

가중함수법에 의한 기계적 체결홀에 존재하는 타원호형 관통균열의 응력확대계수 해석 (II)

- 혼합모드 응력확대계수 해석 -

허성필[†] · 양원호^{*} · 류명해^{**}

(2001년 3월 28일 접수, 2001년 7월 6일 심사완료)

Stress Intensity Factor Analysis of Elliptical Arc Through Cracks at Mechanical Fastener Holes by Weight Function Method (II)

- Mixed-Mode Stress Intensity Factor Analysis -

Sung-Pil Heo, Won-Ho Yang and Myung-Hai Ryu

Key Words: Stress Intensity Factor(응력확대계수), Weight Function Method(가중함수법), Elliptical Arc Through Crack(타원호형 관통균열), Mechanical Fastener Hole(기계적 체결홀), Finite Element Analysis(유한요소해석), Clearance(간극), Contact(접촉)

Abstract

Cracks at mechanical fastener holes usually nucleate as elliptical corner cracks at the faying surface of the mechanical joints and grow as elliptical arc through cracks. The weight function method for elliptical arc through cracks at mechanical fastener holes has been developed and verified in the part I of this study. In part II, applying the weight function method, the effects of the amount of clearance on the mixed-mode stress intensity factors are investigated and the change of crack shape is predicted from the analysis for various crack shapes. The stress intensity factors for inclined crack are analyzed and critical angle at which mode I stress intensity factor becomes maximum is determined.

1. 서론

기계적 체결홀(mechanical fastener hole)에서의 균열은 주로 타원형 모서리균열의 형태로 발생하고 점차 두께를 관통하여 타원호형 관통균열(elliptical arc through crack)의 형태로 성장해 나간다.^(1,2) 체결부 균열에 대한 파괴역학적 해석은 주로 2차원 관통균열 모델에 대해 수행되었으나,^(3,4) 균열의 발생 및 성장 양상을 정확히 모사하기 위해서는 3차원 균열에 대한 해석이 필요하다.

두께를 관통한 직후에 해당하는 타원호형 관통균열에 대해서는 Fawaz^(1,2)가 유한요소해석을 통해 응력확대계수를 해석하였으나, 볼트부를 무시하거나, 접촉압력 분포를 가정하여 해석을 수행하였고, 대칭 균열의 모드 I 문제만을 다루었다. 이러한 해석으로는 실제 체결부에 존재하는 간극에 의한 영향을 평가할 수 없으며, 대칭균열 모델은 보다 실제적인 단일균열에서 나타나는 모드 II 및 모드 III의 효과를 정확히 고려하지 못하게 된다.

체결홀에서의 균열 발생은 작용 하중 뿐 아니라 제조 과정 및 재료 자체의 결함 등에 의해서도 발생할 수 있으므로, 경사균열에 대한 파괴역학적 특성의 파악이 또한 필요하다. Ju⁽⁴⁾는 체결홀에 존재하는 2차원 균열에 대하여 모드 I 응력

[†] 책임저자, 회원, 성균관대학교 대학원 기계공학과

E-mail : spheo@orgio.net

TEL : (031)290-7496 FAX : (031)290-5849

^{*} 회원, 성균관대학교 기계공학부

^{**} 안동정보대학 건축잘못된 계산식설비과

확대계수가 최대가 되는 임계 경사각의 존재를 제시하였고, 저자 등⁽⁵⁾은 경사각에 따른 응력확대계수의 연속적 변화를 해석하여 이를 결정하고, 간극의 크기와 균열길이의 영향을 조사하였다.

본 연구의 목적은 기계적 체결홀에 존재하는 타원호형 관통균열에 대해 유효한 가중함수법을 적용하여 혼합모드 응력확대계수를 해석하는 것이다. 체결홀에 존재하는 3차원 균열에 대한 유한요소해석은 접촉부와 균열을 동시에 포함하여 특히 여러 하중조건이나 간극(clearance)조건에 대한 반복적인 파괴역학적 평가에서 많은 해석시간이 소요된다. 가중함수법은 균열이 없는 모델에 대한 응력해석을 바탕으로 한 접근이므로 이러한 유한요소해석의 한계를 극복할 수 있을 것이다.

이를 위하여 I 편⁽⁶⁾에서는 기계적 체결홀에 존재하는 타원호형 관통균열에 대한 가중함수법을 전개하고 그 타당성을 입증하였다. II 편에서는 이러한 가중함수법을 적용하여 간극의 크기에 따른 양 표면점의 모드 I, 모드 II, 모드 III 응력확대계수를 해석하였고, 균열형상에 대한 영향을 평가하였다. 또한 경사각에 따른 응력확대계수 해석을 수행하고 모드 I이 최대가 되는 임계 경사각을 결정하였다.

2. 혼합모드 응력확대계수

2.1 해석 모델의 개요

Fig. 1과 같이 기계적 체결홀에 반지름 방향으로 타원호형 관통균열이 존재하고 있고, 외부에 균일 인장력을 받고 있는 평판에 대하여 해석을 수행하였다. 홀의 크기는 지름 12.5mm로 고정되어 있고, 볼트부의 크기를 바꾸어 간극의 크기를 조절하였다. 그림에서 c_1 과 c_2 는 각각 균열 발생면과 그 반대면에 해당하는 양쪽 표면에서의 균열길이이고, a 는 타원의 깊이를 나타낸다. a 는 균열 경사각을 지시하고, 균열선단의 양 표면점은 선단 A와 선단 B로 표기하였다. 사용된 재료는 탄성계수가 68.95GPa, 푸아송의 비가 0.25인

$$K_{I(A)} = \int_0^{c_1} h_{I(A)}^{(\sigma_y)}(x, c_1) \sigma_y(x) dx \quad (1)$$

$$K_{II(A)} = \int_0^{c_1} h_{II(A)}^{(\tau_{xy})}(x, c_1) \tau_{xy}(x) dx \quad (2)$$

$$K_{III(A)} = \int_0^{c_1} h_{III(A)}^{(\tau_{xz})}(x, c_1) \tau_{xz}(x) dx \quad (3)$$

식 (1)~(6)에서 $\sigma_y(x)$, $\tau_{xy}(x)$, $\tau_{xz}(x)$, $\tau_{yz}(x)$ 는 균열면이 될 위치에서의 수직응력과 전단응력 분포를 나타내며, 균열이 없는 모델에 대한 응력해석으로부터 얻게 된다. x' 와 z' 는 각각 선단 B에서 타원 경계에 법선 및 접선방향을 지시하는 국부

$$K_{I(B)} = \int_0^{c_2} h_{I(B),1}^{(\sigma_y)}(x, c_2) \sigma_y(x) dx + \int_{c_2}^{c_1} h_{I(B),2}^{(\sigma_y)}(x, c_2) \sigma_y(x) dx \quad (4)$$

$$K_{II(B)} = \int_0^{c_2} \{h_{II(B),1}^{(\tau_{xy})}(x, c_2) \tau_{xy}(x) + h_{II(B),1}^{(\tau_{yz})}(x, c_2) \tau_{yz}(x)\} dx + \int_{c_2}^{c_1} \{h_{II(B),2}^{(\tau_{xy})}(x, c_2) \tau_{xy}(x) + h_{II(B),2}^{(\tau_{yz})}(x, c_2) \tau_{yz}(x)\} dx \quad (5)$$

$$K_{III(B)} = \int_0^{c_2} \{h_{III(B),1}^{(\tau_{xz})}(x, c_2) \tau_{xz}(x) + h_{III(B),1}^{(\tau_{yz})}(x, c_2) \tau_{yz}(x)\} dx + \int_{c_2}^{c_1} \{h_{III(B),2}^{(\tau_{xz})}(x, c_2) \tau_{xz}(x) + h_{III(B),2}^{(\tau_{yz})}(x, c_2) \tau_{yz}(x)\} dx \quad (6)$$

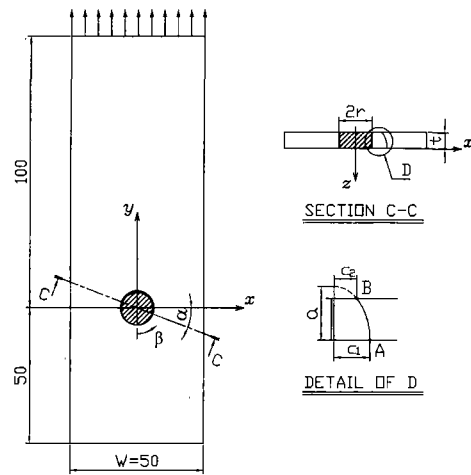
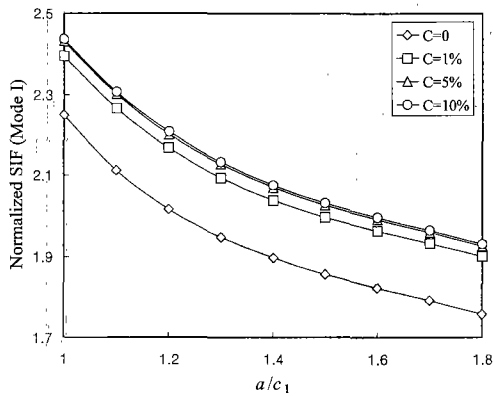


Fig. 1 Configuration of an elliptical arc through crack at mechanical fastener holes

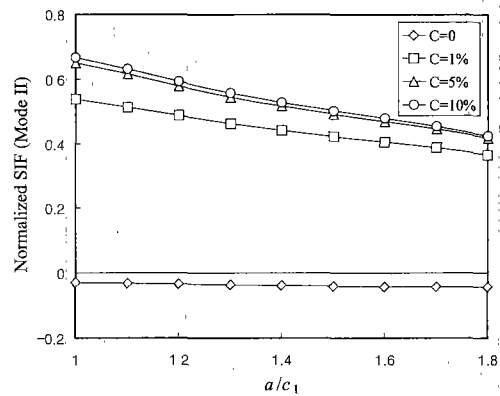
알루미늄이며, 유한요소해석은 상용 프로그램인 ABAQUS를 이용하였다.

2.2 간극의 크기에 따른 응력확대계수

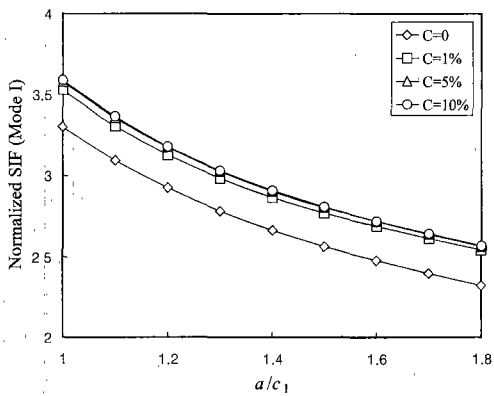
가중함수법에 의해 기계적 체결홀에 존재하는 수평한 타원호형 관통균열에 대하여 혼합모드 응력확대계수를 해석하였다. I 편⁽⁶⁾의 가중함수법의 전개를 바탕으로 선단 A에 대해서는 식 (1)~(3), 선단 B에 대해서는 식 (4)~(6)으로부터 모드 I, 모드 II, 모드 III 응력확대계수를 구하였다.



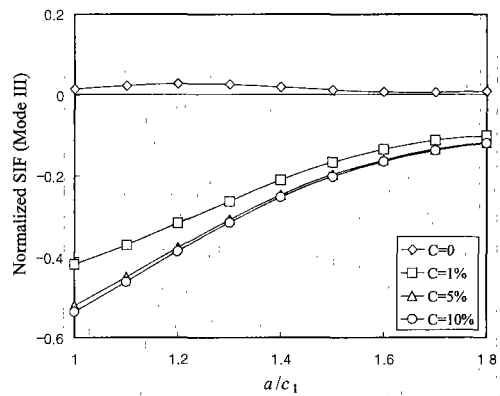
(a) Tip A



(a) Mode II



(b) Tip B



(b) Mode III

Fig. 2 Effects of the amount of clearance on mode I stress intensity factors

Fig. 3 Effects of the amount of clearance on mode II and mode III stress intensity factors

좌표계이다.⁽⁶⁾

균열길이 $at=1.5$ 인 경우에 대하여 균열형상을 달리한 해석 결과를 Fig. 2, 3에 나타내었다. Fig. 2(a), (b)는 각각 선단 A와 선단 B에서의 모드 I 응력확대계수이고, Fig. 3(a), (b)는 각각 선단 B에서의 모드 II, 모드 III 응력확대계수이다. 실제 체결부에는 사용되는 볼트 또는 리벳의 크기에 따라 간극이 존재하게 되며 이러한 간극의 크기가 응력확대계수에 미치는 영향을 조사하기 위해서 간극이 없는 경우와 간극의 크기가 홀 지름의 1%, 5%, 10%인 경우에 대해 응력확대계수를 구하였다.

Fig. 2에서 두 선단 모두 균열형상에 상관없이 모드 I 응력확대계수는 간극이 존재하면 간극이 없는 경우에 비하여 상대적으로 크게 증가하지

만, 간극의 크기는 응력확대계수에 큰 영향을 미치지 못함을 볼 수 있다. 이는 실제로 간극이 존재하는 체결부 균열을 간극이 없는 모델로 이상화하여 파괴역학적 평가를 수행한다면 응력확대계수를 과소 평가하게 됨을 의미한다.

Fig. 3으로부터 모드 II와 모드 III 응력확대계수에 대한 간극의 크기 영향은 모드 I에서와 대체로 유사함을 볼 수 있다. 또한 전체적으로 간극이 없는 경우의 모드 II, 모드 III 응력확대계수는 거의 0에 가까운 값으로 볼 수 있으나, 간극이 존재하는 경우에는 무시할 수 없는 크기의 모드 II, 모드 III 응력확대계수가 나타나며 이는 선단 A의 경우에도 마찬가지이다. 따라서 기계적 체결홀에 존재하는 타원호형 관통균열은 간극이 없는 경우에는 순수 모드 I 상태에 가까우며, 간

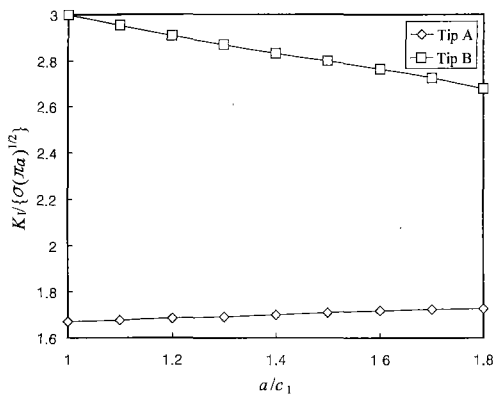


Fig. 4 Effects of crack shape on stress intensity factors

극이 존재하는 경우에는 균열면이 작용하중에 수직일지라도 혼합모드 상태임을 알 수 있다.

Fig. 2, 3과 같이 여러 간극조건에 대한 응력확대계수 해석에서 실제 접촉부와 균열을 포함한 3차원 유한요소해석은 해석에 매우 많은 시간이 소요된다. 가중함수법은 균열이 없는 모델에 대한 응력해석만을 수행하게 되므로, 간극의 영향을 파악하는데 매우 효과적인 접근이라고 할 수 있겠다.

본 연구에서는 $1 \leq a/c_1 \leq 1.8$ 인 범위에서 응력확대계수를 해석하였으나, 이외의 범위에 대해서도 기준응력확대계수를 구하면 균열이 아주 크거나 작은 경우를 제외하고 타당하게 가중함수법을 적용할 수 있을 것이다.

2.3 균열형상에 따른 응력확대계수

Fig. 4는 균열깊이 $a/t=1.2$ 이고 간극의 크기가 홀 지름의 1%인 경우에 대하여 균열형상비에 따른 모드 I 응력확대계수를 나타낸 것이다. 균열형상비의 증가는 타원호형 관통균열의 균열선단 형상이 타원에서 직선으로 가까워져 감을 의미하며, 균열형상의 영향을 조사하기 위하여 응력확대계수의 무차원화에서 형상계수를 배제하였다.

그림에서 형상비에 상관없이 선단 B의 모드 I 응력확대계수가 선단 A보다 상대적으로 큰 값이며, 형상비가 증가함에 따라 선단 A의 응력확대계수는 점차 증가하며, 선단 B의 응력확대계수는 감소함을 볼 수 있다. 만일 형상비가 무한대로 커져 완전한 직선 관통균열이 되면 두 선단에서

의 응력확대계수가 같아질 것이다. 그림과 같이 균열깊이가 고정된 상태에서 형상비가 증가하면 전체 균열면 면적이 작아지게 되므로 동일한 균열면의 면적에 대해서는 선단 A의 응력확대계수 증가가 그림에서보다 약간 크게 평가될 것이다. 이로부터 기계적 체결홀에서 모서리균열의 형태로 발생한 균열이 두께를 관통하여 타원호형 관통균열의 형상이 되면 균열발생의 반대면에 해당하는 선단 B가 선단 A보다 빠르게 진전할 것이며, 점차 타원형 균열선단이 직선에 가까워져 갈 것임을 예측해 볼 수 있다.

3. 임계 경사각

3.1 경사진 타원호형 관통균열에 대한 가중함수법의 적용

경사진 균열에 대해 가중함수법을 적용하기 위해서는 가중함수의 미정계수가 I 편⁽⁶⁾ 4장의 절차와 같이 기준응력확대계수들로부터 결정되므로, 각 경사각에 대해 이 값들을 구해야 한다. Table 1, 2는 $a/t=1.2$, $a/c_1=1.5$ 인 타원호형 관통균열에 대하여 수평균열과 서로 다른 경사각을 갖는 2개의 경사균열에 대해 각각 선단 A와 선단 B에서의 기준응력확대계수들을 비교하여 나타낸 것이다. 값의 경향을 확인하기 위하여 식 (7)과 같은 형태의 기준하중에서 n 이 0, 1, 2에 해당하는 3개씩의 기준응력확대계수만을 표에 나타내었다.

$$\sigma_y(x) = \sigma_0 \left(1 - \frac{x}{c_1}\right)^n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

I 편⁽⁶⁾의 5.2절에서 설명한 바와 같이 수평균열과 경사균열에 대해 가상균열단힘법^(7,8)을 적용하여 기준응력확대계수를 해석하였고, Fig. 5는 경사균열에 대한 유한요소모델을 나타낸다.

외부하중에 대한 해석이라면 경사각에 따라 응력확대계수에 차이가 날 것이나, 본 연구에서 고려하고 있는 기준하중은 균열면에 작용하는 하중이고, 홀에 반지름 방향으로 존재하는 균열에 대한 해석이므로 표의 결과에서와 같이 수평균열과 경사균열에서의 기준응력확대계수가 거의 동일한 값을 알 수 있다. 물론 균열길이나 경사각이 매우 클 때에는 차이가 있을 수 있겠으나, 본 연구의 해석범위에서는 거의 차이가 없는 것으로 볼 수 있겠다.

Table 1 Reference stress intensity factors at tip A of horizontal and inclined elliptical arc through cracks

	Horizontal	Inclined	
$\alpha(\text{deg})$	0	18	36
$F_{I(A),1}^{(\sigma)}$	0.9963	1.000	1.006
$F_{I(A),2}^{(\sigma)}$	0.3436	0.3461	0.3507
$F_{I(A),3}^{(\sigma)}$	0.2036	0.2056	0.2091
$F_{II(A),1}^{(\tau)}$	1.133	1.131	1.127
$F_{II(A),2}^{(\tau)}$	0.4544	0.4532	0.4508
$F_{II(A),3}^{(\tau)}$	0.2899	0.2890	0.2874
$F_{III(A),1}^{(\tau)}$	-0.3553	-0.3547	-0.3536
$F_{III(A),2}^{(\tau)}$	-0.1757	-0.1754	-0.1747
$F_{III(A),3}^{(\tau)}$	-0.1149	-0.1146	-0.1141

Table 2 Reference stress intensity factors at tip B of horizontal and inclined elliptical arc through cracks

	Horizontal	Inclined	
$\alpha(\text{deg})$	0	18	36
$F_{I(B),1}^{(\sigma)}$	1.265	1.274	1.290
$F_{I(B),2}^{(\sigma)}$	0.7808	0.7861	0.7965
$F_{I(B),3}^{(\sigma)}$	0.5216	0.5255	0.5331
$F_{II(B),1}^{(\tau)}$	3.288	3.287	3.285
$F_{II(B),2}^{(\tau)}$	2.155	2.154	2.152
$F_{II(B),3}^{(\tau)}$	1.547	1.547	1.546
$F_{III(B),1}^{(\tau)}$	-1.715	-1.715	-1.716
$F_{III(B),2}^{(\tau)}$	-1.092	-1.092	-1.092
$F_{III(B),3}^{(\tau)}$	-0.7820	-0.7822	-0.7826
$F_{III(B),1}^{(\tau)}$	0.3176	0.3189	0.3206
$F_{III(B),2}^{(\tau)}$	0.1178	0.1189	0.1207
$F_{III(B),3}^{(\tau)}$	0.04247	0.04099	0.03851
$F_{III(B),1}^{(\tau)}$	-1.742	-1.741	-1.739
$F_{III(B),2}^{(\tau)}$	-0.9983	-0.9976	-0.9963
$F_{III(B),3}^{(\tau)}$	-0.6411	-0.6407	-0.6397

볼트부와 체결홀과의 접촉범위를 고찰하기 위하여 균열이 없는 모델에서의 접촉압력 분포를 Fig. 6에 나타내었다. 그림에서 접촉범위를 지시하는 각도 β 는 Fig. 1로부터 균열 경사각 α 와 $\beta = 90^\circ - \alpha$ 의 관계를 가짐을 알 수 있다. Fig. 6은 간

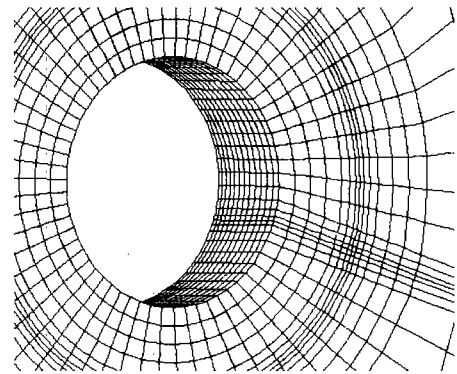


Fig. 5 Finite element mesh for an inclined elliptical arc through crack at mechanical fastener holes

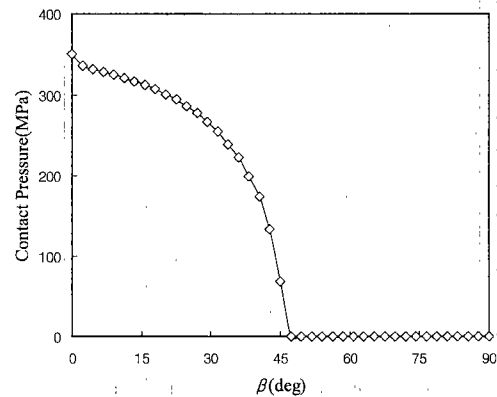
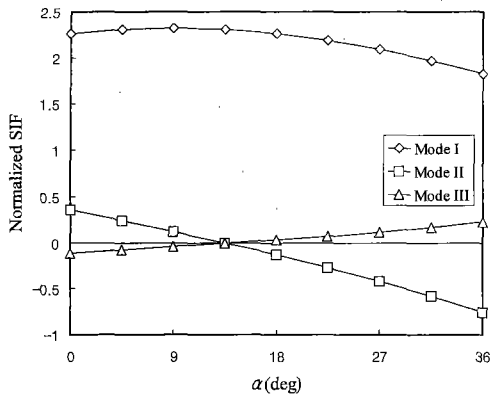


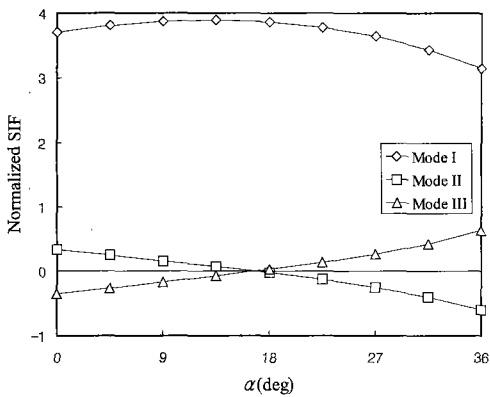
Fig. 6 Contact pressure distribution along the hole boundary

극의 크기가 홀 지름의 1%인 경우인데, 접촉범위가 50° 미만임을 볼 수 있으며, 간극의 크기가 이보다 커지면 접촉범위는 더 작아질 것이다. 균열이 존재하면 균열의 형상에 따라 접촉범위에 약간의 차이가 발생할 수 있겠으나, 간극의 크기가 1% 이상인 경우에 균열 경사각 40° 이내의 범위에서는 균열의 아래면에서만 접촉이 일어날 것이다. 따라서 본 연구의 해석범위 내의 경사 균열에서는 균열 윗면에서 접촉이 발생하여 균열의 변형이 억제되는 현상은 발생하지 않게 되며, 따라서 수평균열에 대해서와 유사하게 가중합수법을 적용할 수 있을 것이다.

이상의 검토를 바탕으로 기계적 체결홀에 존재하는 경사진 타원호형 관통균열에 대한 가중합수



(a) SIF at tip A



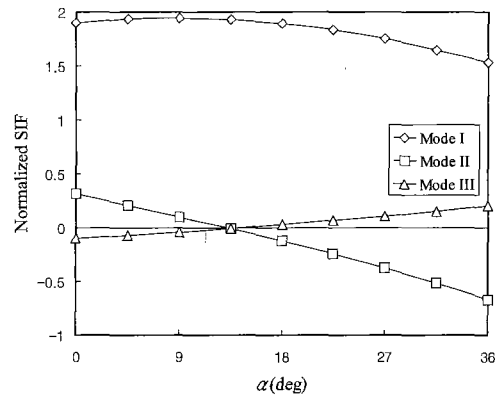
(b) SIF at tip B

Fig. 7 Stress intensity factors along inclined angle of elliptical arc through crack ($C=1\%$, $a/t=1.2$, $a/c_1=1.5$)

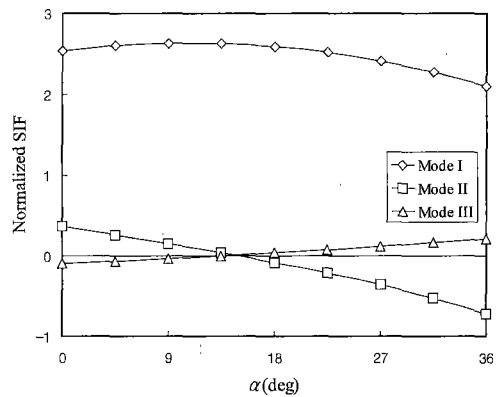
법의 적용에서는 균열이 없는 모델에서 얻은 응력 데이터를 응력요소의 회전을 통해 경사진 균열면상의 수직응력과 전단응력으로 변환시키고, 가중함수는 경사균열에서의 기준하중에 대한 추가적인 해석 없이 수평균열에서의 계수를 그대로 사용할 수 있을 것이다.

3.2 임계 경사각의 결정

기계적 체결부 간극의 크기가 홀 지름의 1%이고, $a/t=1.2$, $a/c_1=1.5$ 인 타원호형 관통균열에 대하여 가중함수법에 의해 경사각에 따른 선단 A와 선단 B에서의 모드 I, 모드 II, 모드 III 응력확대계수를 구하고 이를 각각 Fig. 7(a)와 7(b)에 나타내었다.



(a) SIF at tip A



(b) SIF at tip B

Fig. 8 Stress intensity factors along inclined angle of elliptical arc through crack ($C=5\%$, $a/t=1.5$, $a/c_1=1.8$)

그림에서 선단 A와 선단 B 모두 경사각이 증가함에 따라 모드 I 응력확대계수는 증가하다가 감소하며, 모드 II 및 모드 III 응력확대계수는 0으로 감소하다가 부호가 바뀌어 증가해 가는 경향을 볼 수 있다. 또한 모드 II와 모드 III 응력확대계수가 0이 되는 경사각이 거의 일치함을 알 수 있다. 이러한 경향은 Fig. 8에 나타낸 간극이 홀 지름의 5%이고, $a/t=1.5$, $a/c_1=1.8$ 인 형상에서도 마찬가지이다. 이는 특정의 경사각에서 모드 II 및 모드 III 응력확대계수는 0이 되면서 모드 I 응력확대계수가 최대가 되는 순수 모드 I 상태가 되며, 결국 2차원 균열⁽⁵⁾과 유사하게 가장 위험한 상황에 해당하는 임계 경사각이 존재함을 의미한다. 물론 유한요소해석 및 가중함수법의 적용에

서 수반되는 수치적 오차 등의 영향으로 모드 II, 모드 III 응력확대계수가 0이 되면서 모드 I이 최대가 되는 경사각이 정확하게 일치하지는 않지만 적은 범위 내에서 이러한 임계 경사각을 결정할 수 있다. 또한 이 결과로부터 작용하중에 수직인 수평균열에서 혼합모드 상태인 이유가 모드 II, 모드 III 응력확대계수가 공존하기 때문임을 알 수 있다. 따라서 균열이 없는 모델에 대한 응력장과 수평균열에서의 기준응력확대계수를 이용하여 경사각에 따른 응력확대계수를 해석하고, Fig. 7, 8과 같은 선도를 작성하면 임계 경사각 및 최대 응력확대계수를 쉽게 결정할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 기계적 체결홀에 존재하는 타원호형 관통균열에 대해 I 편에서 타당성을 입증한 가중함수법을 적용하여 혼합모드 응력확대계수를 해석하고 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 기계적 체결홀에 존재하는 타원호형 관통균열의 응력확대계수는 간극이 존재하면 간극이 없는 경우에 비하여 상대적으로 크게 증가하지만, 간극의 크기는 응력확대계수에 큰 영향을 미치지 않는다.

(2) 간극이 없는 경우에는 순수 모드 I 상태에 가까우며, 간극이 존재하는 경우에는 작용하중에 수직인 균열일지라도 혼합모드 상태이다.

(3) 기계적 체결홀에서 모서리균열의 형태로 발생한 균열이 두께를 관통하여 타원호형 관통균열의 형상이 되면 균열발생의 반대면에서 균열이 빠르게 진전하여 타원형 균열선단이 점차 직선에 가까워져 간다.

(4) 기계적 체결홀에 존재하는 타원호형 관통균열에는 가장 위험한 상황인 모드 I 응력확대계수가 최대가 되는 임계 경사각이 존재한다.

(5) 본 연구의 절차를 따라 경사균열에 대한 추가적인 해석 없이 수평균열에 대한 기준응력확대계수를 이용하여 임계 경사각 및 최대 응력확대계수를 쉽게 결정할 수 있다.

후 기

본 논문은 한국과학재단 산하 성균관대학교 산업설비 안전성평가 연구센터의 연구비 지원으로

이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Fawaz, S. A., 1998, "Application of the Virtual Crack Closure Technique to Calculate Stress Intensity Factors for Through Cracks with an Elliptical Crack Front," *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 59, No. 3, pp. 327~342.
- (2) Fawaz, S. A., 1999, "Stress Intensity Factor Solutions for Part-Elliptical Through Cracks," *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 63, pp. 209~226.
- (3) Cartwright, D. J. and Parker, A. P., 1982, "Opening Mode Stress Intensity Factor for Cracks in Pin-Loads Joints," *Int. J. of Fracture*, Vol. 18, No. 1, pp. 65~78.
- (4) Ju, S. H., 1997, "Stress Intensity Factors for Cracks in Bolted Joints," *Int. J. of Fracture*, Vol. 84, pp. 129~141.
- (5) 허성필, 양원호, 정기현, 2000, "가중함수법에 의한 볼트 체결부 균열의 임계 경사각 결정에 관한 연구," *대한기계학회논문집 A권*, 제24권, 제9호, pp. 2344~2352.
- (6) 허성필, 양원호, 현철승, "가중함수법에 의한 기계적 체결부에 존재하는 타원호형 관통균열의 응력확대계수 해석(I) - 가중함수법의 전개," *대한기계학회논문집 A권*, 제25권, 제10호, pp. 1659~1670.
- (7) Raju, I. S., 1986, "Calculation of Strain-Energy Release Rates with Higher Order and Singular Finite Elements," *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 28, No. 3, pp. 251~274.
- (8) Shivakumar, K. N, Tan., P. W. and Newman Jr., J. C., 1988, "A Virtual Crack-Closure Technique for Calculating Stress Intensity Factors for Cracked Three Dimensional Bodies," *Int. J. of Fracture*, Vol. 36, pp. R43~R50.