

링보강 복합재료 원통셸의 과도해석

김 영 완*

(2001년 3월 16일 접수, 2001년 8월 1일 심사완료)

Transient Analysis of Composite Cylindrical Shells with Ring Stiffeners

Young-Wann Kim

Key Words : Transient Response(과도응답), Vibration Characteristics(진동특성), Ring Stiffener(링보강재), Composite Cylindrical Shell(복합재료 원통셸), Impulse Pressure(임펄스 압력), Modal Analysis Technique(모달해석법), Discrete Stiffener Theory(이산보강이론)

Abstract

The theoretical method is developed to investigate the effects of ring stiffeners on free vibration characteristics and transient response for the ring stiffened composite cylindrical shells subjected to the impulse pressure loading. In the theoretical procedure, the Love's thin shell theory combined with the discrete stiffener theory to consider the ring stiffening effect is adopted to formulate the theoretical model. The concentric or eccentric ring stiffeners are laminated with composite and have the uniform rectangular cross section. The modal analysis technique is used to develop the analytical solutions of the transient problem. The analysis is based on an expansion of the loads, displacements in the double Fourier series that satisfy the boundary conditions. The effect of stiffener's eccentricity, number, size, and position on transient response of the shells is examined. The results are verified by comparison with FEM results.

1. 서 론

섬유강화 복합재료는 기존의 금속재료에 비해 비강도, 비강성이 매우 우수하기 때문에 이를 이용한 복합재료 적층 구조물은 항공기, 자동차, 압력용기, 잠수함, 미사일 등의 응용구조물에 널리 이용되고 있다. 그러나 설계조건에 맞는 충분한 강성을 얻기 위해 많은 수의 적층을 필요로 하지만 이것은 재료비가 많이 들게 하고, 중량과 같은 제한조건에 의해 두께에 제한을 갖게 한다. 이와 같이 두께 제한을 가짐으로써 나타날 수 있는 현상은 구조물의 안전에 필요한 충분한 강성을 줄 수 없다는 것이다. 따라서 구조물에 충분한 강성을 주기 위해서는 다른 방법이 적용되어야 하며, 이들 방법중의 하나가 보 형태의 보강재로 구조물을 보강하는 것이다.

링보강 원통셸은 압력용기, 항공기, 잠수함, 미사일 등에 널리 이용되고 있는 구조 요소로서 이들 구조물은 다양한 형태의 동적 하중을 받을 수 있으며, 이로 인해 구조물들이 경우에 따라 공진이 발생되어 심한 경우 파괴될 수 있다. 잠수함이나 항공기와 같은 민감한 구조물의 경우 공진에 의한 파괴가 아니더라도 진동은 구조물 파손에 치명적일 수 있기 때문에 이런 구조물의 동적 거동을 분석하여 구조물 설계에 이용되어야 한다. 이처럼 구조물의 동적 거동을 예측하기 위해서는 구조물의 동적 거동을 지배하는 자유진동해석이 우선적으로 선행되어야 하며, 이를 이용하여 동적 거동을 예측하게 된다.

보강 구조물을 이론적으로 해석하는 방법은 크게 두 가지로 분류할 수 있다. 첫번째 방법은 보강재의 강성을 셸구조물에 균일하게 분포시켜 일정 두께를 갖는 직교이방성구조물로 간주하여 해석하는 방법으로 많은 수의 보강재들이 균일한 간격으로 조밀하게 보강된 경우에만 적용 가능하며 확산보강이론이라 한다. 그러나 실제 구조물에서

* 회원, 여주대학교 기계공학과
E-mail : ywkim@yosu.ac.kr
TEL : (061)659-3285 FAX : (061)659-3285

보강재가 서로 근접해있지 않는 경우가 많기 때문에 이 확산보강이론의 적용은 불가능하다. 이에 대응하여 개발된 방법은 이산보강이론으로써 각각의 보강재를 하나의 구조요소로 취급하여 해석하는 방법으로 보강재가 근접해 있지않거나, 균일한 간격으로 보강되지 않은 구조물에 대해서도 좋은 결과를 얻을 수 있다.

링보강 원통셸에 대한 자유진동해석은 많은 연구자에 의해 수행되었다. Mustafa와 Ali,⁽¹⁾ Yang과 Zhou⁽²⁾ 등의 많은 연구자들이 이론적 해석뿐 아니라 유한요소법 또는 실험을 통하여 진동특성에 대한 연구를 하였다. 본 저자⁽³⁾는 직교 보강된 복합재료 원통셸의 고유진동수에 회전이 미치는 영향을 분석하였다. 그러나 언급된 연구의 대부분은 보강재의 형상은 모두 일정하고, 같은 간격으로 보강된 경우에 대해서만 한정적으로 해석을 수행하였다. 실제 구조물은 구조물의 특성상 같은 간격으로 보강될 뿐 아니라 경우에 따라서는 균일하지 않은 간격으로 보강을 할 필요가 있다. 이와 같은 요구조건에 따라 Wang 등⁽⁴⁾은 함수적으로 링이 보강되었거나, 보강재의 크기가 서로 다른 보강셸에 대해 진동해석을 수행하였고, 본 저자⁽⁵⁾는 다양한 경계조건을 갖는 링보강 셸에 대해 진동해석을 수행하여 보강재가 진동수 및 진동형상에 미치는 영향을 연구하였다.

한편 보강 구조물에 대한 동적 해석도 많은 연구자에 의해 오랫동안 수행되었다. Srinivasan와 Krishnan⁽⁶⁾은 모드중첩법을 이용하여 보강 원뿔판넬의 동적해석을 수행하였으며, 보강재에 대해서는 확산이론이 적용되었다. Cheng과 Dade⁽⁷⁾는

spline Gauss collocation 법을 이용하여 판과 판넬에 대한 동적해석을 수행하였다. Pegg⁽⁸⁾는 하나의 링으로 보강된 실린더에 대해 유한요소법을 이용하여 동적 좌굴에 링보강재의 크기, 위치 등이 미치는 영향을 다루었다. Sinha과 Mukhopadhyay⁽⁹⁾는 유한요소법을 이용하여 보강판과 원통 판넬에 대한 과도응답해석을 수행하였다. Pedron과 Combescure⁽¹⁰⁾는 외압을 받는 무한 길이의 보강 원통셸에 대해 과도해석 및 동적 좌굴에 대한 연구를 하였다. 복합재료 구조물에 대해 Liao와 Cheng⁽¹¹⁾은 유한요소법을 이용하여 주기적인 내평면력을 받는 보강판과 판넬에 대한 동적 안정성에 관한 연구를 하였다. Mukhopadhyay와 Goswami⁽¹²⁾는 유한요소법을 이용하여 복합재료 보강 판넬에 대한 과도응답해석을 수행하여 여러 가지 하중종류에 대해 보강재의 편심, 적층방법 등의 영향에 대해 연구하였다. Gong과 Lam⁽¹³⁾은 상용유한요소 code와 경계요소 code를 이용하여 복합재료로 만들어진 잠수함 형태의 동체에 대해 과도응답해석을 수행하였다.

이와 같이 보강 셸, 특히 복합재료로 만들어진 보강셸에 대한 대부분의 연구는 유한요소법을 이용하여 해석을 수행하였으며, 이론적인 연구는 거의 없는 실정이다. 따라서 본 연구에서는 Love의 셸이론과 각각의 보강재를 하나의 구조요소로써 취급하여 해석하는 이산보강이론을 이용하여 링보강 복합재료 원통셸에 대한 과도응답을 예측하기 위한 이론적인 해법을 제시하였다. 에너지법과 Rayleigh-Ritz 법을 적용하여 진동수방정식을, 모달 해석법을 이용하여 과도응답에 대한 운동방정식을

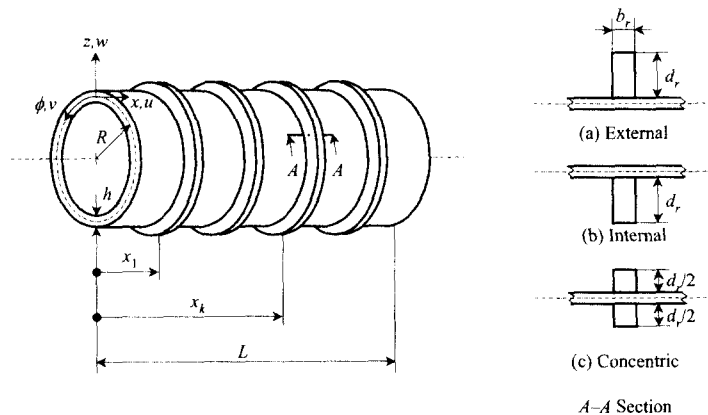


Fig. 1 Coordinate system of ring stiffened cylindrical shells

이론적으로 유도하였다. 보강재의 편심, 위치, 개수 등이 링보강 복합재료 원통셀의 진동특성 및 과도응답에 미치는 영향을 분석하였다. 한편 해의 검증은 위해 링보강 복합재료 원통셀의 진동특성 및 과도응답에 대해 ANSYS 를 이용한 유한요소해석이 이루어 졌다.

2. 수식화

링으로 보강된 원통셀에 대한 형상을 Fig. 1 에 제시하였다. 여기서 R, L 과 k 는 각각 셀의 반경, 길이 및 두께이다. 원통셀은 N_r 개의 링으로 보강되었으며 사각단면을 갖는다.

사각 단면을 갖는 링의 단면 A-A 에서 각각 (a), (b), (c)와 같이 셀의 중립면에 대해 바깥쪽, 안쪽, 대칭으로 보강재가 위치하는가에 따라 외/내부 편심보강, 중립 보강이라 한다. k -번째 보강재는 축방향으로 x_k 에 위치하며, 고려된 하나의 보강셀에서 보강재의 크기는 서로 같은 것을 고려하여 보강재의 폭과 높이를 b_r 와 d_r 로 나타냈다. 원통셀과 링 보강재는 복합재료로 적층되며, 서로 같은 적층방법을 갖는다.

링 보강재는 등간격으로 보강될 뿐만 아니라 보강재간의 간격이 일정 비율로 위치되도록 하였다. Fig. 2 는 보강셀의 한 예로 6 개의 보강재로 보강된 셀에 대해 보강재의 위치를 도시적으로 나타낸 것이다. 여기서 보강재의 위치를 나타내는 함수 x_k 는 식 (1)과 같으며 보강재의 분포 비율 S 에 따라 보강재의 위치가 달라진다. 이 식은 짝수

개의 보강재에 대해서만 적용될 수 있으며, 셀의 축 방향 중심에 대해 셀의 한 쪽길이에 대해서만 정의된다. 결과적으로 셀의 축방향 중심에 대해 보강재가 대칭적으로 위치한다.

k -번째 보강재의 번호가 $N_r/2$ 보다 작은 경우 보강재의 위치를 나타내는 함수 x_k 는 다음과 같이 정의된다.

$$x_k = c_k = \frac{\sum_{i=1}^{N_r/2} S^{i-1}}{2(1+S)}, \quad X = \sum_{i=1}^{N_r/2} S^{i-1} \quad \text{in } k \leq \frac{N_r}{2} \quad (1a)$$

그리고 k -번째 보강재가 $N_r/2$ 보다 클 경우에는 보강재가 셀의 축방향 중심을 기준으로 대칭적으로 분포한다는 특징을 이용하여 식 (1a)를 적용함으로써 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x_k = 1 - c_{N_r/2 - k + 1} \quad \text{in } k > \frac{N_r}{2} \quad (1b)$$

그림에서처럼 보강재의 위치는 S 가 1 보다 클 때는 셀의 양단 부근에, 1 보다 작으면 셀의 중앙 부근에 편중이 되고, 1 이면 셀의 축방향 중심에 대해 같은 간격으로 대칭으로 분포되며 등간격 보강과는 구분이 된다.

고려된 원통셀은 매우 얇기 때문에 평면 응력 상태라 가정할 수 있으므로 보강되지 않은 복합재료 원통셀에 대한 변형에너지를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (A_{11}\epsilon_x^2 + 2A_{12}\epsilon_x\epsilon_\phi + A_{22}\epsilon_\phi^2 + A_{66}\epsilon_{x\phi}^2 + D_{11}\kappa_x^2 + 2D_{12}\kappa_x\kappa_\phi + D_{22}\kappa_\phi^2 + D_{66}\kappa_{x\phi}^2) R dx d\phi \quad (2)$$

여기서 계수 A_{ij}, D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$)는 복합재료 구조물의 신장, 굽힘강성계수이다. Love 의 셀이론으로부터 각 방향에 대한 변형률 ϵ_i 와 곡률 κ_i ($i=x, \phi, x\phi$)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\phi \\ \epsilon_{x\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ (v_{,\phi} + w)/R \\ u_{,\phi}/R + v_{,x} \end{Bmatrix} \quad (3a)$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\phi \\ \kappa_{x\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ (w_{,\phi\phi} - v_{,\phi})/R^2 \\ (2w_{,x\phi} - v_{,x})/R \end{Bmatrix} \quad (3b)$$

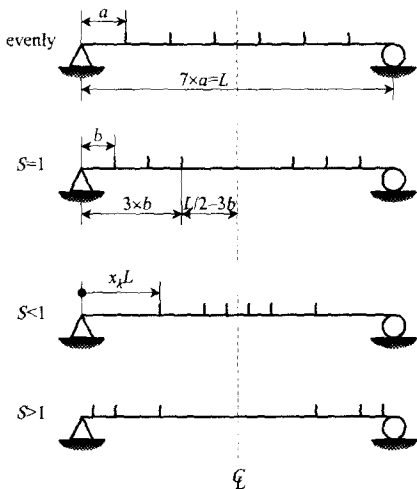


Fig. 2 Ring stiffener arrangement

여기서 u 는 축방향, v 는 원주방향, w 는 수직방향에 대한 변위 성분이며, (\cdot) 는 공간에 대한 미분을 나타낸다.

보강재에 대한 변위(u_r, v_r, w_r)와 셸 변위(u, v, w)와의 관계는 Fig. 3 에서 처럼 셸의 중립면에서 z 만큼 떨어진 보강재의 한 점 B 가 B' 로 변형될 때 기하학적 관계를 이용하여 얻을 수 있다. 우선 링 자체의 변형은 없는 것으로 가정하면, 링 보강재의 변형은 셸의 변형에 지배를 받게 된다. 따라서 이 점에 대한 변위는 x -축에 대한 회전 $\alpha (= -w_{,x})$ 가 매우 작으므로

$$u_r = u + z \sin \alpha \approx u + z\alpha = u - zw_{,x} \quad (4a)$$

$$w_r = w + z' - z = w + z \cos \alpha - z \approx w \quad (4b)$$

가 되며, 같은 방법으로 원주방향 변위에 대해서도 적용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$v_r = v + \frac{z}{R} (v - w_{,\phi}) \quad (4c)$$

k -번째 링에 대한 변형에너지는 링을 빔으로 가정하면 이산 보강이론에 따라 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_k = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_z^{z+\delta} \delta(x-x_k) \times [A_{22}' \varepsilon_{\phi}^2 + D_{66}' \kappa_{x\phi}^2] (R+z) d\phi dz \quad (5)$$

여기서 첨자 (r) 은 보강재를 의미하며, $\varepsilon_{\phi}, \kappa_{x\phi}$ 는 링의 원주방향 변형률 및 비틀림 곡률로써 다음과 같이 정의된다.

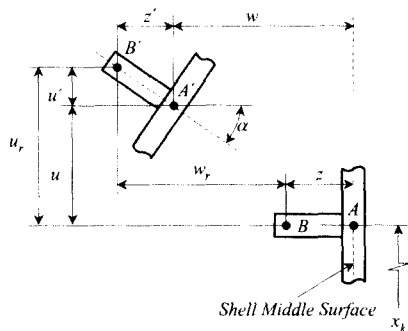


Fig. 3 Deformation of ring-stiffened cylindrical shell

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{1}{R+z} (v_{,r,\phi} + w_r) \quad (6a)$$

$$\kappa_{x\phi} = \frac{1}{R+z} (2w_{r,x,\phi} - v_{r,x}) \quad (6b)$$

보강되지 않은 원통셸 및 링 보강재에 대한 운동에너지는 다음과 같이 정의된다.

$$T_s = \frac{1}{2} \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^L [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dx R d\phi \quad (7)$$

$$T_k = \frac{1}{2} \rho_r b_r \int_0^{2\pi} \int_z^{z+\delta} \delta(x-x_k) \times [\dot{u}_r^2 + \dot{v}_r^2 + \dot{w}_r^2] (R+z) d\phi dz \quad (8)$$

여기서 (\cdot) 는 시간에 대한 미분을 나타내며, ρ, ρ_r 는 셸 및 링보강재의 밀도이다.

한편 Fig. 4 와 같이 셸이 횡하중 $q(x, \phi, t)$ 를 받을 때 행해진 일 W 는 다음과 같이 정의 된다.

$$W = \int_0^L \int_0^{2\pi} q(x, \phi, t) w dx R d\phi \quad (9)$$

본 연구에서 고려된 경계조건은 양단 단순지므로써 다음과 같은 수학적 표현을 갖는다.

$$v = w = N_x = M_x = 0 \quad \text{at } x = 0, L \quad (10)$$

식 (10)의 경계조건을 만족시키는 변위식은

$$u(x, \phi, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N U_{mn} \frac{\psi_m'(x)}{\alpha_m} \cos n\phi \eta_{mn}(t) \quad (11a)$$

$$v(x, \phi, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} \psi_m(x) \sin n\phi \eta_{mn}(t) \quad (11b)$$

$$w(x, \phi, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N W_{mn} \psi_m(x) \cos n\phi \eta_{mn}(t) \quad (11c)$$

$$\psi_m(x) = \sin \alpha_m x, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{L}$$

와 같이 가정될 수 있다. 여기서 U_{mn}, V_{mn} 과 W_{mn} 은 각 방향의 진폭, m, n 는 축방향 및 원주방향 반파수, M, N 는 급수항이다.

2.1 자유진동해석

자유진동해석을 위해 외력 $q=0$ 이며, 변위식에서 $\eta_{mn}(t) = \cos \omega_{mn} t$ 로 놓은 다음 가정된 변위식 (11)을 유도된 각 에너지식에 대입하고 식 (12)의 Rayleigh-Ritz 정리를 적용하면 된다.

$$\frac{\partial}{\partial X}(U_i - T_i) = 0 \quad X = [U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}] \quad (12a)$$

$$U_i = U_s + \sum_{k=1}^{N_s} U_k, \quad T_i = T_s + \sum_{k=1}^{N_s} T_k \quad (12b)$$

식 (12)를 적용하면 다음과 같은 진동수방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (13)$$

여기서 $K_{ij}, M_{ij}(i,j=1,2,3)$ 는 강성 및 질량요소이며, 자세한 표현은 부록에 제시하였다. 식 (13)이 유효해를 갖기 위해서는 행렬식이 0 이 되어야 한다. 잘 알려진 것처럼 이 문제는 고유치문제으로써 수치적으로 풀면 구하고자 하는 구조물의 고유진동수와 진동형상을 얻을 수 있다. 보장되지 않거나 링으로 보강된 원통셀의 경우 원주 방향으로의 균일한 기하학적 성질을 갖기 때문에 진동해석을 할 때 원주 방향에 대해서는 단항 근사를 해도 정확

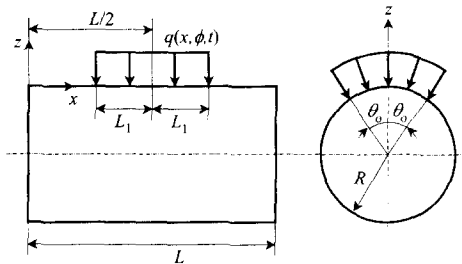


Fig. 4 Distributed force over rectangular area

한 해를 얻을 수 있다. 따라서 식 (13)의 부분행렬 요소는 길이방향 급수항만을 고려한 $(M \times M)$ 크기를 갖는다.

2.2 과도해석

한편 짧은 시간 동안 작용하는 동하중을 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$q(x, \phi, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N F_{mn} \psi_m(x) \cos n\phi f_{mn}(t) \quad (14)$$

여기서 계수 F_{mn} 은 하중의 분포상태에 따라 결정되는 계수이다. 본 연구에서는 Fig. 4 처럼 셀의 중심에서 각각 축방향 길이 L_1 , 원주방향길이 $L_2 (=R\theta_0)$ 의 영역, 즉 작용면적 $A_0 = 2L_1 \times 2L_2$ 에 걸쳐 균일하중이 작용하는 것을 고려하였다. 이때 단위하중에 대한 계수 F_{mn} 을 정리하면 아래와 같다.

$$F_{m0} = \frac{4L_2}{m\pi^2 R} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi L_1}{L} \quad \text{if } n=0 \quad (15a)$$

$$F_{mn} = \frac{8}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi L_1}{L} \sin \frac{nL_2}{R} \quad \text{if } n \neq 0 \quad (15b)$$

하중에 대한 일반적인 표현식 (14)에서 시간에 대한 함수 $f_{mn}(t)$ 를 식 (16)과 같이 합성적분(convolution integral)으로 표현하는 것이 편리하다.

$$f_{mn}(t) = \int_0^t F(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \quad (16)$$

여기서 $F(\tau)$ 는 실제 작용하는 하중이며 ω_{mn} 은 (m, n) 모드에서의 고유 각진동수이다.

본 연구에서 고려한 하중형태는 Fig. 5와 같이 계단형(a), 사인형(b), 직삼각형(c) 및 이등변 삼각형(d) 등 네 가지가 고려되었으며, 이에 대한 합성적분식은 참고문헌⁽¹⁴⁾에 제시되었다.

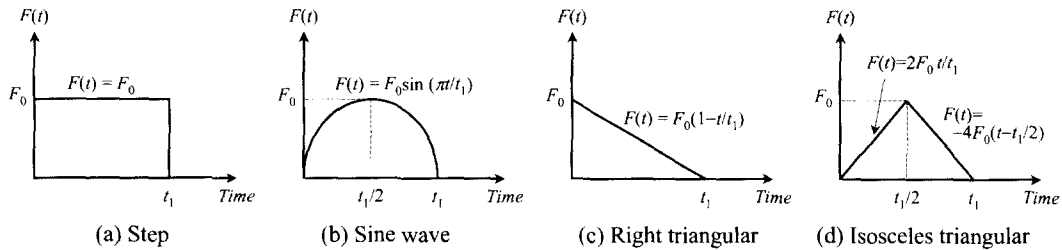


Fig. 5 Considered pulse shapes

Table 1 Convergence and comparison study with FEM of vibration results for the unstiffened/stiffened composite cylindrical shells ($[\pm 45/0/90]_{2s}$, $L/R=2.5$, $d_r=3b_r$, $N_r=4$)

Natural Frequency (Hz)				
<i>M</i> =2	<i>M</i> =6	<i>M</i> =10	<i>M</i> =15	FEM
(a) Unstiffened shell				
428.13(1,5)	428.13(1,5)	428.13(1,5)	428.13(1,5)	419.48(1,5)
455.78(1,4)	455.78(1,4)	455.78(1,4)	455.78(1,4)	450.40(1,4)
510.38(1,6)	510.38(1,6)	510.38(1,6)	510.38(1,6)	500.02(1,6)
653.32(1,7)	653.32(1,7)	653.32(1,7)	653.32(1,7)	640.33(1,7)
659.25(1,3)	659.25(1,3)	659.25(1,3)	659.25(1,3)	656.87(1,3)
(b) Stiffened shell: evenly spaced				
579.18(1,4)	579.18(1,4)	576.63(1,4)	574.62(1,4)	554.48(1,4)
673.14(1,3)	673.14(1,3)	672.25(1,3)	671.55(1,3)	661.61(1,3)
722.65(1,5)	722.65(1,5)	718.08(1,5)	714.69(1,5)	715.92(1,5)
991.38(1,6)	991.38(1,6)	980.71(1,6)	973.76(1,6)	934.37(1,6)
1139.4(2,5)	1139.4(2,5)	1136.1(2,5)	1134.3(2,5)	1098.5(2,5)
(c) Stiffened shell: unevenly spaced with <i>S</i>=0.5				
602.56(1,4)	601.59(1,4)	601.41(1,4)	596.76(1,4)	570.06(1,4)
675.84(1,3)	675.63(1,3)	675.57(1,3)	673.90(1,3)	585.15(1,3)
771.98(1,5)	767.26(1,5)	766.91(1,5)	759.70(1,5)	756.95(1,5)
1067.8(1,6)	1043.2(1,6)	1042.0(1,6)	1032.2(1,6)	970.56(1,6)
1129.4(2,5)	1124.5(2,5)	1123.3(2,5)	1121.8(2,5)	1088.6(2,5)
(d) Stiffened shell: unevenly spaced with <i>S</i>=2.0				
506.10(1,4)	503.53(1,4)	503.16(1,4)	501.96(1,4)	490.61(1,4)
557.70(1,5)	543.13(1,5)	542.27(1,5)	540.35(1,5)	521.73(1,5)
664.84(1,3)	664.43(1,3)	664.32(1,3)	661.13(1,6)	645.05(1,6)
729.67(1,6)	670.80(1,6)	668.65(1,6)	663.94(1,3)	658.25(1,3)
968.38(1,7)	816.10(1,7)	811.46(1,7)	808.60(1,7)	788.98(1,7)

Numbers in (*m*, *n*) represent the axial and circumferential wave numbers.

충격해석을 위해 진동해석과는 달리 $\eta_{mn}(t)$ 를 가정하지 않고 변위식 (11)과 하중식 (14)을 식 (12)의 Rayleigh-Ritz 과정에 적용한 다음 Hamilton 원리를 적용하면 다음과 같으며

$$[M][X]\ddot{\eta}_{mn}(t) + [K][X]\eta_{mn}(t) = [Q]f_{mn}(t) \quad (17)$$

여기서 행렬 $[Q]$ 는 1×3 의 부분행렬로 구성되며, 각 부분행렬은 $[K]$, $[M]$ 행렬과 같이 $(M \times M)$ 의 크기를 갖으며 부록에 자세히 정리되어 있다.

식 (17)의 양변에 $[X]^T$ 를 곱하면

$$[X]^T[M][X]\ddot{\eta}_{mn}(t) + [X]^T[K][X]\eta_{mn}(t) = [X]^T[Q]f_{mn}(t) \quad (18)$$

가 되고 식 (18)의 좌측항의 행렬곱들은 다음과

같은 일반적인 관계를 갖는다.

$$[X]^T[M][X] = [I] \quad [X]^T[K][X] = \omega_{mn}^2 [I] \quad (19)$$

따라서 식 (19)의 일반적인 관계를 이용하면 식 (18)을 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$[I]\ddot{\eta}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 [I]\eta_{mn}(t) = [P]f_{mn}(t) \quad (20)$$

$$[P] = [X]^T[Q]$$

행렬 $[P]$ 는 행렬 $[Q]$ 와 같은 크기를 갖는다. 식 (20)은 $3 \times (M \times M)$ 개의 연립방정식이지만 실질적으로 각 모드 (*m*, *n*)에 대해 독립적인 방정식으로 분리될 수 있다.

식 (20)의 해는 f_{mn} 에 대한 합성함수로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\eta_{mn}(t) = \frac{P_{mn}}{\omega_{mn}} f_{mn}(t) = \frac{P_{mn}}{\omega_{mn}} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \quad (21)$$

따라서 식 (21)를 수직방향 변위식 $w(x, \phi, t)$ 에 대입하여 정리하면 다음과 같이 동하중을 받는 링 보강 원통셀에 대한 수직변위를 구할 수 있다.

$$w(x, \phi, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \frac{W_{mn} P_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\phi \times \int_0^t F(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \quad (22)$$

3. 수치결과 및 토의

본 이론해의 타당성을 검증하기 유한요소해석을 수행하여 그 결과를 비교, 검토하였다. 유한요소해석은 상용프로그램인 ANSYS⁽¹⁵⁾를 이용하였으며, 사용된 요소는 ANSYS 에서 제공하는 적층 셀 요소인 SHELL99 이며, 이 요소는 8-절점, 6-자유도를 갖는다. 고려된 링보강 원통셀의 원주 방향에 대한 진동형상은 원통의 중심을 지나는 모든 축에 대해 대칭적으로 표현할 수 있기 때문에 진동해석을 위한 유한요소해석에서는 1/2 모델만을 취하였으며, 과도 응답해석에서 하중은 셀의 축방향 중심을 기준으로 대칭적으로 작용하기 때문에 1/4 모델을 취하여 유한요소해석을 수행하였다. 진동해석을 위한 고유치 문제는 ANSYS 에서 제공하는

해법 중 비교적 해석시간이 적게 드는 축소 부공간 해석법 (reduced subspace analysis)이 사용되었다. 본 연구에서 고려된 하중인 면압에 대해 적용할 수 있는 방법인 전공간 해석법 (full analysis)이 과도해석을 위해 이용되었다.

한편 Rayleigh-Ritz 정리를 적용하여 정확한 해를 얻기 위해서는 급수항 M, N 에 따라 수렴성을 검토하여야 한다. 물론 급수항이 많으면 많을수록 보다 정확한 결과를 얻을 수 있지만 풀어야 할 행렬의 크기가 커져 계산시간이 많이 소요되기 때문에 보다 효과적인 급수항을 결정할 필요가 있다.

본 연구에서 고려된 복합재료는 graphite/epoxy (AS/3501)로 재료물성과 기본적인 기하자료는 다음과 같다.

$$E_1=137.9\text{GPa}, E_2=9.0\text{GPa}, G_{12}=7.1\text{GPa} \\ \nu_{12}=0.3, \rho=1650\text{kg/m}^3 \\ h=b_r=2\text{mm}, R=0.2\text{m}$$

본 연구에서 고려된 적층방법은 $[\pm 45/0/90]_{2s}$ 의 16 층으로 만들어진 대칭 적층셀이 고려되었으며, 각 층의 두께는 일정하며, 셀과 보강재는 같은 재료 및 적층방법으로 구성된다.

Table 1 은 $L/R=2.5$ 인 비보강 셀과 $d_r=3b_r$ 인 4 개의 링 보강재가 내부에 균일 또는 비균일하게 보강된 복합재료 원통셀에 대한 고유진동수의 수렴성 검토와 유한요소결과와의 비교를 나타낸 것이다. 표에 나타난 것처럼 비보강셀의 경우 축방향 급수항 M 에 대한 영향이 없는 것으로 나타나 단순 지지된 비보강셀에 대한 이론적 진동해석인 경우 단항 근사를 하여도 무방하다는 것을 알 수 있다. 그러나 보강셀의 경우 급수항 M 이 해에 영향

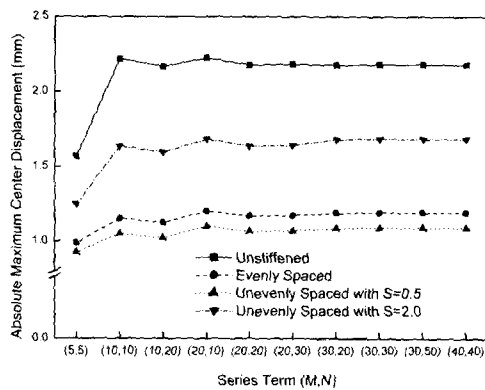


Fig. 6 Convergence study for unstiffened and internally eccentric 4-ring stiffened shells subjected to step pulse loading ($L/R=2.5, d_r=3b_r, A_0=0.1L \times 0.1H, F_0=300\text{kN/m}^2, t_1=2\text{msec}$)

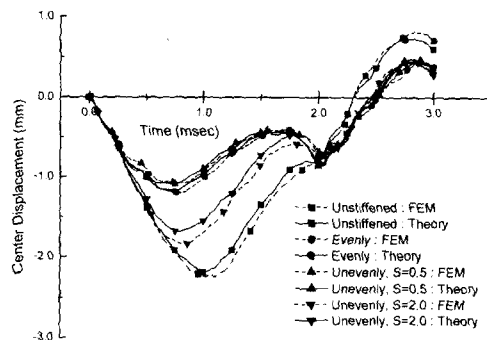


Fig. 7 Comparison of center displacement with FEM for the unstiffened/stiffened shells in Fig. 4

을 미치고 있다. 특히 보강재의 분포 비율 $S=2.0$ 인 보강 셸의 경우 M 에 따른 진동수의 차이가 크게 나타나고 있어 보강셸의 경우 다항 근사를 하여야만 보다 정확한 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 전반적으로 본 해석해가 유한요소결과보다 약간 큰 진동수를 보이 보이고 있으며, 이와 같은 현상은 이미 알려진 바와 같이 일반적으로 이론해는 실험이나 유한요소해에 비해 상한치(upper bound)를 보이고 있기 때문이다.

일반적으로 싸인파나 삼각파 등과 같은 하중이 작용할 때보다 계단파 하중이 작용할 때 변위가 가장 크게 발생되기 때문에 과도응답에 대한 수렴성 검토를 위해 계단파 하중이 고려되었다. Fig. 6 은 Table 1 에서 고려된 비보강 및 보강셸에 대해 셸의 중앙에서의 수직방향 최대처짐에 대한 수렴성을 검토한 것이다. 하중 작용시간 $t_1=2\text{msec}$ 로 하였으며, 셸의 원주길이를 $H(=2\pi R)$ 라 할 때 하중 작용면적은 축방향 및 원주방향에 대해 각각 10%의 길이에 해당되도록 하여 하중 작용 면적은 $A_0 = 0.1L \times 0.1H$ 이다. 이 때 하중의 최대 크기 $F_0 = 300\text{kN/m}^2$ 이다. 그림에 제시된 것처럼 처짐식에서의 급수항 (M,N) 이 (30,30)이상이 되면 고려된 모든 셸에 대해 해가 수렴하는 것을 볼 수 있어 앞으로의 모든 해는 급수항 $(M,N)=(30,30)$ 을 이용하여 계산된다.

Fig. 7 은 Fig. 6 에서 고려된 셸들에 대해 본 이론해와 유한요소결과를 비교한 것으로 유한요소해석결과가 약간 큰 값을 갖으나 비교적 잘 일치하고 있다. 이와 같이 유한요소결과가 조금 큰 것은 식 (22)의 수직방향처짐을 구하는 식에서도 알 수 있듯이 수직방향 처짐은 각진동수에 반비례하기

때문이다. 즉, Table 1 에서 유한요소결과와 진동수가 이론 해보다 작은 값을 갖기 때문에 반대로 처짐은 크게 나타나는 것이다. 그리고 보강을 함으로써 처짐을 크게 줄일 수 있는 것을 볼 수 있으며, 같은 보강재수로 보강을 할 때 보강재의 위치에 따라 그 처짐값도 크게 달라지는 것을 볼 수 있다. $S=0.5$ 의 비율로 보강된 셸의 경우 보강재가 중심쪽으로 편중되기 때문에 중앙에서의 최대처짐이 다른 보강셸보다 작게 나타나고 있으며, $S=2.0$ 으로 보강된 셸은 보강재가 셸의 양단쪽으로 편중되기 때문에 중앙에서의 처짐이 가장 크게 나타나고 있다.

Fig. 8 은 여러 가지 하중에 따른 중앙지점에서의 처짐거동을 보여주고 있다. 고려된 모델은 앞의 경우와 같으며 내부에 균일하게 보강된 셸에 대해 수행되었다. 그림과 같이 계단파 하중을 받을 때 가장 큰 처짐이 발생되며, 그 다음으로는 사인파, 이등변 삼각파, 직삼각파 순으로 처짐이 크게 나타나고 있다. 사인파와 이등변삼각파의 경우 유사한 변위거동을 하고 있으며 이 둘 파에 의한 변위거동이 하중 작용시간의 주기와 거의 동일하게 이루고 있다. 그러나 직삼각파의 경우 변위거동은 하중작용시간보다 짧은 주기로 거동을 하며, 계단파의 경우에는 하중작용주기보다 더 큰 주기로 변위거동을 하고 있다. 이와 같은 현상은 하중이 작용하는 마지막 단계에서 하중의 크기에 따라 변위의 거동주기가 작거나 크게 나타나는 것이다.

Fig. 9 는 6 개의 링이 균일하게 보강된 셸에서 보강재의 편심에 따른 영향을 제시한 것이다. 이 때 $L/R=3$, $F_0=300\text{kN/m}^2$, $A_0 = 0.1L \times 0.1H$, $d_r=5b_r$, 이

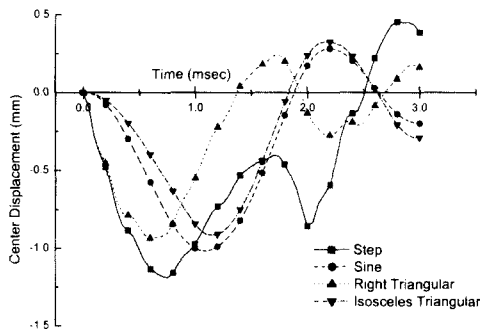


Fig. 8 Effect of pulse loading type on center displacement for the evenly spaced, internally eccentric 4-ring stiffened cylindrical shell ($L/R=2.5$, $d_r=3b_r$, $A_0=0.1L \times 0.1H$, $t_1=2\text{msec}$, $F_0=300\text{kN/m}^2$)

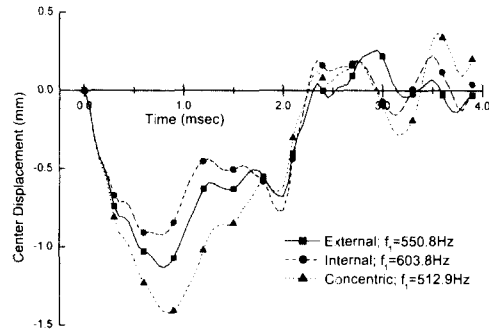


Fig. 9 Effect of stiffener eccentricity on center displacement of the evenly spaced 6-ring stiffened cylindrical shell subjected to step pulse loading ($L/R=3$, $d_r=5b_r$, $F_0=300\text{kN/m}^2$, $A_0 = 0.1L \times 0.1H$, $t_1=2\text{msec}$)

다. 기본진동수는 편심 보강이 중립 보강보다 크며, 편심보강 중에 내부보강이 외부보강보다 큰 진동수를 갖는다. 이와 같은 영향이 셸의 중앙에서의 처짐에서도 나타나고 있다. 즉, 최대처짐이 나오는 시점이 기본진동수의 영향으로 내부보강이 가장 빠른 시간에 나타나며, 진동수가 가장 작은 중립 보강셸이 가장 늦은 시간에 최대처짐이 나타나고 있다. 또한 최대처짐은 내부보강인 경우 가장 처짐을, 중립 보강셸이 가장 큰 처짐을 보여주고 있다. 이와 같은 현상은 수직처짐식 (22)에서도 알 수 있듯이 진동수가 커질수록 처짐은 작아지게 된다.

Fig. 10 은 보강재가 내부에 균일하게 보강된 셸에 대해 등이변 삼각파 하중에 대해 보강재수가 처짐에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 단순히 보강재 하나를 가지고 보강을 하여도 보강하지 않은 셸에 비해 최대처짐을 약 40%정도 감소시킬 수 있어 보강에 따른 효과가 크게 나타난다. 그러나 많은 수의 보강재를 사용함으로써 최대처짐의 감소량이 기하급수적으로 감소하고 있어 처짐을 줄이기 위한 방법으로 보강재를 사용할 경우 효과적인 보강재의 개수를 선택하여야 한다. 보강재의 수에 따라 변위거동의 주기가 다르게 나타난 것은 앞서도 설명한 바와 같이 기본진동수의 영향으로 고려된 모든 셸의 기본진동수 주기가 하중작용 시간보다 크기 때문에 변위거동 주기도 크게 나타나고 있다.

Fig. 11 은 하중 작용면적이 일정할 때 축방향 및 원주방향길이비 (L_1/L_2)에 따른 중앙에서의 변위거동을 보여 주고 있다. 그림에 나타난 것처럼 하중작용면적에서 원주방향 길이가 길수록 변위는

작게 나오지만, 축방향 길이의 변화에 대해서는 그 영향이 매우 작게 나타나고 있으며, 축방향의 길이가 길어질수록 오히려 변위는 작게 나오고 있다. 이와 같이 축방향의 길이가 길어질수록 변위가 작게 나오는 이유는 하중이 작용하는 영역에 많은 수의 보강재가 지지 되어 있어 하중에 대한 저항력이 커지기 때문이다.

Fig. 12 은 6 개의 링이 내부에 보강된 셸에 대해 보강재의 위치변화에 따른 변위거동을 보여 주고 있다. 보강재가 셸의 중앙쪽으로 편중되어 위치하는 $S=0.5$ 의 보강셸에서 가장 큰 기본진동수를 가지며, 셸의 끝단 쪽으로 보강재가 편중되어 위치하는 $S=2.0$ 의 보강셸이 가장 작은 기본진동수를 갖는다. 이와 같은 현상으로 인해 최대 처짐이 일어나는 시간도 서로 다르게 나타나며, 보강재를 중앙쪽으로 위치시킴으로써 셸의 강성이 증가되어 진동수도 커지고, 변위도 작게 나타나는 것이다. 이와 같이 같은 수의 보강재를 이용하여도 보강재의 위치에 따라 셸의 강성이 달라지기 때문에 구조적으로 최적화된 결과를 얻기 위해서는 적절한 보강재의 배치가 요구된다.

Fig. 13 은 보강재의 높이 대 폭의 비가 셸의 변위거동에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 그림에서 처럼 보강재의 높이가 커질수록 기본진동수가 커지는 것을 알 수 있으며, 또한 최대처짐은 작아지는 것을 볼 수 있다. 그러나 보강재의 높이가 증가할수록 최대처짐의 감소폭이 기하급수적으로 줄어들기 때문에 보강재의 높이를 너무 크게 하는 것은 그다지 좋지않다고 할 수 있다. 앞의 여러 예제에서 보았던 것처럼 최대처짐이 발생하는 시점도 기본진동수에 따라 서로 다르게 나타나는 것

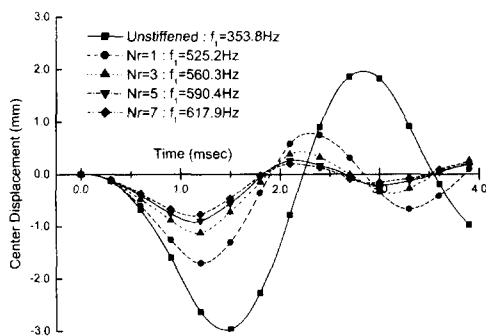


Fig. 10 Effect of stiffener number for the evenly spaced, internally eccentric ring stiffened cylindrical shells subjected to isosceles triangular pulse loading ($L/R=3$, $d_i=5b_r$, $F_0=200\text{kN/m}^2$, $t_1=2\text{msec}$, $A_0 = 0.2L \times 0.1H$)

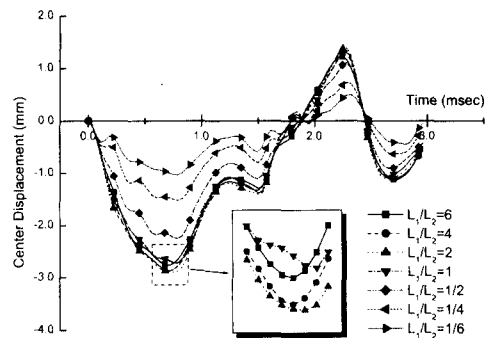


Fig. 11 Effect of loading area for the evenly spaced, internally eccentric 8-ring stiffened cylindrical shells subjected to step pulse loading ($L/R=3$, $d_i=5b_r$, $F_0=500\text{kN/m}^2$, $A_0=1.697 \times 10^{-3}\text{m}^2$, $t_1=1.5\text{msec}$)

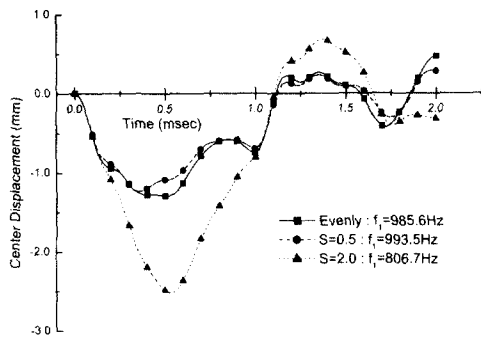


Fig. 12 Effect of space ratio for the internally eccentric 6-ring stiffened cylindrical shells subjected to step pulse loading ($L/R=2$, $d_r/b_r=5$, $F_0=500\text{kN/m}^2$, $A_0=0.2L \times 0.1H$, $t_1=1\text{msec}$)

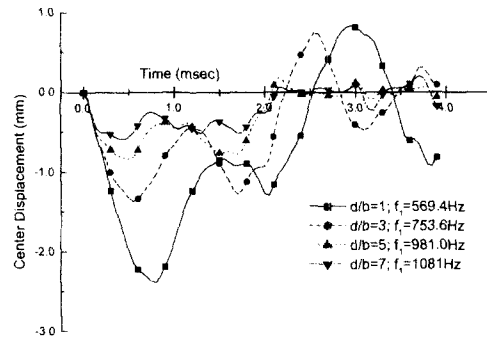


Fig. 13 Effect of stiffener's depth-to-width ratio for the evenly spaced, internally eccentric 5-ring stiffened cylindrical shells subjected to step pulse loading ($L/R=2$, $F_0=300\text{kN/m}^2$, $A_0=0.2L \times 0.1H$, $t_1=2\text{msec}$)

을 알 수 있다. 이 결과로부터 보강재의 높이는 구조물의 진동수나 변위에 미치는 영향이 매우 크다는 것을 알 수 있다. 그러나 그림에서처럼 보강재의 높이를 매우 크게 할 경우 이에 따른 보강효과는 구조물의 질량증가에 비해 그다지 크지않을 것이며, 심한 경우에는 보강재에서 국부적으로 좌굴 등과 같은 구조적 문제가 발생할 수도 있을 것이다.

4. 결론

본 연구에서는 Love 의 셸이론과 이산보강이론을 이용하여 링보강 복합재료 원통셸이 임펄스 하중을 받을 때 과도응답을 예측하기 위한 이론적인 해법을 제시하였다. 에너지법과 Rayleigh-Ritz 법을 적용하여 진동수방정식을, 모달해석법을 이용하여 과도응답에 대한 운동방정식을 이론적으로 유도하였다. 보강재의 편심은 보강셸의 강성에 큰 영향을 미치며, 특히 내부보강이 외부보강보다 효과적이다. 보강을 함으로써 전반적으로 최대 처짐을 줄일 수 있었으나, 어느 수 이상이 되면 최대 처짐의 감소가 거의 일어나지 않는다는 것을 알았고, 마찬가지로 보강재의 높이를 증가시키면 최대 처짐이 크게 줄어들지만 어느 높이 이상에서의 감소폭은 거의 나타나지 않는다. 보강재를 셸의 중앙 쪽으로 적절히 위치시킴으로 최대처짐이 감소하는 것을 알았다. 이상에서처럼 링보강재가 존재함으로써 나타나는 구조적 특성을 분석하여 동적하중에 의한 구조물의 안정성 평가에 유용하게 이용될 수 있으며, 보다 효과적인 보강효과를 얻기 위해서는 보강재수, 높이, 위치 등에 대한 최적설계가 수행되어야 할 것이다.

참고문헌

- (1) Mustafa, B. A. J. and Ali, R., 1987, "Prediction of Natural Frequency of Vibration of Stiffened Cylindrical Shells and Orthogonally Stiffened Curved Panels," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 113(2), pp. 317 ~ 327.
- (2) Yang, B. and Zhou, J., 1995, "Analysis of Ring-Stiffened Cylindrical Shells," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 62, pp. 1005 ~ 1014.
- (3) Lee, Y. S. and Kim, Y. W., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Composite Cylindrical Shells with Orthogonal Stiffeners," *Computers and Structures*, Vol. 69(2), pp. 271 ~ 281.
- (4) Wang, M., Swaddiwudhipong, S., and Tian, J., 1997, "Ritz Method for Vibration Analysis of Cylindrical Shells with Ring Stiffeners," *J. of Engineering Mechanics*, Vol. 123, pp. 134 ~ 142.
- (5) 김영완, 이영신, 1999, "다양한 경계조건을 갖는 링보강 복합재료 원통셸의 진동특성," *한국소음진동공학회지*, Vol. 9(3), pp. 485 ~ 492.
- (6) Srinivasan, R. S., Krishnan, P.A., 1989, "Dynamic Analysis of Stiffened Conical Shell Panels," *Computers and Structures*, Vol. 33(3), pp. 831 ~ 837.
- (7) Cheng, S.P., Dade, C., 1990, "Dynamic Analysis of Stiffened Plates and Shells Using Spline Gauss Collocation Method," *Computers and Structures*, Vol. 36(4), pp. 623 ~ 629.
- (8) Pegg, N. G., 1992, "A Numerical Study of Dynamic Pulse Buckling of Ring-Stiffened Cylinders," *Computers & Structures*, Vol. 44(6), pp. 1205 ~ 1214.
- (9) Sinha, G., Mukhopadhyay, M., 1995, "Transient Dynamic Response of Arbitrary Stiffened Shells by the Finite Element Method," *Journal of Vibration and Acoustics, Trans. of ASME*, Vol. 117(1), pp. 11 ~ 16.

- (10) Pedron, C., Combesure, A., 1995, "Dynamic Buckling of Stiffened Cylindrical Shells of Revolution Under a Transient Lateral Pressure Shock Wave, *Thin-Walled Structures*, Vol. 23(1-4), pp. 85 ~ 105.
- (11) Liao, C L; Cheng, C R , 1994, "Dynamic Stability of Stiffened Laminated Composite Plates and Shells Subjected to In-plane Pulsating Forces," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 174(3), pp. 335 ~ 351.
- (12) Mukhopadhyay, M, Goswami, S, 1996, "Transient Finite Element Dynamic Response of Laminated Composite Stiffened Shell," *Aeronautical Journal*, Vol. 100(996), pp. 223 ~ 233.
- (13) Gong, S.W., Lam, K.Y., 1998, "Transient Response of Stiffened Composite Submersible Hull Subjected to Underwater Explosive Shock," *Composite Structures*, Vol. 41(1), pp. 27 ~ 37.
- (14) Lee, Y.S. and Lee, K.D., 1997, "On the Dynamic Response of Laminated Circular Cylindrical Shells Under Impulse Loads," *Computers and Structures*, Vol. 63(1), pp. 149 ~ 158.
- (15) SASI, 2000, "*ANSYS User's Manual*," Swanson Analysis System Inc., Houston.

부 록

식 (13)에서의 계수 K_{ij}, M_{ij} 들은 다음과 같다.

$$K_{11} = \frac{R\pi}{2} \left(A_{11} \frac{X^{22}}{\alpha_i \alpha_m} + \frac{n^2 A_{33}}{R^2} \frac{X^{11}}{\alpha_i \alpha_m} \right) \quad (A1)$$

$$K_{12} = \frac{Rn\pi}{2} \left(\frac{A_{12}}{R} \frac{X^{02}}{\alpha_i} - \frac{A_{33}}{R} \frac{X^{11}}{\alpha_i} \right) \quad (A2)$$

$$K_{13} = \frac{Rn\pi}{2} \frac{A_{12}}{R} \frac{X^{02}}{\alpha_i} \quad (A3)$$

$$K_{22} = \frac{R\pi}{2} \left[n^2 \left(A_{22} + \frac{D_{22}}{R^2} \right) + A_{33} + \frac{D_{33}}{R^2} \right] \frac{X^{22}}{R^2} + \sum_{k=1}^N \frac{\pi}{2} \left(\frac{d_r}{R} + \frac{S_r}{R^2} \right) \left(n^2 A_{22}^r \Psi^{00} + D_{66}^r \Psi^{11} \right) \quad (A4)$$

$$K_{23} = \frac{Rn\pi}{2} \left[\left(A_{22} + \frac{n^2 D_{22}}{R^2} \right) \frac{X^{00}}{R^2} + \frac{D_{12}}{R^2} X^{02} + 2D_{22} X^{11} \right] + \sum_{k=1}^N \frac{n}{2R^2} \left[nA_{22}^r (n^2 S_r + d_r R) \Psi^{00} + D_{66}^r (4d_r R - I_r) \Psi^{11} \right] \quad (A5)$$

$$K_{33} = \frac{R\pi}{2} \left[\left(A_{22} + \frac{n^2 D_{22}}{R^2} \right) \frac{X^{00}}{R^2} + D_{11} X^{22} - 2 \frac{n^2 D_{12}}{R^2} (X^{02} + X^{20}) + 4 \frac{n^2}{R^2} D_{66} X^{11} \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^N \frac{\pi}{2} \left[D_{66}^r \left(\frac{4d_r}{R} - \frac{3I_r}{R^3} - \frac{I_r'}{R^2} \right) \Psi^{11} + A_{22}^r \left\{ \frac{d_r}{R} + \frac{S_r}{R^2} (2n^2 - 1) + \frac{n^2 I_r}{R^2} (n^2 - 2) - \frac{n^4 I_r'}{R^4} \right\} \Psi^{00} \right] \quad (A6)$$

$$M_{11} = \frac{\rho h R \pi}{2} \frac{X^{11}}{\alpha_i \alpha_m} + \sum_{k=1}^N \frac{\rho_r b_r \pi}{2} (d_r R + S_r) \frac{\Psi^{11}}{\alpha_i \alpha_m} \quad (A7)$$

$$M_{13} = \sum_{k=1}^N \frac{\rho_r b_r \pi}{2} (S_r R + I_r) \frac{\Psi^{11}}{\alpha_i} \quad (A8)$$

$$M_{22} = \frac{\rho h R \pi}{2} X^{00} + \sum_{k=1}^N \frac{\rho_r b_r \pi}{2} (d_r R^3 + 3S_r R^2 + 3I_r R + I_r') \Psi^{00} \quad (A9)$$

$$M_{23} = \sum_{k=1}^N \frac{\rho_r b_r n \pi}{2} (S_r R^2 + 2I_r R + I_r') \Psi^{00} \quad (A10)$$

$$M_{33} = \frac{\rho h R \pi}{2} X^{00} + \sum_{k=1}^N \frac{\rho_r b_r \pi}{2} \left[(d_r R + S_r) \Psi^{00} + \left(\frac{n^2}{R^2} \Psi^{00} + \Psi^{11} \right) (I_r R + I_r') \right] \quad (A11)$$

$$K_{31} = K_{13} \quad K_{32} = K_{23} \quad M_{32} = M_{23} \quad M_{31} = M_{13} \quad (A12)$$

여기서

$$X^{pq} = \int_0^L \frac{\partial^{(p)} \psi_i}{\partial x^{(p)}} \frac{\partial^{(q)} \psi_m}{\partial x^{(q)}} dx \quad (A13)$$

$$\Psi^{pq} = \int_x \delta(x - x_k) \frac{\partial^{(p)} \psi_i}{\partial x^{(p)}} \frac{\partial^{(q)} \psi_m}{\partial x^{(q)}} dx \quad (A14)$$

$$(S_r, I_r, I_r') = \int_{z_0}^{z_1} (z, z^2, z^3) dz \quad (A15)$$

여기서, z_0, z_1 은 셸의 중립면에 대한 보강재의 보강방법에 따라 달라지며, 각 보강방법에 대해 정리하면 다음과 같다.

중립보강인 경우

$$z_0 = -(d_r + h)/2, z_1 = (d_r + h)/2 \quad (A16-a)$$

내/외부 편심보강인 경우

$$z_0 = \mp h/2, z_1 = \mp (d_r + h/2) \quad (A16-b, c)$$

여기서 (-)는 내부, (+)는 외부 편심 보강이다.

식 (17)에서 계수 Q_i 는 다음과 같다.

$$Q_1 = Q_2 = 0, \quad Q_3 = \frac{R\pi}{2} f_{mn} X^{00} \quad (A17)$$