

최소 제곱 무요소법과 적분 오차

박 상 훈* · 윤 성 기†

(2001년 2월 27일 접수, 2001년 7월 21일 심사완료)

Least-Squares Meshfree Method and Integration Error

Sang-Hoon Park and Sung-Kie Youn

Key Words: Least-Squares(최소 제곱), Meshfree Method(무요소법), Meshless Method(무요소법), Moving Least-Squares(이동 최소 제곱), Integration Error(적분 오차)

Abstract

Least-squares meshfree method is presented. Conventional meshfree methods based on the Galerkin formulation suffer from inaccurate numerical integration. Least-squares formulation exhibits rather different integration-related characteristics. It is demonstrated through numerical examples that least-squares formulation is much more robust to integration errors than the Galerkin's. Therefore efficient meshfree methods can be devised by combining very simple integration algorithms and least-squares formulation.

1. 서 론

기술의 빠른 발전과 더불어 보다 다양한 공학 문제에 대한 전산 해석의 필요성이 나날이 증대되고 있다. 현재 가장 널리 쓰이고 있는 수치 해석 방법의 하나인 유한요소법은 굳건한 수학적 배경을 가지고 있는 효율적인 방법으로 다양한 공학 문제에 성공적으로 적용되어 왔다. 그런데, 균열 전파와 같이 경계가 변하는 문제, 성형 공정 해석과 같은 대변형 문제 및 적응 해석 등에 유한요소법을 적용하기 위해서는 요소재분할이 필수적이다. 특히 3차원의 경우, 자동 요소 생성은 매우 어려우며 그간의 많은 연구에도 불구하고 아직 제한점이 많은 실정이다.

이에 1990년대 중반부터 무요소법이 크게 발전하기 시작하였다.^(1~3) 대부분의 무요소법에서는 이동 최소 제곱법⁽⁴⁾을 이용하여 불규칙한 절점들

로부터 형상함수를 구성하는데, 이때에 요소는 필요하지 않다. 그러나, 약화식을 적분하기 위하여 적분 격자(integration cell)를 필요로 한다. 적분 격자는 절점과는 상관없이 구성할 수 있으며 또한 요소의 연결성이 필요가 없으므로, 유한요소법의 요소 생성보다는 간단하다. 그러나 적분 격자의 사용은 무요소법의 의미 및 효율성을 반감시킬 수 있다. 또한 적분 격자의 구성에 따라 수치해의 정확성이 크게 영향을 받을 수 있어,⁽⁵⁾ 적분 격자를 매우 신중하게 구성하여야 한다.

한편 적분 격자의 사용을 피하기 위한 여러 방법이 제안되어 왔다. Beissel 등은 절점 적분을 제안하였는데, 안정성(stability) 문제를 개선하기 위하여 안정화 항을 사용하였다.⁽⁶⁾ Atluri 등은 Petrov-Galerkin 법을 이용하여 국부적으로 적분을 수행하는 방법을 제안하였다.⁽⁷⁾ Onate 등은 선점법(collocation method)을 이용하여 유체 해석등에 적용하였으며,⁽⁸⁾ Breitkopf 등은 선점법에서 안정성을 향상시키기 위하여 이중 절점(double grid)의 사용을 제안하였다.⁽⁹⁾

본 연구에서는 적분의 부정확성이 수치해에 끼치는 영향이 작은 최소 제곱 수식화를 도입하여 새로운 무요소법을 제안하고자 한다.

* 회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : shpark@sysindi.kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3034 FAX : (042)869-3210

† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과

2. 이동 최소 제곱법

선형 독립적인 기저 함수들을 $\{p_i\}_{i=1}^n$, 절점을 $\{x_I\}_{I=1}^N$, 각 절점에서의 가중함수를 $\{w_I\}_{I=1}^N$ 라 하면, I -번째 절점의 형상함수 ϕ_I 는 다음과 같이 주어진다.^(1,4)

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_I(\mathbf{x}) \quad (1)$$

여기서

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_n(\mathbf{x})] \quad (2)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P} \quad (3)$$

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{x}) = w_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \quad (4)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_n(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_N) & \cdots & p_n(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

본 연구에서는 다음과 같은 선형 기저함수와 가중함수를 사용하였다.

$$\mathbf{p}^T = [1, x, y] \quad (7)$$

$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sqrt{4/\pi} \left(1 - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|^2}{h_I^2} \right)^4 & \text{if } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| < h_I \\ 0 & \text{if } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| \geq h_I \end{cases} \quad (8)$$

여기서 h_I 는 영향 반경(influence radius)이며, 절점간의 거리의 1.5배 내지 3.0배 사이의 값을 사용하는 것이 보통이다. 본 논문에서는 특별한 언급이 없는 한 절점간의 거리의 1.5배를 사용하였다.

3. 최소 제곱 수식화

최소 제곱 수식화는 유체나 전자기 문제등과 같이 비자기수반(non-self-adjoint)문제의 유한 요소 해석에 주로 사용되어왔다.⁽¹⁰⁾ 최소 제곱 수식화는 지배방정식을 평균적인 개념에서 만족시키도록 한다는 점에서는 Galerkin 수식화와 같다. 하지만 Galerkin 수식화에서 미분 차수를 낮추기 위하여 부분 적분과 함께 발산 정리(divergence theorem)를 사용하는 데 반해, 최소 제곱 수식화에서는 그와 같은 적분 항등식(integral identity)을 사용하지 않는다. 즉 Galerkin 수식화에서는 적분의 정확성을 가정하고 식을 전개하므로, 적분 알고리즘에서의 약간의 오차가 수치해에 직접적이고 큰 영향을 미칠 수 밖에 없다. 그러나 최소 제곱 수식화에서는 단지 지배방정식의 오차를 측정하는 도구로서 적분을 사용한다고 보아도 무방하므로, 수치해가 적분 알고리즘의 오차에 보다 덜 민감할 것으로 기대할 수 있다.

3.1 1차 최소 제곱 수식화

이 절에서는 1차 최소 제곱 수식화를 간략하게 살펴보고자 한다. 보다 상세한 수학적 이론 및 다양한 수식화 방법들은 참고문헌⁽¹⁰⁾에서 찾을 수 있다.

해석 영역 Ω 와 경계 Γ 에서 다음과 같은 1차 미분 방정식과 경계 조건이 주어졌다고 하자.

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (9)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma \quad (10)$$

여기서 \mathbf{A} 는 1차 선형 미분 연산자, \mathbf{B} 는 경계에서의 대수 연산자이며, \mathbf{f} 와 \mathbf{g} 는 각각 해석 영역과 경계에서 주어진 함수이다. 1차 미분 방정식이므로 경계 조건은 식 (10)과 같이 필수 경계 조건만으로 이루어진다.

식 (10)을 만족하는 함수들의 벡터 공간을 V 라고 하자. 임의의 시도함수(trial function) $\mathbf{v} \in V$ 에 대해 잔여오차(residual)를 해석 영역내의 각 점에서 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (11)$$

그러면 잔여오차의 제곱의 적분은 다음과 같이 주어진다.

$$I(v) = \|R(v)\|_0^2 = \|Av - f\|_0^2 = (Av - f, Av - f)_0 \quad (12)$$

여기서 $L^2(\Omega)$ 공간에서의 내적 $(\cdot, \cdot)_0$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$(u, v)_0 = \int_{\Omega} u^T v d\Omega \quad (13)$$

최소 제곱 수식화에서는 2차 범함수(quadratic functional) $I(v)$ 를 최소화하는 함수 u 를 찾는다. 따라서 다음과 같은 변분식을 얻을 수 있다.

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V \quad (14)$$

여기서

$$B(u, v) = (Au, Av)_0 \quad (15)$$

$$F(v) = (f, Av)_0 \quad (16)$$

식 (15)에서 곱선형형식(bilinear form) $B(u, v)$ 는 대칭이다. 잘 정의된(well-posed) 문제에서 연산자 A 는 아래로 유계(bounded below)하며, 따라서 곱선형형식 $B(u, v)$ 의 이산화로부터 얻어지는 행렬은 대칭이며 양의 정부호(positive-definite)이다.

앞에서 언급한 바와 같이 1차 최소 제곱 수식화에서는 필수 경계 조건만이 있는데, 본 연구에서는 필수 경계 조건을 적용하기 위하여 벌칙법(penalty method)을 사용하였다.

3.2 2차원 Poisson 방정식의 최소 제곱 수식화
2차원 Poisson 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$-\Delta \phi = f \quad \text{in } \Omega \quad (17)$$

$$\phi = g \quad \text{on } \Gamma_D \quad (18)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial n} = n^T \nabla \phi = h \quad \text{on } \Gamma_N \quad (19)$$

여기서 Γ_D 는 필수 경계 조건이 주어진 경계이고, Γ_N 는 자연 경계 조건이 주어진 경계이며, $n = [n_x, n_y]^T$ 는 Γ_N 상에서의 단위 법선 벡터(unit normal vector)이다.

주어진 Poisson 방정식은 다음과 같이 1차 미분 방정식으로 바꿀 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (20)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - v = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -f \quad \text{in } \Omega \quad (22)$$

$$\phi = g \quad \text{on } \Gamma_D \quad (23)$$

$$n_x u + n_y v = -h \quad \text{on } \Gamma_N \quad (24)$$

이를 행렬 형태로 다시 쓰면 다음과 같다

$$Au = f \quad \text{in } \Omega \quad (25)$$

$$Bu = g \quad \text{on } \Gamma \quad (26)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$u^T = [\phi, u, v] \quad (28)$$

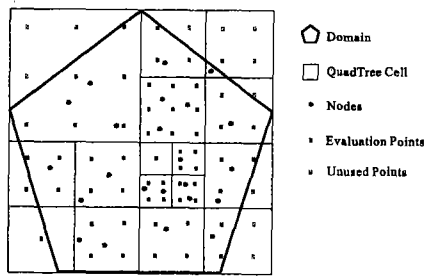


Fig. 1 Quadtree algorithm

$$f^T = [0, 0, -f] \tag{29}$$

$$B = [1, 0, 0], \quad g = [g] \quad \text{on } \Gamma_D \tag{30}$$

$$B = [0, n_x, n_y], \quad g = [-h] \quad \text{on } \Gamma_N \tag{31}$$

3.3 적분점 생성

수치해를 구하기 위한 선형 연립 방정식을 얻어내기 위해서는 해석 영역에서의 적분이 필요하다. 기존의 많은 무요소법에서는 배경 격자를 사용하는 방법이 주로 사용되어 왔는데, 정확한 적분을 위해서는 절점의 배치와 각 절점의 영향 영역(influence region)에 따라 배경 격자를 매우 신중하게 구성하여야 한다. 이는 경우에 따라서는 유한 요소 생성에 상응하는 노력을 필요로 하기에 무요소법의 효용성을 많이 감소시킨다. 따라서 다소 부정확하지만 매우 쉽게 구성할 수 있는 적분 알고리즘을 사용해도 결과에 큰 영향이 없다면 매우 바람직할 것이다.

본 연구에서는 쿼드트리(quadtree)를 이용한 방법과 Delaunay 삼각화(Delaunay triangulation)을 이용한 방법을 수치예제에 사용하였다.

쿼드트리는 전산기하학 관련분야에서 널리 쓰이는 알고리즘으로 복잡한 영역을 매우 간단히 분할할 수 있다. 본 연구에서는 이를 응용하여 다음과 같은 적분점 생성 알고리즘을 사용하기로 하였다(Fig. 1).

- (1) 너무 크지 않은 양의 정수를 N_{max} 라고 하자. 본 연구에서는 $N_{max} = 4$ 를 사용하였다.
- (2) 해석 영역을 포함하는 정사각형을 선택한다.

Table 1 Quadrature rule for quadtree algorithm

No. of Nodes	Quadrature Order
0	2×2
1	3×3
2	3×3
3	4×4
4	4×4

(3) 정사각형내의 절점의 수가 N_{max} 를 초과하면, 4개의 같은 크기의 정사각형으로 분할한다. 이를 각 정사각형이 N_{max} 이하의 절점만을 포함할 때까지 반복한다.

(4) 각 정사각형내의 절점의 개수에 따라 적당한 Gauss 구적 공식(quadrature formula)을 적용하여 적분점을 생성한다. 본 연구에서는 Table 1과 같은 규칙을 사용하였다.

(5) 해석 영역 밖에 위치한 적분점을 제거한다.

위의 알고리즘은 매우 간단하고 복잡한 형상에 대해서도 쉽게 적용이 가능하지만, 적분의 정확성은 상당히 떨어진다. 특히 해석영역과 쿼드트리 셀의 영역이 일치하지 않는 경계 부근에서는 적분의 부정확성이 더욱 커진다.

두 번째로 사용한 방법은 Delaunay 삼각화를 이용한 것으로 생성된 삼각형에 Gauss 구적 공식을 적용하여 적분점을 생성하였다. 삼각화는 절점의 분포가 불규칙하거나, 해석영역이 복잡할 경우에도 매우 효율적으로 수행할 수 있다. 그러나, 사각형을 사용한 Gauss 구적 공식에 비해 적분의 정확성이 다소 떨어진다.

다음 장에서는 앞에서 언급한 다소 부정확하지만 간단한 적분 알고리즘들을 사용한 수치예제를 통해서, 다소 부정확한 적분이 Galerkin 수식화에서는 매우 나쁜 결과를 초래하지만 최소 제곱 수식화에서는 큰 문제가 되지 않음을 보이고자 한다.

4. 수치 예제

적분의 부정확성이 Galerkin 수식화와 최소 제곱 수식화에 미치는 영향을 비교해보기 위하여 앞절에서 제시한 두가지의 간단한 적분 알고리즘

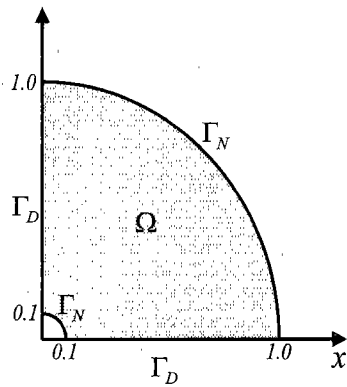


Fig. 2 Example problem 1

을 사용하여 수치 예제를 해석해 보았다.

수치해의 정확성을 비교하기 위한 L^2 및 H^1 오차노름(error norm)은 다음과 같이 정의된다.

$$\|\phi - \phi^h\|_0^2 = \int_{\Omega} (\phi - \phi^h)^2 d\Omega \quad (32)$$

$$\|\phi - \phi^h\|_1^2 = \int_{\Omega} \left[(\phi - \phi^h)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi^h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi^h}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega \quad (33)$$

여기서 오차노름을 계산하기 위하여 매우 조밀한 배경 격자와 Gauss 구적 공식을 이용하였다.

4.1 수치 예제 1 - 쿼드트리 사용 예제

Fig. 2와 같은 영역에서 다음과 같은 정해(exact solution)를 가진 Laplace 방정식을 풀어보았다.

$$\phi(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \theta \quad (34)$$

이러한 정해에 맞게 경계 조건을 설정하였다.

이 문제의 수치 해석을 위하여 Fig. 3과 같은 절점 분포를 사용하였다. 여기서 절점 분포가 수치해에 미치는 영향을 작게 하기 위하여, 절점 사이의 간격이 대략적으로 해의 기울기에 비례하면서 급격하게 변하지 않도록 하였다. 쿼드트리 알고리즘을 사용하여 적분점을 생성하였다. 해석

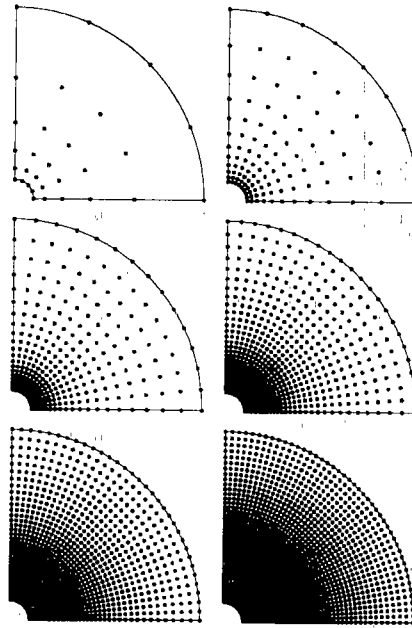


Fig. 3 Nodal distributions in example 1

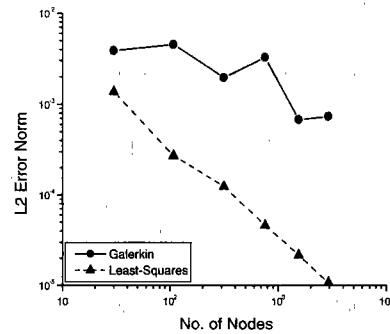


Fig. 4 L^2 error norm in example 1

영역의 형상 때문에 적분의 정확성이 상당히 떨어질 것임을 알 수 있다.

Fig. 4와 Fig. 5는 각각 계산된 수치해의 L^2 및 H^1 오차노름을 나타낸다. 최소 제곱 수식화에서는 절점의 수가 늘어남에 따라 수치해가 일관되게 정해로 수렴해 가지만, Galerkin 수식화에서는 수렴이 잘 되지 않음을 알 수 있다. 특히 H^1 오차노름의 경우에 Galerkin 수식화에서는 전

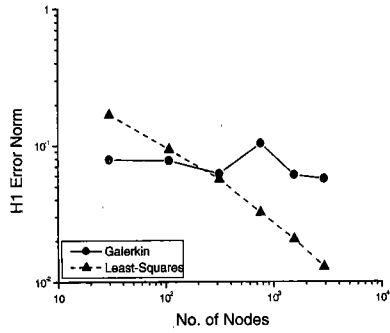


Fig. 5 H^1 error norm in example 1

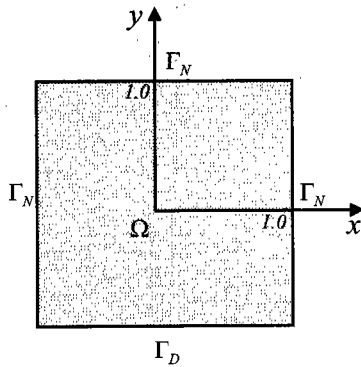


Fig. 6 Example problem 2

히 수렴의 경향을 찾아볼 수 없다.

4.2 수치 예제 2 - Delaunay 삼각화 사용 예제

Fig. 6과 같은 영역에서 다음과 같은 정해(exact solution)를 가진 Laplace 방정식을 풀어보았다.

$$\phi(x, y) = \cosh\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \quad (35)$$

이러한 정해에 맞게 경계 조건을 설정하였다.

Fig. 7과 같은 불규칙적인 절점 분포를 사용하여 해석을 하였다. 적분점은 Delaunay 삼각화를 이용하여 생성하였는데, 적분의 부정확성이 해에 미치는 영향을 알아보기 위하여 각 삼각형내에서 1점에서 13점까지의 Gauss 적분 공식을 이용하여 계산 결과를 비교하여 보았다.

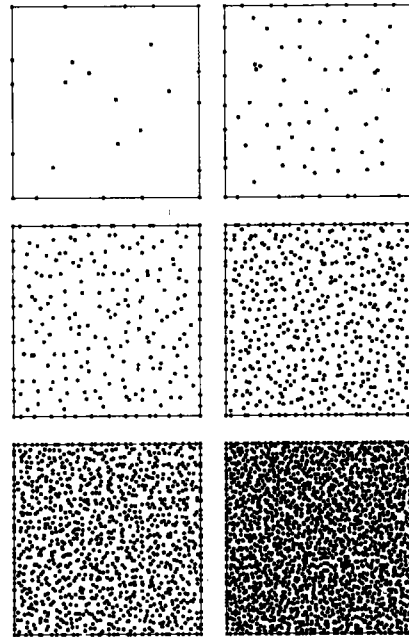


Fig. 7 Nodal distributions in example 2

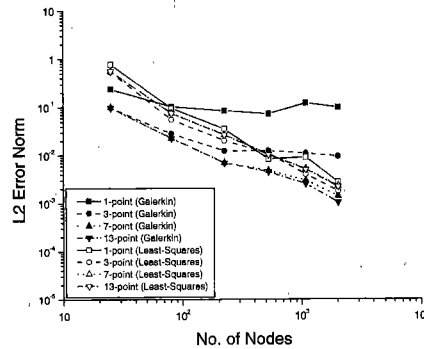


Fig. 8 L^2 error norm in example 2: $\alpha=1.5$

Fig. 8와 Fig. 9는 각각 계산된 수치해의 L^2 및 H^1 오차노움을 나타낸다. Galerkin 수식화에서는 수치해가 적분 오차에 의해 크게 영향을 받는다. 이 문제의 경우 최소한 7점 Gauss 구적 공식을 이용하는 것이 필요함을 알 수 있다. 반면에 최소 제곱 수식화에서는 수치해가 적분 오차에 매우 강건(rubust)함을 알 수 있다. 1점 Gauss

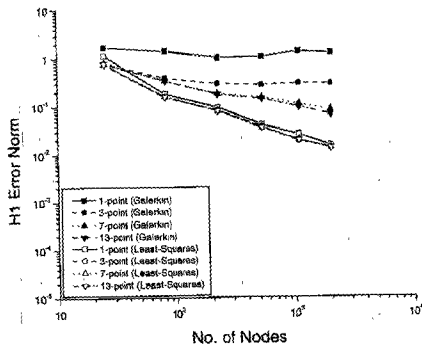


Fig. 9 H^1 error norm in example 2: $\alpha=1.5$

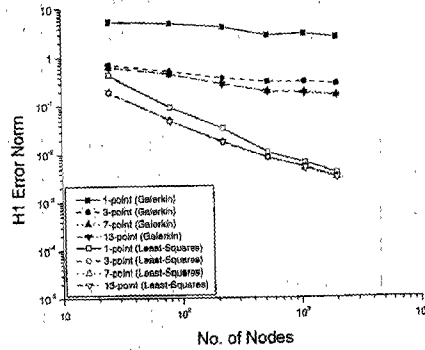


Fig. 11 H^1 error norm in example 2: $\alpha=2.5$

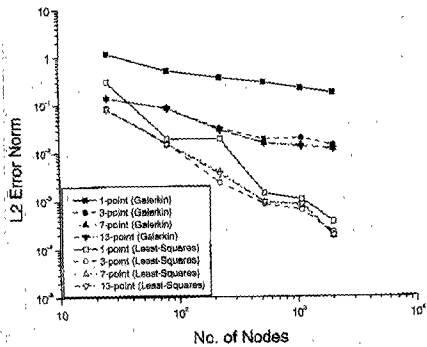


Fig. 10 L^2 error norm in example 2: $\alpha=2.5$

구적공식을 사용한 경우에도 매우 정확한 해를 보여주고 있다.

이편에는 영향 반경을 절점간 거리의 2.5배로 늘려서 해석을 수행하였다. 영향 반경을 늘리는 것은 유한요소법에서 고차의 요소를 사용하는 것과 비슷한 효과를 가진다. 따라서 만약 적분이 정확하다면, 보다 나은 수치해를 보일 것으로 기대된다. Fig. 10과 Fig. 11은 각각 계산된 수치해의 L^2 및 H^1 오차노움을 나타낸다.

최소 제곱 수식화의 경우 해가 영향 반경을 크게 한 결과 수치해가 개선이 되었음을 알 수 있다. 반면에 Galerkin 수식화에서는 13점 Gauss 구적 공식을 사용하는 경우에도 수렴이 잘 이루어지지 않는다. 이는 영향 반경을 크게 하면 형상

함수의 형태가 복잡해지기 때문에 적분이 더욱 부정확해지기 때문이다.

앞의 두 수치 예제는 Galerkin 수식화에서는 수치해가 적분 오차에 매우 민감하지만, 최소 제곱 수식화에서는 수치해가 적분 오차에 대해 상당히 강건(robust)하다는 사실을 나타낸다. 즉 최소 제곱 수식화에서는 다소 부정확하지만 매우 간단한 적분 알고리즘을 사용하는 것이 가능하다.

5. 결론

본 연구에서는 최소 제곱 수식화를 도입하여 적분의 부정확성에 대해 매우 강건한 무요소법을 제안하였다.

최소 제곱 수식화에서는 Galerkin 수식화와는 달리 발산 정리와 같은 적분 항등식의 이용이 없이 평균화 개념만을 사용한다. 이에 따라 부정확한 적분의 영향이 두 수식화에서 다른 특성을 나타낸다.

수치 예제를 통해 최소 제곱 수식화를 사용하면 다소 부정확한 적분 알고리즘을 사용해도 수치해의 수렴이 매우 잘 이루어짐을 알 수 있었다. 즉, 본 연구에서 사용한 쿼드트리 알고리즘이나 Delaunay 삼각화 알고리즘 같이 정확성을 다소 희생하면 매우 간단한 적분 알고리즘을 얻는 것이 가능하다. 따라서 최소 제곱 수식화를 이용한 무요소법은 적분 알고리즘의 선택 및 개발에 상당한 자유를 가지게 된다. 이는 무요소법의 장점을 극대화하여 효율성을 높이는 데 매우 중요한 역할을 할 것으로 기대된다.

또한 최소 제곱 수식화는 Galerkin 수식화에 비해 유체나 전자기장 문제 등 비자기수반 문제에 서 더욱 효율적이다.⁽¹⁰⁾ 따라서 그러한 분야에 최소 제곱 수식화에 기반한 무요소해석을 적용할 경우 더욱 효과적일 것으로 판단된다.

그런데 최소 제곱 수식화는 Galerkin 수식화에 비해 많은 수의 미지수를 사용하므로 같은 수의 절점을 사용할 경우에는 계산 시간이 더 크다. 그러나 계산 시간과 해의 정확성과의 관계는 아직 불분명한 부분이다. 이에 대한 연구가 더 필요할 것으로 보이며, 동시에 계산 시간을 단축할 수 있는 방안에 대한 연구가 필요할 것이다.

참고문헌

- (1) Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L., 1994, "Element-Free Galerkin Methods," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 37, pp. 229~256.
- (2) Liu, W.K., Jun, S. and Zhang, Y.F., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 20, pp. 1081~1106.
- (3) Duarte, C.A. and Oden, J.T., 1995, "Hp Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems," Technical Report 95-05, TICAM, University of Texas at Austin.
- (4) Lancaster, P. and Salkauskas, K., 1981, "Surfaces Generated by Moving Least-Squares Methods," *Mathematics of Computation*, Vol. 37, pp. 141~158.
- (5) Dolbow, J. and Belytschko, T., 1999, "Numerical Integration of the Galerkin Weak Form in Meshfree Methods," *Computational Mechanics*, Vol. 23 pp. 219~230.
- (6) Beissel, S. and Belytschko, T., 1996, "Nodal Integration of the Element-Free Galerkin Method," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, pp. 49~74.
- (7) Atluri, S.N. and Zhu, T., 1998, "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics," *Computational Mechanics*, Vol. 22, pp. 117~127.
- (8) Onate, E., Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., 1996, "A Finite Point Method in Computational Mechanics. Applications to Convective Transport and Fluid Flow," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 39, pp. 3839~3866.
- (9) Breitkopf, P., Touzot, G. and Villon, P., 2000, "Double Grid Diffuse Collocation Method," *Computational Mechanics*, Vol. 25, pp. 199~206.
- (10) Jiang, B.N., 1998, *The Least-Squares Finite Element Method - Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*, Berlin, Springer-Verlag.
- (11) 박상훈, 2001, "최소 제곱 무요소법의 오차 추정 및 적응적 기법에 관한 연구," 한국과학기술원 박사학위논문.