{ij}}{\partial d_{i3}} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial \theta_{i3}} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial d_{j3}} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial \theta_{j3}} \end{bmatrix}\{\dot{d}_{i3} \quad \dot{\theta}_{i3} \quad \dot{d}_{j3} \quad \dot{\theta}_{j3}\}^T\right) \tag{17}$$

식 (17)을 이용하여 3 개의 평면 운동장치에 대해서 정리하면, 다음과 같은 관계를 구할 수 있다.

$$\dot{\boldsymbol{J}}_{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 + \boldsymbol{J}_{\theta}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 + \dot{\boldsymbol{A}}_{\theta 3d}\dot{\boldsymbol{P}}_3 + \boldsymbol{A}_{\theta 3d}\ddot{\boldsymbol{P}}_3 = \boldsymbol{0} \tag{18}$$

여기서

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 = \{\ddot{\theta}_{12} \quad \ddot{\theta}_{22} \quad \ddot{\theta}_{32}\}^T, \quad \ddot{\boldsymbol{P}}_3 = \{\ddot{d}_{13} \quad \ddot{\theta}_{13} \quad \ddot{d}_{23} \quad \ddot{\theta}_{23} \quad \ddot{d}_{33} \quad \ddot{\theta}_{33}\}^T$$

그러므로, 식 (6), (10), (15) 및 (18)에 의해 $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_2$는 다음과 같이 정리된다.

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 = \boldsymbol{B}_{\theta pp}\ddot{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{B}_{\theta p}\dot{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{B}_{\theta t} \tag{19}$$

여기서

$$\boldsymbol{B}_{\theta p} = -[\boldsymbol{J}_{\theta}]^{-1}\left(\dot{\boldsymbol{A}}_{\theta 3d}\boldsymbol{J}_c - \dot{\boldsymbol{J}}_{\theta}[\boldsymbol{J}_{\theta}]^{-1}\boldsymbol{A}_{\theta 3d}\boldsymbol{J}_c\right)$$

$$\boldsymbol{B}_{\theta pp} = -[\boldsymbol{J}_{\theta}]^{-1}\boldsymbol{A}_{\theta 3d}\boldsymbol{J}_{ct}, \boldsymbol{B}_{\theta t} = -[\boldsymbol{J}_{\theta}]^{-1}\boldsymbol{A}_{\theta 3d}\boldsymbol{V}_{ct}$$

$$\boldsymbol{J}_{ct} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{ct,1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{ct,2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{ct,3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V}_{ct} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{V}_{ct,1} \\ \boldsymbol{V}_{ct,2} \\ \boldsymbol{V}_{ct,3} \end{Bmatrix}$$

3. 운동방정식 해석

3.1 FLL 의 운동방정식

FLL 은 SPM 을 구성하는 실제적인 링크로서 선형

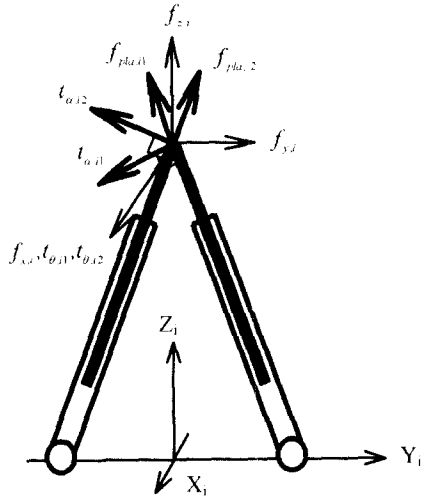

Fig. 4 Forces components on i'th plane motion unit

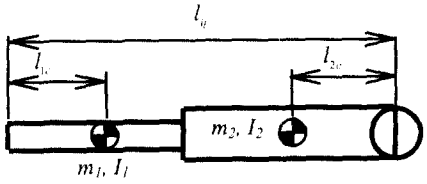

Fig. 5 Mass, rotational inertia and dimensional properties of ij'th actuator

액추에이터로서 형성되었다. 이러한 액추에이터의 운동은 Fig. 2 에서 알수 있듯이, 하나의 평면 운동장치에 2 개의 선형 액추에이터를 가지며, 액추에이터 길이방향의 선형 운동에 의한 면내 직선 및 회전운동을 하고, 상판을 공유하여 3 개의 평면 운동장치 가 하판의 관절을 회전 중심으로 하는 회전 운동으로 분류할 수 있다. 그러므로, 이 평면 운동장치의 운동 방정식을 유도하기 위해 3 개의 평면 운동장치 각각에 대한 운동방정식을 Lagrangian 방법을 이용하였으며, 외부에서 인가되는 힘과 내부적으로 소모되는 에너지는 없다는 가정하에, i 번째의 평면운동장치의 j 번 째 액추에이터 Lagrangian, 일반 좌표계, q, 및 힘 벡터, f, 들은 각각 다음과 같다.

$$\boldsymbol{L}_{E\,i} = \boldsymbol{K}_{E\,i} - \boldsymbol{P}_{E\,i} \tag{20}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}_{E\,i}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}_i}\right) - \frac{\partial \boldsymbol{L}_{E\,i}}{\partial \boldsymbol{q}_i} = \boldsymbol{f}_i, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{21}$$

$$\boldsymbol{q} = \{l_{ij} \quad \alpha_{ij} \quad \theta_{i2}\}^T, \qquad \boldsymbol{f} = \{f_{pla,ij} \quad t_{\alpha ij} \quad t_{\theta ij}\}^T \tag{22}$$

여기서 $\boldsymbol{L}_{E\,i}, \boldsymbol{K}_{E\,i}, \boldsymbol{P}_{E\,i}$ 는 i 번째 평면 운동장치가 가지고 있는 각각의 Lagrangian, 운동에너지 및 위치 에너지이며, 식 (22)에 정의된 $\boldsymbol{q}$ 는 면내 운동장치의 일반

좌표계 벡터이고, $\boldsymbol{f}$는 면내 운동장치의 운동에 의해서 발생하는 동역학적 힘 벡터로서 그 방향은 Fig. 4에 도시 되어 있다.

평면 운동장치를 구성하는 한 개의 선형 운동 액추에이터는 상판과 하판에 각각 연결되는 2 개의 질량요소를 가지고 있으며, 각 질량요소가 가지는 계수는 Fig. 5에 도시 되었다. 그 결과, i 번째 면내 운동장치 중 j 번째 액추에이터가 가지는 운동에너지, $K_{E.ij}$, 및 위치에너지, $P_{E.ij}$, 는 각각 다음과 같다.

$$K_{E.ij} = 0.5I_1\dot{\alpha}_{ij}^2 + 0.5\left\{m_2\left(l_{ij}-l_{2c}\right)^2 + I_2\right\}\dot{\alpha}_{ij}^2 + 0.5m_2 l_{ij}^2 + 0.5I_1\dot{\theta}_{i2}^2 \sin\theta_{i2}^2 + 0.5\left\{m_2\left(l_{ij}-l_{2c}\right)^2 + I_2\right\}\dot{\theta}_{i2}^2 \sin\theta_{i2}^2 \quad (23.a)$$

$$P_{E.ij} = \left\{m_1 l_{1c} + m_2\left(l_{ij}-l_{2c}\right)\right\} g \sin\alpha_{ij} \sin\theta_{i2} \quad (23.b)$$

운동장치를 구성하는 2 개의 액추에이터는 선형 운동 액추에이터 (prismatic joint)이기때문에, 2 개의 액추에이터는 각각의 길이방향으로 힘을 발생할 수 있다. 그 결과, 독립된 한 개의 평면 운동장치에서는 면의 회전 운동에 의한 관성력에 의한 지지력은 존재할 수 없고, SPM 을 구성하는 상판에 연결된 세 점, u_i, 을 연계하여 유도해야 한다. 그 결과, 평면 운동장치에 의해서 발생하는 액추에이터 길이 방향의 힘은 액추에이터 길이방향의 운동에 의한 힘, $\boldsymbol{f}_{pla}$, 면내 회전 운동에 의해서 발생한 힘, $\boldsymbol{f}_{pr}$, 및 평면운동장치의 회전 운동에 의함 힘, $\boldsymbol{f}_{pa}$,로 분류하여, 식 (24)와 같이 세가지 힘을 더해 평면 운동장치의 운동방정식이 된다.

$$\boldsymbol{f}_t = \boldsymbol{f}_{pa} + \boldsymbol{f}_{pla} + \boldsymbol{f}_{pra} \quad (24)$$

i 번째 액추에이터 길이방향의 선형 운동에 의해서 발생되는 관성력, $\boldsymbol{f}_{pla}$, 은 식(21) 및 식(23)으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} f_{pla,i1} \\ f_{pla,i2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{l}_{i1} \\ \ddot{l}_{i2} \end{Bmatrix} + m_2 \begin{Bmatrix} \left(-l_{i1}+l_{2c}\right)\left(\dot{\alpha}_{i1}^2 + \dot{\theta}_{i2}^2 \sin^2\theta_{i2}\right) + g\sin\alpha_{i1}\sin\theta_{i2} \\ \left(-l_{i2}+l_{2c}\right)\left(\dot{\alpha}_{i2}^2 + \dot{\theta}_{i2}^2 \sin^2\theta_{i2}\right) + g\sin\alpha_{i2}\sin\theta_{i2} \end{Bmatrix} \quad (25)$$
$$= \boldsymbol{M}_{2i}\ddot{\boldsymbol{I}}_i + \boldsymbol{V}_{li} + \boldsymbol{G}_{li}$$

그러므로, 3 개의 평면 운동장치가 가지는 운동방정식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{f}_{pla} = \boldsymbol{M}_{pla}\ddot{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{V}_{pla} + \boldsymbol{G}_{pla} \quad (26)$$

여기서

$$f_{pla} = \left\{f_{pla,11} \quad f_{pla,12} \quad f_{pla,21} \quad f_{pla,22} \quad f_{pla,31} \quad f_{pla,32}\right\}^T$$

$$\boldsymbol{M}_{pla} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{22} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{23} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V}_{pla} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{V}_{l1} \\ \boldsymbol{V}_{l2} \\ \boldsymbol{V}_{l3} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_{pla} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{G}_{l1} \\ \boldsymbol{G}_{l2} \\ \boldsymbol{G}_{l3} \end{Bmatrix}$$

여기서 3 개의 평면 운동장치를 구성하는 선형 액추에이터가 가지는 액추에이터 길이방향의 $\boldsymbol{M}_{pla}$ 는 관성질량 행렬이고, $\boldsymbol{V}_{pla}$는 Coriolis 및 원심력 벡터, $\boldsymbol{G}_{pla}$ 는 중력 힘 벡터이다.

i 번째 평면 운동장치의 면내 회전운동에 의해 발생하는 토크, $\boldsymbol{t}_o$, 는 식 (21) 및 식 (23)으로부터 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} t_{\alpha,i1} \\ t_{\alpha,i2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11}+I_2+m_2\left(l_{i1}-l_{2c}\right)^2 & 0 \\ 0 & I_{11}+I_2+m_2\left(l_{i2}-l_{2c}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha}_{i1} \\ \ddot{\alpha}_{i2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m\left(l_{i1}-l_{2c}\right)\dot{l}_{i1}\dot{\alpha}_{i1} \\ m\left(l_{i2}-l_{2c}\right)\dot{l}_{i2}\dot{\alpha}_{i2} \end{Bmatrix} + g\begin{Bmatrix} \left(l_k m_1 + m_2\left(l_{i1}-l_{2c}\right)\right)\cos\alpha_{i1} \\ \left(l_k m_1 + m_2\left(l_{i2}-l_{2c}\right)\right)\cos\alpha_{i2} \end{Bmatrix} \sin\theta_{i2} \quad (27)$$
$$= \boldsymbol{M}_{t\alpha,i}\boldsymbol{J}_{\alpha l,i}\ddot{\boldsymbol{l}}_i + \boldsymbol{M}_{t\alpha,i}\boldsymbol{V}_{\alpha l,i} + \boldsymbol{G}_{t\alpha,i}$$

여기서 회전 관성으로 발생되는 토크를 액추에이터 길이 방향의 선형 힘으로 전환을 해야 하며, Fig. 4 의 기하학적 관계를 이용하여 다음과 같은 관계를 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} f_{pra,i1} \\ f_{pra,i2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cot\left(\alpha_{i1}-\alpha_{i2}\right)}{l_{i1}} & \dfrac{\csc\left(\alpha_{i1}-\alpha_{i2}\right)}{l_{i2}} \\ \dfrac{\csc\left(\alpha_{i1}-\alpha_{i2}\right)}{l_{i1}} & \dfrac{-\cot\left(\alpha_{i1}-\alpha_{i2}\right)}{l_{i2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{\alpha,i1} \\ t_{\alpha,i2} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

그러므로, 식(27) 및 (28)에서

$$\boldsymbol{f}_{pra,i} = \boldsymbol{J}_{t,i}\boldsymbol{M}_{t\alpha,i}\boldsymbol{J}_{\alpha l,i}\ddot{\boldsymbol{l}}_i + \boldsymbol{J}_{t,i}\boldsymbol{M}_{t\alpha,i}\boldsymbol{V}_{\alpha l,i} + \boldsymbol{J}_{t,i}\boldsymbol{G}_{t\alpha,i} \quad (29)$$

과 같이 구할 수 있으며, 3 개의 평면 운동장치의 면내 회전운동에 의한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{f}_{pra} = \boldsymbol{M}_{pra}\ddot{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{V}_{pra} + \boldsymbol{G}_{pra} \quad (30)$$

여기서 3 개의 평면 운동장치가 면내 회전 운동에 의해서 발생하는 액추에이터 길이방향의 $\boldsymbol{M}_{pra}$는 관성질량 행렬이고, $\boldsymbol{V}_{pra}$ 는 Coriolis 및 원심력 벡터, $\boldsymbol{G}_{pra}$ 는 중력 힘 벡터이며 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{f}_{pra} = \left\{f_{pra,11} \quad f_{pra,12} \quad f_{pra,21} \quad f_{pra,22} \quad f_{pra,31} \quad f_{pra,32}\right\}^T$$

$$\boldsymbol{M}_{pra} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{t,1}\boldsymbol{M}_{t\alpha,1}\boldsymbol{J}_{\alpha l,1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{t,2}\boldsymbol{M}_{t\alpha,2}\boldsymbol{J}_{\alpha l,2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{t,3}\boldsymbol{M}_{t\alpha,3}\boldsymbol{J}_{\alpha l,3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}_{pra} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{J}_{t,1}\boldsymbol{M}_{t\alpha,1}\boldsymbol{V}_{\alpha l,1} \\ \boldsymbol{J}_{t,2}\boldsymbol{M}_{t\alpha,2}\boldsymbol{V}_{\alpha l,2} \\ \boldsymbol{J}_{t,3}\boldsymbol{M}_{t\alpha,3}\boldsymbol{V}_{\alpha l,3} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_{pra} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{J}_{t,1}\boldsymbol{G}_{t\alpha,1} \\ \boldsymbol{J}_{t,2}\boldsymbol{G}_{t\alpha,2} \\ \boldsymbol{J}_{t,3}\boldsymbol{G}_{t\alpha,3} \end{Bmatrix}$$

3 개의 면내 운동장치가 하판에 연결된 관절을 회전 중심으로 하는 회전운동에 의해서 발생하는 FLL 끝 단의 힘 및 토크는 Fig. 4 에 도시 되었으며, FLL 끝 단의 좌표계로 표현하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{f}_{p,i} = \left\{f_{x,i} \quad 0 \quad 0\right\}^T, \quad \boldsymbol{n}_{p,i} = \left\{0 \quad 0 \quad 0\right\}^T \quad (31)$$

여기서

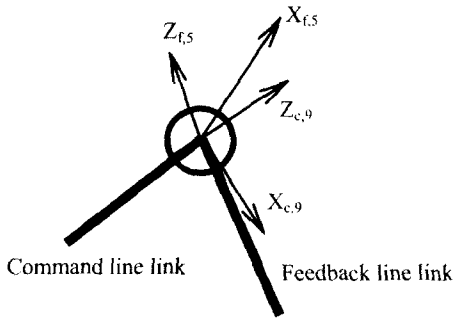

Fig. 6 Virtual joint connecting between CLL and FLL

$$f_{x,i} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{l_{i1}\sin\alpha_{i1}} & \frac{1}{l_{i2}\sin\alpha_{i2}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{\theta,i1} \\ t_{\theta,i2} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}_{r,i} \begin{Bmatrix} t_{\theta,i1} \\ t_{\theta,i2} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

식(20) 부터 (23)까지를 이용하여 구한 토크는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} t_{\theta,i1} \\ t_{\theta,i2} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \sin^2\theta_{i2}\left(I_1 + I_2 + m_2(l_{i1} - l_{2c})^2\right) \\ \sin^2\theta_{i2}\left(I_1 + I_2 + m_2(l_{i2} - l_{2c})^2\right) \end{Bmatrix} \ddot{\theta}_{i2} \\ &+ \begin{Bmatrix} \left(I_1 + I_2 + m_2(l_{i1} - l_{2c})^2\right)\dot{\theta}_{i2}\cos\theta_{i2}\sin\theta_{i2} \\ \left(I_1 + I_2 + m_2(l_{i2} - l_{2c})^2\right)\dot{\theta}_{i2}\cos\theta_{i2}\sin\theta_{i2} \end{Bmatrix} \\ &+ g \begin{Bmatrix} \left(l_{ic}m_1 + m_2(l_{i1} - l_{2c})\right)\cos\theta_{i2}\sin\alpha_{i1} + 2m_2(l_{i1} - l_{2c})l_{i1}\dot{\theta}_{i2}\sin^2\theta_{i2} \\ \left(l_{ic}m_1 + m_2(l_{i2} - l_{2c})\right)\cos\theta_{i2}\sin\alpha_{i2} + 2m_2(l_{i2} - l_{2c})l_{i2}\dot{\theta}_{i2}\sin^2\theta_{i2} \end{Bmatrix} \\ &= \boldsymbol{M}_{t\theta,i}\ddot{\theta}_{i2} + \boldsymbol{V}_{t\theta,i} + \boldsymbol{G}_{t\theta,i} \end{aligned} \quad (33)$$

식 (32)와 (33)에서

$$\boldsymbol{f}_x = \boldsymbol{J}_r \boldsymbol{M}_{t\theta}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 + \boldsymbol{J}_r \boldsymbol{V}_{t\theta} + \boldsymbol{J}_r \boldsymbol{G}_{t\theta} \quad (34)$$

여기서

$$\boldsymbol{f}_x = \begin{Bmatrix} f_{x,1} \\ f_{x,2} \\ f_{x,3} \end{Bmatrix},\ \boldsymbol{J}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{r,1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{r,2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{r,3} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{t\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{t\theta,1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{t\theta,2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{t\theta,3} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{G}_{t\theta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{G}_{t\theta,1} \\ \boldsymbol{G}_{t\theta,2} \\ \boldsymbol{G}_{t\theta,3} \end{Bmatrix}$$

전술한 바와 같이 면내 운동장치가 회전하는 방향, θ_{i2}, 으로 발생한 동역학적 힘은 면내 운동만을 고려하여 구할 수 없고, 3 개의 면내 운동장치, 상판 및 하판을 포함하는 SPM 의 총체적 해석을 통하여 운동방정식을 구할 수 있다. 면에 수직방향의 동역학 힘을 액추에이터 길이방향으로 전환하기 위해 가상적인 관절을 도입하였다. 가상적인 관절은 상판의 3 점 연결부에서 CLL 와 FLL 이 만난다는 원리를 이용하여 Fig. 6 과 같이 CLL 의 끝 단에서 출발하여 FLL 의 끝 단 방향으로 연결시키어 주는 관절이다.

이 관절을 포함한 링크는 회전 성분만 가지고 있으며, 선형변위는 없다는 결과를 이용하여 다음과 같은 전환행렬(transformation matrix)을 구할 수 있다.[13]

$${}^{0}_{9}\boldsymbol{T}_{c}\,{}^{c}_{f}\boldsymbol{T}_{v} = {}^{0}_{4}\boldsymbol{T}_{f},\ {}^{0}_{9}\boldsymbol{R}_{c}\,{}^{c}_{f}\boldsymbol{R}_{v} = {}^{0}_{4}\boldsymbol{R}_{f} \quad (35)$$

여기서

$${}^{c}_{f}\boldsymbol{T}_{v} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & {}^{c}_{f}\boldsymbol{R}_{v} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

회전하는 면에 수직인 방향의 운동에 의해서 발생되는 동역학적 힘, $f_{x,i}$은 상판 중심점의 힘, $\boldsymbol{f}_c$, 과 토크, $\boldsymbol{n}_c$, 로 전환 할 수 있다. 또한, 면내 힘, (f_{yi}, f_{zi}), 은 상판의 중심점으로 유도한 힘, $\boldsymbol{f}_a$, 과 토크, $\boldsymbol{n}_a$, 로 전환할 수 있으며, 두 종류의 힘과 토크는 상판중심에서 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\boldsymbol{f}_c + \boldsymbol{f}_a = \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{n}_c + \boldsymbol{n}_a = \boldsymbol{0} \quad (37)$$

3 개의 평면 운동장치의 회전에 의한 동역학적 힘은 식 (38)과 같이 Newton-Euler 방법을 이용한 힘 전파(static force propagation) 원리[13]를 이용하여, 상판 중심점에 대한 힘과 토크 항으로 전환 된다.

$${}^{i}\boldsymbol{f}_i = {}^{i}_{i+1}\boldsymbol{R}\,{}^{i+1}\boldsymbol{f}_{i+1},\ {}^{i}\boldsymbol{n}_i = {}^{i}_{i+1}\boldsymbol{R}\,{}^{i+1}\boldsymbol{n}_{i+1} + {}^{i}_{i+1}\boldsymbol{P} \times {}^{i}\boldsymbol{f}_i \quad (38)$$

또한, 상판의 중심점은 3 개의 CLL 이 동시에 연결되는 관절이므로, 이점에 대해서 3 개의 면내 운동장치에 대한 운동방정식을 유도하면, 면내 운동장치에 대해 수직인 면 회전에 대한 동역학적 힘을 식 (35), (36) 및 (38)에 의해서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^{7}\boldsymbol{f}_7\big|_{c,i} &= {}^{7}_{8}\boldsymbol{R}\big|_i\,{}^{8}_{9}\boldsymbol{R}\big|_i\,{}^{c}_{f}\boldsymbol{R}_v\big|_i \begin{Bmatrix} f_{x,i} & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \\ &= {}^{0}_{7}\boldsymbol{R}_c^T\,{}^{0}_{4}\boldsymbol{R}_f\big|_i \begin{Bmatrix} f_{x,i} & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} {}^{7}\boldsymbol{n}_7\big|_{c,i} &= {}^{7}_{8}\boldsymbol{R}\big|_i \left({}^{8}_{9}\boldsymbol{P}_c\big|_i \times \left({}^{8}_{9}\boldsymbol{R}\big|_i\,{}^{c}_{f}\boldsymbol{R}_v\big|_i \begin{Bmatrix} f_{x,i} & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \right) \right) \\ &= {}^{7}_{8}\boldsymbol{R}\big|_i\,{}^{8}_{9}\boldsymbol{P}_{c\times}\big|_i\,{}^{7}_{8}\boldsymbol{R}_c^T\big|_i\,{}^{7}\boldsymbol{f}_7\big|_{c,i} \end{aligned} \quad (40)$$

여기서

$${}^{8}_{9}\boldsymbol{P}_{c\times} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{8}_{9}P_{c,z} & {}^{8}_{9}P_{c,y} \\ {}^{8}_{9}P_{c,z} & 0 & -{}^{8}_{9}P_{c,x} \\ -{}^{8}_{9}P_{c,y} & {}^{8}_{9}P_{c,x} & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

상판중심에서 3 개의 면내 운동장치에 의한 회전 운동력을 정리하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{f}_c = \sum_{i=1}^{3} {}^{7}\boldsymbol{f}_7\big|_{c,i} = {}^{0}_{7}\boldsymbol{R}_c^T \boldsymbol{J}_{ri}\boldsymbol{f}_x \quad (42)$$

$$\boldsymbol{n}_c = \sum_{i=1}^{3} {}^{7}\boldsymbol{n}_{\cdot}\Big|_{ip} = \boldsymbol{J}_{c2}\boldsymbol{f}_x \tag{43}$$

FLL 끝 단의 힘을 상판중심에서 발생되는 힘 및 토크로의 전환은 정역학적 힘 전달 원리를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$${}^{7}\boldsymbol{f}_{\cdot}\Big|_{a,i} = {}^{0}_{7}\boldsymbol{R}^{T}_{c}\,{}^{0}_{i}\boldsymbol{R}_{f}\Big|_{i}\begin{Bmatrix}0 & f_{y,i} & f_{z,i}\end{Bmatrix}^{T} \tag{44}$$

$${}^{7}\boldsymbol{n}_{\cdot}\Big|_{a,i} = {}^{7}_{8}\boldsymbol{R}\Big|_{i}\,{}^{8}_{9}\boldsymbol{P}_{c,c}\Big|_{i}\,{}^{7}_{8}\boldsymbol{R}^{T}_{c}\Big|_{i}\,{}^{7}\boldsymbol{f}_{\cdot}\Big|_{a,i} \tag{45}$$

FLL 의 3 개 면내 운동장치 회전에 의해서 발생된 힘은, 상판중심에서 힘 및 토크의 형태로 다음과 같이 합해질 수 있다.

$$\boldsymbol{f}_a = \sum_{i=1}^{3} {}^{7}\boldsymbol{f}_{7}\Big|_{a,i} = {}^{0}_{7}\boldsymbol{R}^{T}_{c}\boldsymbol{J}_{a1}\boldsymbol{f}_{yz} \tag{46}$$

$$\boldsymbol{n}_a = \sum_{i=1}^{3} {}^{7}\boldsymbol{n}_{7}\Big|_{a,i} = \boldsymbol{J}_{a2}\boldsymbol{f}_{yz} \tag{47}$$

여기서

$$\boldsymbol{f}_{yz} = \begin{Bmatrix}f_{y1} & f_{z1} & f_{y2} & f_{z2} & f_{y3} & f_{z3}\end{Bmatrix}^{T}$$

식 (37)은 (46) 및 (47)을 이용하면, 다음과 같다.

$${}^{0}_{7}\boldsymbol{R}^{T}_{c}\left(\boldsymbol{J}_{c1}\boldsymbol{f}_x + \boldsymbol{J}_{a1}\boldsymbol{f}_{yz}\right) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{J}_{c2}\boldsymbol{f}_x + \boldsymbol{J}_{a2}\boldsymbol{f}_{yz} = \boldsymbol{0} \tag{48}$$

최종적으로 면내 운동장치의 회전면에 수직인 관성력, $\boldsymbol{f}_x$, 에 의한, y 및 z 방향으로의 힘, $\boldsymbol{f}_{yz}$, 전환은 식 (37)을 이용하여 다음과 같이 구해진다.

$$\boldsymbol{f}_{yz} = \left[\boldsymbol{J}_a\right]^{-1}\boldsymbol{J}_c\boldsymbol{f}_x \tag{49}$$

여기서

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{J}_{c1}\\ \boldsymbol{J}_{c2}\end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}_c, \quad \begin{Bmatrix}\boldsymbol{J}_{a1}\\ \boldsymbol{J}_{a2}\end{Bmatrix} = -\boldsymbol{J}_a$$

식 (49)는 FLL 의 마지막 관절에 대한 좌표계로서, 액추에이터 길이 방향으로 전환 해야 하며, 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{Bmatrix}f_{y,i}\\ f_{z,i}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha_{i1} & \cos\alpha_{i2}\\ \sin\alpha_{i1} & \sin\alpha_{i2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}f_{ra,i1}\\ f_{ra,i2}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}f_{ra,i1}\\ f_{ra,i2}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dfrac{\sin\alpha_{i2}}{\sin(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})} & \dfrac{\cos\alpha_{i2}}{\sin(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})}\\ \dfrac{\sin\alpha_{i1}}{\sin(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})} & \dfrac{\cos\alpha_{i1}}{\sin(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}f_{y,i}\\ f_{z,i}\end{Bmatrix} \tag{50}$$

$$= \boldsymbol{J}_{1,i}\begin{Bmatrix}f_{y,i}\\ f_{z,i}\end{Bmatrix}$$

그러므로, 면의 회전 운동에 의해서 발생하는 액추에이터 길이 방향의 힘은 식 (19), (34) 및 (50)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{f}_{ra} = \boldsymbol{M}_{ra}\ddot{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{V}_{ra} + \boldsymbol{G}_{ra}. \tag{51}$$

여기서, 3 개의 평면 운동장치가 회전 방향으로 회전할 때 발생하는 액추에이터 길이방향의 $\boldsymbol{M}_{ra}$ 는 관성 질량 행렬이고, $\boldsymbol{V}_{ra}$ 는 Coriolis 및 원심력 벡터, $\boldsymbol{G}_{ra}$ 는 중력 힘 벡터로서 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{M}_{ra} = \boldsymbol{J}_l\left[\boldsymbol{J}_a\right]^{-1}\boldsymbol{J}_c\boldsymbol{J}_r\boldsymbol{M}_{l\theta}\boldsymbol{B}_{\theta pp}$$

$$\boldsymbol{V}_{ra} = \boldsymbol{J}_l\left[\boldsymbol{J}_a\right]^{-1}\boldsymbol{J}_c\left(\boldsymbol{J}_r\boldsymbol{M}_{l\theta}\left(\boldsymbol{B}_{\theta pp}\dot{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{B}_{\theta}\right) + \boldsymbol{J}_r\boldsymbol{V}_{l\theta}\right),$$

$$\boldsymbol{G}_{ra} = \boldsymbol{J}_l\left[\boldsymbol{J}_a\right]^{-1}\boldsymbol{J}_c\boldsymbol{J}_r\boldsymbol{G}_{l\theta}$$

$$\boldsymbol{f}_{ra} = \begin{Bmatrix}f_{ra,11} & f_{ra,12} & f_{ra,21} & f_{ra,22} & f_{ra,31} & f_{ra,32}\end{Bmatrix}^{T}$$

$$\boldsymbol{J}_l = \begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{l,1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{l,2} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{l,3}\end{bmatrix}$$

FLL 을 구성하는 3 개의 운동방정식, $\boldsymbol{f}_{ra}$, $\boldsymbol{f}_{pra}$, $\boldsymbol{f}_{pla}$, 은 SPM 을 구성하는 6 개의 실린더 방향 힘으로 식 (26), (30)및 (51)과 같이 유도되었으며, 각각의 동역학적 힘은 다음과 같이 액추에이터에 의한 운동방정식으로 정의된다.

$$\boldsymbol{f}_F = \boldsymbol{f}_{pla} + \boldsymbol{f}_{pra} + \boldsymbol{f}_{ra} = \boldsymbol{M}_{cyl}\ddot{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{V}_{cyl} + \boldsymbol{G}_{cyl} \tag{52}$$

여기서

$$\boldsymbol{M}_{cyl} = \boldsymbol{M}_{pla} + \boldsymbol{M}_{pra} + \boldsymbol{M}_{ra}, \boldsymbol{V}_{cyl} = \boldsymbol{V}_{pla} + \boldsymbol{V}_{pra} + \boldsymbol{V}_{ra}$$

$$\boldsymbol{G}_{cyl} = \boldsymbol{G}_{pla} + \boldsymbol{G}_{pra} + \boldsymbol{G}_{ra}$$

3.2 Command line link 의 운동방정식 해석

CLL 운동방정식은 상판 위에 설치된 부하 및 상판의 질량에 의한 상판 중심점에서의 힘 및 토크를 Newton-Euler's 방법을 사용하여 구할 수 있다. 상판 중심위치는 3 개의 CLL 이 처음 만나는 관절로서 모든 질량 및 회전 관성 모멘트는 이 점을 중심으로 정의 되며, 식 (53) 및 (54)와 같은 결과를 얻을 수 있다. 관성질량, m_u+m_p, 은 위치에 관계없이 일정하나, 회전 관성 모멘트, ${}^{c7}I$, 는 정의하는 좌표계에 따라 다르므로 이를 고려해야 한다. 상판중심에서 정의 된 회전 관성 모멘트는 SPM 의 상판이 회전 변위가 없을 때, 하판 중심 좌표계에 대한 회전 관성 모멘트이다.

$${}^{7}\boldsymbol{f}_{c,p} = \left(m_u + m_p\right){}^{7}_{0}\boldsymbol{R}_c\begin{Bmatrix}\ddot{x} & \ddot{y} - g & \ddot{z}\end{Bmatrix}^{T} \tag{53}$$

$${}^{7}\boldsymbol{n}_{c,p} = {}^{c7}\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{7} + {}^{7}\boldsymbol{\omega}_{7}\times{}^{c7}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}_{7} = \boldsymbol{M}_p\begin{Bmatrix}\ddot{\alpha} & \ddot{\beta} & \ddot{\gamma}\end{Bmatrix}^{T} + \boldsymbol{V}_p \tag{54}$$

여기서

$$\boldsymbol{M}_p = {}^{c7}\boldsymbol{I}\boldsymbol{J}_{\omega 7}, \quad \boldsymbol{V}_p = {}^{c7}\boldsymbol{I}\boldsymbol{V}_{\omega 7} + {}^{7}\boldsymbol{\omega}_{7\times}{}^{c7}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}_{7}$$

$${}^{c7}\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix}I_{zz} & -I_{zy} & -I_{zx}\\ -I_{zy} & I_{yy} & -I_{yx}\\ -I_{zx} & -I_{yx} & I_{xx}\end{bmatrix}, \boldsymbol{L}_1 = \begin{Bmatrix}0\\ -1\\ 0\end{Bmatrix}$$

$${}^{7}\boldsymbol{\omega}_{7} = \begin{bmatrix}\cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ \cos\beta\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ -\sin\beta & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\gamma}\end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}_{\omega 7}\dot{\boldsymbol{X}}_a$$

$$
{}^{7}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{7} = \begin{bmatrix} \cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ \cos\beta\cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ -\sin\beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin\beta\sin\gamma \\ -\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin\beta\cos\gamma \\ -\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\beta \end{Bmatrix}
$$

$$
= \boldsymbol{J}_{\omega 7}\ddot{\boldsymbol{X}}_{\alpha} + \boldsymbol{V}_{\omega 7}
$$

$$
{}^{7}\boldsymbol{\omega}_{7\times} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{7}\omega_{7z} & {}^{7}\omega_{7y} \\ {}^{7}\omega_{7z} & 0 & -{}^{7}\omega_{7x} \\ -{}^{7}\omega_{7y} & {}^{7}\omega_{7x} & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{7}\boldsymbol{\omega}_{7} = \begin{Bmatrix} {}^{7}\omega_{7x} \\ {}^{7}\omega_{7y} \\ {}^{7}\omega_{7z} \end{Bmatrix}
$$

여기서, m_u는 상판 질량이며, m_p는 상판 위에 설치된 부하 질량이다. $\boldsymbol{I}$는 상판 중심에 대한 초기 위치에서의 상판 및 부하질량에 의한 회전 관성으로서, 식 (53) 및 (54)를 정리하면 다음과 같다.[9]

$$
\begin{Bmatrix} {}^{7}\boldsymbol{f}_{cp} \\ {}^{7}\boldsymbol{n}_{cp} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_u+m_p){}^{7}_{0}\boldsymbol{R}_{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{p} \end{bmatrix} \boldsymbol{J}_{x}\ddot{\boldsymbol{l}} - \begin{bmatrix} (m_u+m_p){}^{7}_{0}\boldsymbol{R}_{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{p} \end{bmatrix} \boldsymbol{J}_{x}\boldsymbol{V}_{acc} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{V}_{p} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g(m_u+m_p){}^{7}_{0}\boldsymbol{R}\boldsymbol{L}_{1} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{55}
$$

여기서[8]

$$
\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{J}_{x}\left(\ddot{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{V}_{acc}\right)
$$

이러한 CLL의 관성력은 3개의 면내 운동장치에 의해서 지지 되며, 그 결과, 식 (46) 및 (47)과 같은 방법으로 SPM 운동장치를 구성하는 6개의 액추에이터 방향 하중으로 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$
\boldsymbol{f}_{xc} = \left[\boldsymbol{J}_{aa}\right]^{-1}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{cp} \\ \boldsymbol{n}_{cp} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} {}^{0}_{7}\boldsymbol{R}_{c}^{T}\boldsymbol{J}_{a1} \\ \boldsymbol{J}_{a2} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}_{ai} \tag{56}
$$

그러므로, 액추에이터 길이 방향의 하중은 식 (51) 및 (56)을 이용하면 다음과 같다.

$$
\boldsymbol{f}_{c} = \boldsymbol{J}_{l}\boldsymbol{f}_{xc} = \boldsymbol{M}_{pay}\ddot{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{V}_{pay} + \boldsymbol{G}_{pay} \tag{57}
$$

여기서

$$
\boldsymbol{M}_{pay} = \boldsymbol{J}_{l}\left[\boldsymbol{J}_{aa}\right]^{-1}\begin{bmatrix} (m_u+m_p){}^{7}_{0}\boldsymbol{R}_{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{p} \end{bmatrix}\left[\boldsymbol{J}_{x}\right]^{-1}
$$

$$
\boldsymbol{V}_{pay} = \boldsymbol{J}_{l}\left[\boldsymbol{J}_{aa}\right]^{-1}\left(-\begin{bmatrix} (m_u+m_p){}^{7}_{0}\boldsymbol{R}_{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{p} \end{bmatrix}\left[\boldsymbol{J}_{x}\right]^{-1}\boldsymbol{V}_{acc} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{V}_{p} \end{Bmatrix}\right)
$$

$$
\boldsymbol{G}_{pay} = \boldsymbol{J}_{l}\left[\boldsymbol{J}_{aa}\right]^{-1}\begin{Bmatrix} g(m_u+m_p){}^{7}_{0}\boldsymbol{R}\boldsymbol{L}_{1} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix}
$$

3.3 6-3 SPM의 운동방정식

6-3 SPM에 대한 전체적인 운동방정식은 SPM을 구성하는 액추에이터, 상판 및 부하질량에 대한 모든 동역학적 힘과 각 액추에이터에서 요구되는 힘 항들로 구성되어야 한다. 결과식(52)은 FLL에 대한 운동방정식이며, 식 (57)은 CLL에 대한 운동방정식이다. 그러므로, 6-3 SPM에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$
\boldsymbol{f}_{spm} = \boldsymbol{M}_{spm}\ddot{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{V}_{spm} + \boldsymbol{G}_{spm} \tag{58}
$$

여기서

$$
\boldsymbol{M}_{spm} = \boldsymbol{M}_{cyl} + \boldsymbol{M}_{pay}, \boldsymbol{V}_{spm} = \boldsymbol{V}_{cyl} + \boldsymbol{V}_{pay}, \boldsymbol{G}_{spm} = \boldsymbol{G}_{cyl} + \boldsymbol{G}_{pay}
$$

4. 결 론

본 연구에서는 6-3 SPM에 대한 운동방정식을 유도하였다. SPM의 운동특성을 분석한 결과, 상판을 제외한 운동장치는 3개의 동일한 면내운동장치로 분류할 수 있었다. 면내 운동장치 각각에 대한 운동방정식과 상판에 대한 운동방정식을 Lagrangian 방법과 Newton-Euler 방법을 이용하여 구한 후, 각각의 운동구속조건을 이용하여, 6-3 SPM에 대한 전체 운동방정식을 구하였다. 본 연구에서 유도한 6-3 SPM의 운동방정식은 기 발표된 기구학식과 함께 적용할 경우, 기구학에서 효율적으로 계산된 결과를 이용하므로, 기존의 6x6 SPM 운동방정식 및 6x3 SPM에 비해서 6-3 SPM의 고속 운동제어에 효율적으로 적용할 수 있다.

참고문헌

(1) Stewart, D., 1965, "A Platform with Six Degree of Freedom," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering*, Vol. 180, Part 1, No. 5, pp. 371~386.

(2) Freeman, J. S., Watson, G., Papelis, Y. E., Lin, T. C., Tayyab, A., Romano, R. A., and Kuhl, J. G., 1995, "The Iowa Driving Simulator: An Implementation and Application Overview," *SAE 950174*, pp. 1~10.

(3) Lebret, G., Liu, K. and Lewis, F. L., 1993, "Dynamic Analysis and Control of a Stewart Platform Manipulator," *Journal of Robotic System*, Vol. 10, No. 5, pp. 629~655.

(4) Griffis, M. and Duffy, J., 1989, "A Forward Displacements Analysis of a Class of Stewart Platforms," *Journal of Robotic System*, Vol. 6, No. 6, pp. 703~720.

(5) Fichter, E. F., 1986, "A Stewart Platform Manipulator: General Theory and Practical Construction," *The International Journal of Robotic Research*, Vol. 5, No. 2, pp. 157~182.

(6) Liu, K., Glenn, R., Lawley, T. J. and Lewis, F. L., 1993, "Stewart-Platform-Based Inlet Duct Painting System," *Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automatons*, pp. 106~113.

(7) Zhang, C. D. and Song, S. M., 1993, "An Efficient Method for Inverse Dynamics of Manipulators Based on the Virtual Work Principle," *Journal of Robotic*

System, Vol. 10, No. 5, pp. 605~627.

(8) 김낙인, 이종원, 2001, "6-3 스튜워트 플랫폼 운동 장치의 새로운 기구학 해석방법," *대한기계학회 학술지*, 제 25 권 8 호, pp. 1206~1212.

(9) Liu, K., Fitzgerald, M. and Lewis, F. L., 1991, "Some Issues about Modeling of the Stewart Platform Manipulator," *Proceeding Second Int. Symposium on Implicit and Robot System*, Warsaw, Poland, pp. 131~135.

(10) Nguyen, C. C., Antrazi, S. S., Xhou, X.-L. and campbell, Jr., C. E., 1993, "Adaptive Control of a Stewart Platform-Based Manipulator," *Journal of Robotic System*, Vol. 10, No. 5, pp. 657~668.

(11) Bormann, J. and Ulbrich, H., 1996, "Isolation of Vibrations to Avoid Dynamic Interactions between a Telescope and Its Foundation by Active Control," *Third International Conference on Motion and Vibration Control*, pp. 88~93.

(12) Lebret, G., Liu, K. and Lewis, F. L., 1993, "Dynamic Analysis and Control of a Stewart Platform Manipulator," *Journal of Robotic System*, Vol. 10, No. 5, pp. 629~656.

(13) Craig, J. J., 1989, Introduction to Robotics, *Addison-Wesley Publishing Company.*