

## 복합재 티모셴코 보의 굽힘 비틀림 연성 진동에 대한 엄밀해

홍성욱\* · 강병식\* · 박중윤\*\*

(2001년 1월 23일 접수, 2001년 6월 7일 심사완료)

### Exact Solutions for Bending-Torsion Coupled Vibration of Composite Timoshenko Beam

Hong, Seong-Wook, Kang, Byung-Shik and Park, Joong-Youn

**Key Words:** Composite Timoshenko Beam(복합재 티모셴코 보), Exact Dynamic Element(엄밀한 동적 요소), Bending-Torsion Coupled Vibration(굽힘-비틀림 연성 진동)

#### Abstract

This paper proposes a dynamic analysis method for obtaining exact solutions of composite Timoshenko beams, which are inherently subjected to both the bending and torsional vibrations. In this paper, the bending-torsion coupled vibration of composite Timoshenko beam is rigorously modelled and analyzed. Two numerical examples are provided to validate and illustrate the bending-torsion coupled vibration of composite Timoshenko beam structure. The numerical examples prove that the proposed method is of great use for the dynamic analysis of dynamic structures composed of multiply connected composite Timoshenko beams.

#### 1. 서론

복합재는 상대적으로 가벼운 무게에 비해 높은 강성과 우수한 물리적인 특성을 가지므로 우주항공산업과 군수산업 등에 많이 이용되고 있으며 그 응용이 크게 확대되고 있다. 복합재에 대한 응용이 다양해지면서 복합재가 활용되는 구조에 대한 동적 해석의 중요성 또한 증대되었으며 많은 연구가 있어 왔다.<sup>(1~9)</sup> Abarcar와 Cunniff<sup>(1)</sup>가 전달행렬법에 기초하여 전단변형과 회전관성을 포함하는 외팔보의 자유진동해석 방법을 개발, 적용한 후 보다 실제적인 복합재 구조물에 대한 모델링을 위해 굽힘과 비틀림, 굽힘-비틀림 연성 특성 등에 대해 많은 저자들에 의해 연구되어져

왔다.<sup>(2~9)</sup> 특히, Huang 등<sup>(2,3)</sup>이 전단변형과 회전관성의 효과를 고려한 복합재 티모셴코 보에 대해 굽힘 비틀림 연성을 포함하여 모델링함으로써 엄밀한 해석을 수행하였으며 이후 최근까지 여러 저자들에 의해 복합재 티모셴코 보의 굽힘 비틀림 연성 진동 문제가 연구되어 왔다.<sup>(4~7)</sup> 그러나 대부분의 연구가 이산화된 모델에 근거한 근사해법으로서 엄밀한 해를 제공하는 해법에 대한 연구는 거의 없는 실정이다. 최근 Banerjee와 Williams는 기호에 의한 해석적 연산 도구를 이용하여 균일 복합재 티모셴코 보의 굽힘 비틀림에 대한 엄밀한 동적 강성 행렬(Dynamic stiffness matrix)을 계산하는 방법을 제안한 바 있다.<sup>(8)</sup> 그러나 모델링 과정에서 기호계산에 의존함으로써 인해 실용적인 문제에의 적용에 한계가 있다.

한편 보나 보로 이루어진 프레임 등의 일반적인 보 구조물에 대해 최근 그 엄밀 해를 구할 수 있도록 엄밀한 동적 요소를 유도하고 활용하는 연구가 활발히 진행되어 왔다.<sup>(9,10)</sup> 그러나 복합재 티모셴코 보 구조물은 전단변형과 회전관성의

† 책임저자, 회원, 금오공과대학교 기계공학부

E-mail : swhong@kumoh.ac.kr

TEL : (054)467-4214 FAX : (054)467-4472

\* 금오공과대학교 기전공학과

\*\* 금오공과대학교 기계공학부

효과를 포함하면서 또한 굽힘과 비틀림 변형 사이에서 재료적인 연성이 발생하므로 모델의 자유도가 높아지며 이로 인해 엄밀한 동적 요소를 유도하는 것이 매우 어려운 것으로 알려져 있다.

본 연구에서는 단순 보에 대해 적용하였던 기존의 엄밀한 동적 요소 유도 과정을 확장하여 굽힘과 비틀림의 연성 진동이 있는 복합재 티모센코 보에 적용하였다. 이를 위해 기존의 방법에서 전적으로 해석적 변수와 해석적 과정에 의존하였던 엄밀한 동적 요소 유도 과정과 변수의 일부를 계산 알고리즘에 의존하는 방식으로 개편하였다. 이와 같은 과정을 통해 복합재 티모센코 보의 엄밀한 동적 요소를 유도하고 그 타당성을 검증함으로써 일반적인 복합재 티모센코 보 구조물에 대한 엄밀 해를 구하는 방법으로 제안하였다. 두 가지 수치 예제를 통하여 유도된 복합재 티모센코 보의 엄밀한 동적 요소를 검증하였으며 그 활용 가능성을 제시하였다.

2. 복합재 티모센코 보의 모델링

2.1 운동방정식

Fig. 1과 같은 복합재 티모센코(Timoshenko) 보의 동적 해석을 위해서는 횡변위 ( $h$ ), 굽힘각변위 ( $\theta$ ) 그리고 비틀림각변위 ( $\psi$ )가 고려되어야 한다. 일반적으로 복합재 티모센코 보의 운동방정식은 일반 티모센코 보에서 고려하고 있는 전단변형과 회전관성의 효과 외에 비틀림 변형 및 굽힘과 비틀림 변형 사이의 재료적 연성( $K$ )을 포함하여야 하며, 다음과 같은 식으로 유도된다.<sup>(2)</sup>

$$EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + kAG \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \theta \right) + K \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (1a)$$

$$kAG \left( \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad (1b)$$

$$GJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = I_a \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1c)$$

여기서,  $\rho$ 는 재료의 밀도,  $EI$ 는 굽힘 강성,  $GJ$ 는 비틀림 강성,  $K$ 는 굽힘-비틀림 연성강성을 의미한다. 또,  $kAG$ 는 복합재의 전단강성,  $I$ 는 x축에 대한 보 횡단면의 2차 모멘트,  $m$ 은 단위 길이 당 질량,  $I_a$ 는 y축에 대한 단위 길이 당 극관성 모멘트이다. 운동방정식에 사용된 부호

규약은 Fig. 2와 같다.

식 (1-1)~(1-3)으로 표현되는 운동 방정식을 공간좌표에 관한 상대공간 형식으로 다시 쓰면 다음과 같은 6개의 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \theta - \frac{F}{kAG} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{GJ \cdot EI - K^2} (GJ \cdot M - K \cdot T) \quad (2b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{GJ \cdot EI - K^2} (-K \cdot M + EI \cdot T) \quad (2c)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad (2d)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = F + \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (2e)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = I_a \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2f)$$

여기서,  $F, M, T$ 는 각각 전단력, 굽힘 모멘트, 비틀림 모멘트를 나타낸다.

2.2 엄밀한 동적 요소 행렬의 유도

식 (2-1)~(2-6)을 시간에 대해 라플라스변환하고

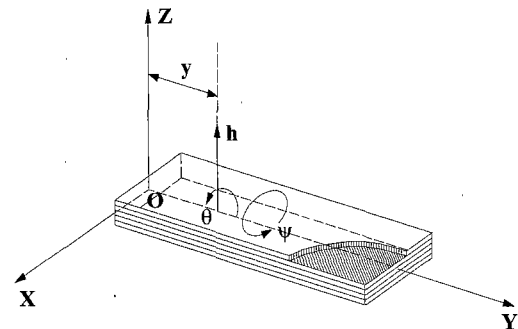


Fig. 1 Bending-torsion coupled vibration model for composite Timoshenko beam

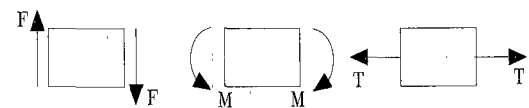


Fig. 2 Sign conventions for shear force (F), bending moment(M), and torque(T)

행렬-벡터 형식으로 정리하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\frac{\partial \Psi^*(s, y)}{\partial y} = B(s) \Psi^*(s, y) \quad (3)$$

여기서,

$$\Psi^*(s, y) = [h^* \ \theta^* \ \psi^* \ F^* \ M^* \ T^*]^T \quad (4a)$$

$$B(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d & e \\ -f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4b)$$

여기서

$$a = \frac{1}{kAG}, \quad b = rGJ, \quad c = rK, \quad d = rK, \quad e = rEI, \\ f = ms^2, \quad g = \rho Is^2, \quad n = I_a s^2, \quad r = \frac{1}{GJ \cdot EI - K^2}$$

로 정의되며,  $s$ 는 시간에 관한 라플라스 변수, 상첨자 \*는 해당 변수의 시간에 관한 라플라스 변환 결과식이다. 식 (3)을 다시 공간 좌표  $y$ 에 대하여 라플라스 변환하면 다음 식과 같다.

$$\Psi^*(s, \lambda) = [\lambda I - B]^{-1} \Psi^*(s, 0) \quad (5)$$

여기서,  $\lambda$ 는 공간 좌표에 관한 라플라스 변수이며,  $(\sim)$ 는 공간 좌표에 대한 라플라스 변환 결과를 의미한다.

엄밀한 동적 요소를 유도하기 위해서는 식 (5)의  $[\lambda I - B]^{-1}$ 에 관한 해석적인 표현이 필요하다. 이를 위해 수반행렬(Adjoint matrix)과 행렬식(Determinant)을 이용하여 계산하는 방식을 채택하였다. 먼저,  $[\lambda I - B]$ 의 행렬식을 다음과 같이 정의하도록 한다.

$$\det[\lambda I - B] = (\lambda^2 - \alpha^2)(\lambda^2 - \beta^2)(\lambda^2 - \gamma^2) \quad (6)$$

이 때,  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ 는 앞에서 정의된 계수들과 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -(af + en + bg) \quad (7a)$$

$$\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2 = abfg + aefn + bf + begn - cdgn \quad (7b)$$

$$\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 = abefgn + befn - acdfgn - cdfn \quad (7c)$$

따라서  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ 를 결정하기 위해서는 위의 계수관계로부터 개별식을 유도하거나 식 (6)의 행렬식으로부터 해를 구하는 방법이 활용될 수 있다. 본 연구에서는 후자의 방법을 사용하였다. 해석적인 수반행렬의 계산을 위해서는 Matlab<sup>(11)</sup>을 이용한 기호연산을 실시하였다.

식 (5)에서  $[\lambda I - B]$ 에 대한 수반행렬과 행렬식을 이용하여 역행렬에 대한 해석적인 식을 구한 후 공간 좌표에 대해 라플라스 역변환하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\Psi^*(s, y) = C(s, y) \Psi^*(s, 0) \quad (8)$$

식 (8)에 경계값을 부가하고 변수를 재배치하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\begin{Bmatrix} F_1^* \\ M_1^* \\ T_1^* \\ F(\xi)^* \\ M(\xi)^* \\ T(\xi)^* \end{Bmatrix} = D^e(s, \xi) \begin{Bmatrix} h_1^* \\ \theta_1^* \\ \psi_1^* \\ h(\xi)^* \\ \theta(\xi)^* \\ \psi(\xi)^* \end{Bmatrix} \quad (9)$$

식 (9)의 엄밀한 동적 요소 행렬  $D^e(s, \xi)$ 의 개별 요소에 대한 자세한 정보는 부록에 첨부하였다.

식 (9)를 길이  $\ell$ 인 균일 복합재 티모셴코 보 요소에 대해 적용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_1^* \\ M_1^* \\ T_1^* \\ F_2^* \\ M_2^* \\ T_2^* \end{Bmatrix} = D^e(s, \ell) \begin{Bmatrix} h_1^* \\ \theta_1^* \\ \psi_1^* \\ h_2^* \\ \theta_2^* \\ \psi_2^* \end{Bmatrix} \quad (10)$$

### 2.3 시스템 행렬의 구성

일반적인 형상의 복합재 보 구조물을 요소로 구분한 후 식 (10)을 이용하여 요소행렬을 구성,

**Table 1** Specifications of numerical model 1

Property	Data
length, m	0.1905
width, m	0.0127
thickness, m	0.00318
EI, Nm <sup>2</sup>	0.2865
GJ, Nm <sup>2</sup>	0.1891
K, Nm <sup>2</sup>	0.1143
m, kg/m	0.0544
I <sub>α</sub> , kgm	0.7770 × 10 <sup>-6</sup>
kAG, N	6343.3

**Table 2** Comparison of natural frequencies from reference [8] and the proposed method

Natural Frequencies (Hz)		
Mode	Reference[8]	Proposed method
1	30.75	30.75
2	189.8	189.8
3	518.8	518.8
4	648.3	648.3
5	986.1	986.2

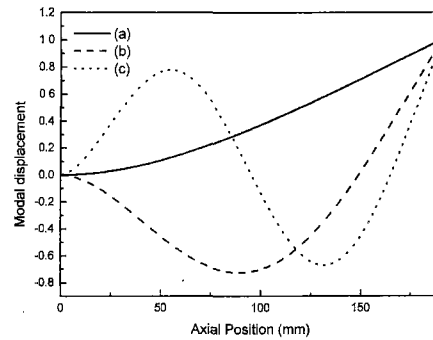
이를 조합함으로써 다음 전역 시스템 방정식을 얻을 수 있다.

$$F^*(s) = D(s) Q^*(s) \tag{11}$$

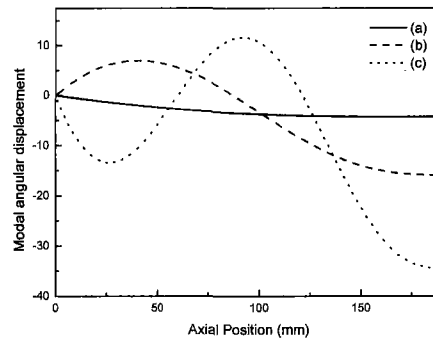
여기서,  $Q^*$  는 전역 변위 좌표 벡터의 라플라스 변환이며  $F^*$ 는 이 좌표에 대응되는 힘벡터의 라플라스 변환이다. 식 (11)은 주어진 시스템에 대한 라플라스 영역에서의 운동방정식을 나타내게 되며  $D(s)$ 는 시스템 동특성 행렬을 의미하게 된다. 식 (11)과 같이 주어진 시스템에 대한 고유치 문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$D(s) Q^*(s) = 0 \tag{12}$$

식 (12)와 같이 주어진 고유치 문제를 풀기 위해 참고문헌<sup>(8)</sup>에서와 마찬가지로 개선된 축차이분법을 적용하였으며 초기치는 주파수 응답함수를 계산하여 구하였다.



**Fig. 3** Transverse(bending) mode shapes for first three modes of numerical model 1: (a) First; (b) Second; (c) Third



**Fig. 4** Torsional mode shapes for first three modes of numerical model 1:(a) First; (b) Second; (c) Third

### 3. 수치예제

#### 3.1 균일한 복합재 티모센코 보

본 예제에서는 유도된 엄밀한 동적 요소의 검증을 위하여 참고문헌<sup>(8)</sup>에서 취급되었던 균일한 복합재 티모센코 보를 고려하였다. 이 예제에서는 Fig 1에서와 같이 횡단면이 직사각형인 평평한 유리섬유 복합재 외팔보로서 모든 적층판의 섬유각이 15° 인 다층 복합재를 고려한다. Table 1에서 보의 물성치를 요약하였다. 제안된 방법을 이용하여 본 예제의 고유진동수를 계산하였으며 Table 2에서 그 검증을 위해 참고문헌<sup>(8)</sup>에서 제공된 고유진동수와 비교하였다.

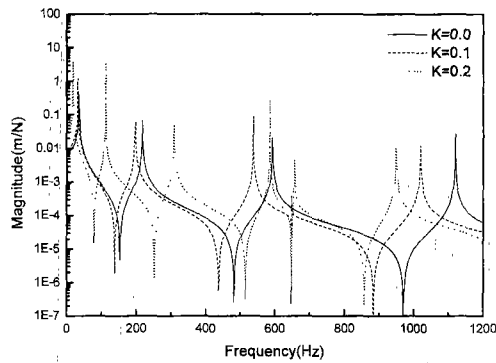


Fig. 5 Change in transverse frequency response functions of numerical model 1 with the coupling stiffness (K) varied

Table 3 Comparison of natural frequencies with the coupling stiffness K varied for numerical model 1

Natural Frequencies (Hz)			
Mode	K=0	K=0.1	K=0.2
1	35.2831	31.8697	18.0690
2	217.3412	196.6147	112.0106
3	592.6258	537.0979	308.2939
4	1119.8473	648.1764	584.9780
5	1772.5554	1019.6318	656.2896

결과에서 볼 수 있는 바와 같이 두 방법이 동일한 결과를 주고 있으므로 제안한 방법에 의해 얻어진 엄밀한 동적 요소 행렬이 적절함을 확인할 수 있다. Table 2에 정리된 모든 모드는 굽힘과 비틀림이 연성된 모드이다. 이를 확인하기 위해 Figs. 3,4에는 처음 3개의 고유모드를 대표적으로 보여주고 있다. 연성에 의해 각각의 고유진동수에서 굽힘과 비틀림 변형 모두에서 모드 변위(Modal displacement)가 있음을 알 수 있다. 굽힘 비틀림 연성이 시스템에 미치는 영향을 시각적으로 살펴보기 위해 연성강성(K)값이 변함에 따른 외팔보 끝단에서의 횡변위(h) 진동 주파수 응답 함수의 변화를 Fig. 5에 나타내었다. 또한 5개 고유진동수를 Table 3에서 비교하였다. 표 및 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 굽힘 비틀림 연성에 의해 고유진동수가 추가되거나 연성의 증가에 영향을 받는 모드들의 고유진동수가 낮아지는 것을 볼 수 있다.

Table 4 Mechanical properties of composites for numerical model 2

Material types	$E_1$	$E_2$	$\frac{G_{12}}{G_{13}}$	$G_{23}$	$\rho$	$\nu_{12}$
	GPa				$kg/m^3$	
Graphite-epoxy (AS4/3501-6)	144.8	9.65	4.14	3.45	1389.23	0.3
Graphite-epoxy (T300/N5208)	181.0	10.3	7.17	3.433	1600.0	0.28
Kevlar49-epoxy	76.0	5.56	2.30	1.618	1460.0	0.34

Table 5 Specifications of numerical model 2

Property	Data		
	#1	#2	#3
length, mm	50	80	70
width, mm	5	8	7
thickness, mm	3	5	4
EI, Nm <sup>2</sup>	0.5287	6.0524	0.9603
GJ, Nm <sup>2</sup>	0.1343	1.5549	0.2551
K, Nm <sup>2</sup>	0.1592	1.8287	0.2922
$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	1389.23	1600.0	1460.0
$I_a$ , kgm <sup>2</sup> ( $\times 10^{-7}$ )	0.59042	4.7467	2.2143
kAG, N ( $\times 10^4$ )	5.9573	25.440	6.1962

3.2 3단 복합재 티모센코 보 구조물

본 예제에서는 일반적인 형상의 복합재 티모센코 보 구조물의 엄밀한 동적 특성 해석에 제안된 방법을 적용하였다. 이를 위해 Fig. 6과 같이 단면과 재료가 서로 다른 3단 복합재 티모센코 보 구조물을 고려하였다. 보 구조물의 양단에서는  $h=0$ , 즉 단순지지된 것으로 두었다. 그러나 비틀림에 대해서는 구속을 두지 않았다. 따라서 비틀림에 관한 강제 모드가 존재하게 된다. 한편 각 단의 부재는 각각, #1: Graphite-epoxy (AS4/3501-6), #2: Graphite-epoxy (T300/N5208), #3: Kevlar 49-epoxy를 고려하였다. 3단의 보에 사용된 각 부재의 기본 물성치는 참고문헌<sup>(12)</sup>에서 얻었으며 Table 4와 같이 주어진다. 모든 부재는 섬유각이 모두 동일한 15° 이고 단층으로 구성되었다고 가정하였으며 이 때의 탄성/전단 계수를 참고문헌<sup>(13)</sup>의 다음과 같은 식을 통해 계산하였다.

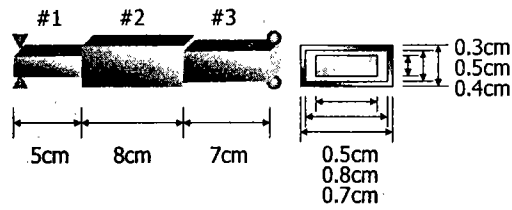


Fig. 6 Numerical model 2: a simply supported, three-stepped composite Timoshenko beam structure

Table 6 Comparison of natural frequencies by the change of length of the second part beam

Mode	Natural Frequencies (Hz)		
	$L_2=8\text{cm}$	$L_2=9\text{cm}$	$L_2=10\text{cm}$
1	190.6876	201.9147	214.3792
2	635.5442	656.9214	686.7296
3	1852.4583	1874.6980	1871.0547
4	3134.4560	3222.5134	3313.2890
5	4062.7516	4234.5087	4427.6272

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_{11}} \cos^4 \theta + \left( -\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{E_{22}} \sin^4 \theta \quad (13)$$

$$\frac{1}{G} = 2 \left[ \frac{2}{E_{11}} + \frac{2}{E_{22}} + \frac{4\nu_{12}}{E_{11}} - \frac{1}{G_{12}} \right] \times \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{12}} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \quad (14)$$

시스템의 강성 및 관성에 관련된 특성치가 Table 5에 정리되어 있다. 연성 강성(K)은 굽힘강성(EI) 값의 30%로 두었다. 시스템의 기본 형상은 Fig. 6과 같으나 실제 설계 문제를 염두에 두고 부재의 길이를 변화시키면서 계산을 실시하였다.

제안된 방법에서는 본 예제를 풀기 위해 균일한 단면 형상을 갖는 각 단을 각각 한 개의 요소로 모델링하여 구성된 3개의 요소를 조합하여 시스템 행렬을 구성한다. 부재의 길이 변화를 고려하기 위해 유한요소법에서는 재메쉬가 필요하나 여기서는 재메쉬없이 요소 행렬 구성 시 길이 정보만을 변경시켜도 정밀도에 변화가 없다.

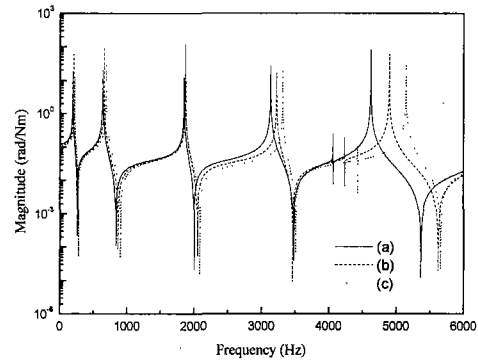


Fig. 7 Change in rotational frequency response functions at the left end of numerical model 2 with the length of the second beam varied: (a) $L_2=80\text{mm}$ ; (b) $L_2=90\text{mm}$ ; (c) $L_2=100\text{mm}$

부재 #2의 길이( $L_2$ )를 증가시키고 #1, #3 부재가 해당되는 만큼 감소하여 보의 전체 길이를 일정하게 유지하면서 계산된 각도에 관한 주파수 응답 함수(Rotational frequency response function)의 변화를 Fig. 7에서 보여주고 있다. Table 6에는 아래 5개 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. Table 6에서 볼 수 있는 바와 같이  $L_2$ 가 길어짐에 따라 전반적으로 고유진동수가 높아지지만 3차 모드에서는 고유진동수가 높아지다 다시 낮아지는 독특한 특징을 볼 수 있다. 한편, 길이의 변화에 따른 3개의 고유진동수에서의 횡변위 모드형상 변화를 Fig. 8에 나타내었다.

#### 4. 요약 및 결론

본 연구에서는 복합재 티모센코 보의 굽힘 비틀림 연성 진동에 관한 엄밀해를 구하는 방법을 제시하였다. 이를 위해 복합재 티모센코 보의 엄밀한 동적 요소를 유도하였으며 기존의 문헌 결과와의 비교를 통해 그 타당성을 검증하였다. 또한 다단 복합재 보에 제안된 방법을 적용하여 방법의 유용성을 입증하였다. 본 연구의 결과는 굽힘 비틀림 연성 진동이 발생하는 복잡한 복합재 구조물에 대해 엄밀한 해를 얻을 수 있도록

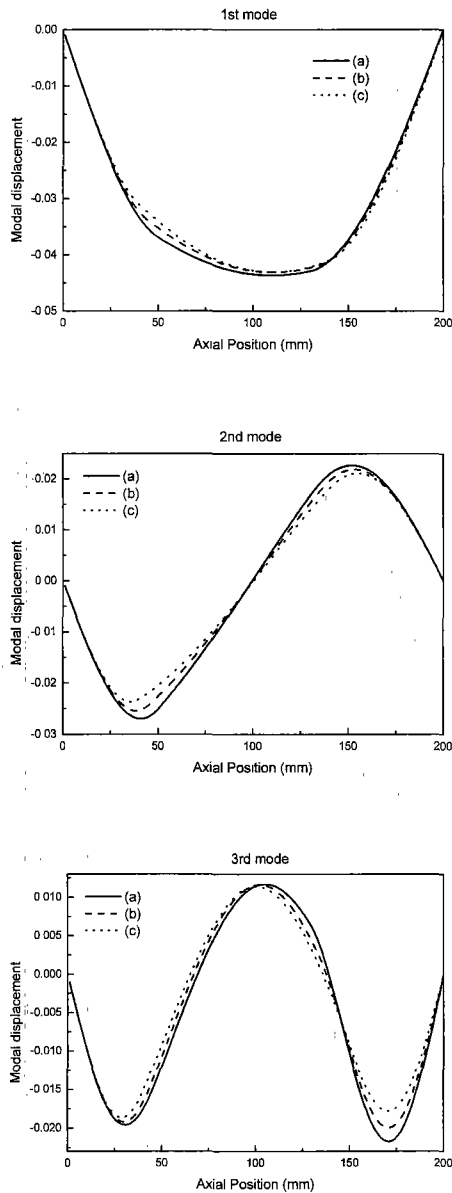


Fig. 8 Change in transverse mode shapes of first three modes for numerical model 2 with the lengths of beams varied: (a)  $L_2=80\text{mm}$ ; (b)  $L_2=90\text{mm}$ ; (c)  $L_2=100\text{mm}$

했다는 점에서 그 의미가 있으며 향후 재료적 연성 뿐만 아니라 기하학적 비대칭성에 기인하는

연성진동 등에도 확장할 수 있을 것으로 기대된다. 또한, 엄밀한 동적 요소가 갖는 객체지향형 특성을 이용하여 복합재 보에 대한 설계 등에도 폭넓게 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

### 참고문헌

- (1) Abarcar, R. B. and Cunniff, P. F., 1972, "The Vibration of Cantilever Beams of Fiber Reinforced Material," *Journal of Composite Materials*, Vol. 6, pp. 504~517.
- (2) Teoh, L. S. and Huang, C. C., 1977, "The Vibration of Beams of Fibre Reinforced Material," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 51, No. 4, pp. 467~473.
- (3) Teh, K. K. and Huang, C. C., 1979, "The Vibration of Generally Orthotropic Beams, a Finite Element Approach," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 62, No. 2, pp. 195~206.
- (4) Suresh, J. K., Venkatesan, C. and Ramamurti, V., 1990, "Structural Dynamic Analysis of Composite Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 143, No. 3, pp. 503~519.
- (5) Chandrashekhara, K., Krishnamurthy, K. and Roy S., 1989, "Free Vibration of Composite Beams Including Rotatory Inertia and Shear Deformation," *Composite Structures*, Vol. 14, pp. 269~279.
- (6) Hodges, D. H., Atilgan, A. R., Fulton, M. V. and Rehfield, L. W., 1991, "Free Vibration Analysis of Composite Beams," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 36, pp. 36~47.
- (7) Abramovich, H., 1992, "Shear Deformation and Rotatory Inertia Effects of Vibrating Composite Beams," *Composite Structures*, Vol. 20, pp. 165~173.
- (8) Banerjee, J. R. and Williams, F. W., 1996, "Exact Dynamics Stiffness Matrix for Composite Timoshenko Beams with Applications," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, No. 4, pp. 573~585.
- (9) Hong, S.-W. and Kim, J.-W., 1999, "Modal

Analysis of Multi-Span Timoshenko Beams Connected or Supported by Resilient Joints with Damping," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 227, No. 4, pp. 787~806.

- (10) 홍성욱, 김종욱, 1999, "여러 스패를 갖는 티모셴코 보 구조물의 이동하중에 의한 진동해석," 대한기계학회논문집 A권, Vol. 23, No. 11, pp. 2058~2066.
- (11) Matlab Reference Guide, The Math Works Inc., 2000.
- (12) Yildirim, V., 1999, "Rotary Inertia, Axial and Shear Deformation Effects on the In-Plane Natural Frequencies of Symmetric Cross-ply laminated circular arches," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 224, No. 4, pp. 575~589.
- (13) Bassiouni, A.S., Gad-Elrab, R.M., Elmahdy, T.H., 1999, "Dynamic analysis for laminated composite beams," *Composite Structures*, Vol. 44, pp. 81~87.

부 록

엄밀한 동적 요소 행렬:  $D^e(s, \xi)$

$$D^e(s, \xi) = \begin{bmatrix} D_{11}^e & D_{12}^e \\ D_{21}^e & D_{22}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{12}^{-1}C_{11} & C_{12}^{-1} \\ C_{21} - C_{22}C_{12}^{-1}C_{11} & C_{22}C_{12}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} c_{11} & -c_{12} & c_{13} \\ -c_{21} & c_{22} & -c_{23} \\ c_{31} & -c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad C_{12} = \begin{bmatrix} c_{14} & c_{15} & -c_{16} \\ -c_{24} & -c_{25} & c_{26} \\ c_{34} & c_{35} & -c_{36} \end{bmatrix}$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} -c_{41} & c_{42} & -c_{43} \\ -c_{51} & c_{52} & -c_{53} \\ c_{61} & -c_{62} & c_{63} \end{bmatrix} \quad C_{22} = \begin{bmatrix} -c_{44} & -c_{45} & c_{46} \\ -c_{54} & -c_{55} & c_{56} \\ c_{64} & c_{65} & -c_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= q_5 - (bg + en) \cdot q_3 + (begn - cdgn) \cdot q_1 \\ c_{12} &= q_4 - en \cdot q_2 \\ c_{13} &= -ch \cdot q_2 \\ c_{14} &= -a \cdot q_4 + (abg + aen + b) \cdot q_2 + (acdgn - abegn + cdn - ben) \cdot q_0 \\ c_{15} &= b \cdot q_3 + (cdn - ben) \cdot q_1 \\ c_{16} &= -c \cdot q_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{21} &= -bf \cdot q_2 + (befn - cdfn) \cdot q_0 \\ c_{22} &= q_5 - (af + en) \cdot q_3 + aefn \cdot q_1 \\ c_{23} &= -cn \cdot q_3 + acfn \cdot q_1 \\ c_{24} &= b \cdot q_3 + (cdn - ben) \cdot q_1 \\ c_{25} &= b \cdot q_4 + (cdn - abf - ben) \cdot q_2 + (abefn - acdfn) \cdot q_0 \\ c_{26} &= -c \cdot q_4 + acf \cdot q_2 \\ c_{31} &= df \cdot q_2 \\ c_{32} &= -dg \cdot q_3 + (adfg + df) \cdot q_1 \\ c_{33} &= q_5 - (af + bg) \cdot q_3 + (abfg + bf) \cdot q_1 \\ c_{34} &= -d \cdot q_3 \\ c_{35} &= -d \cdot q_4 + adf \cdot q_2 \\ c_{36} &= e \cdot q_4 + (cdg - aef - beg) \cdot q_2 + (abefg - acdfg + bef - cdf) \cdot q_0 \\ c_{41} &= -f \cdot q_4 + (bfg + efn) \cdot q_2 + (cdfgn - befgn) \cdot q_0 \\ c_{42} &= -f \cdot q_3 + efn \cdot q_1 \\ c_{43} &= cfn \cdot q_1 \\ c_{44} &= q_5 - (bg + en) \cdot q_3 + (begn - cden) \cdot q_1 \\ c_{45} &= -bf \cdot q_2 + (befn - cdfn) \cdot q_0 \\ c_{46} &= cf \cdot q_2 \\ c_{51} &= -f \cdot q_3 + efn \cdot q_1 \\ c_{52} &= g \cdot q_4 - (afg + f + egn) \cdot q_2 + (efn + aefgn) \cdot q_0 \\ c_{53} &= -cgn \cdot q_2 + (acfgn + cfn) \cdot q_0 \\ c_{54} &= q_4 - en \cdot q_2 \\ c_{55} &= q_5 - (af + en) \cdot q_3 + aefn \cdot q_1 \\ c_{56} &= -cg \cdot q_3 + (acfg + cf) \cdot q_1 \\ c_{61} &= dfn \cdot q_1 \\ c_{62} &= -dgn \cdot q_2 + (adfgn + dfn) \cdot q_2 \\ c_{63} &= n \cdot q_4 - (afn + bgn) \cdot q_2 + (abfgn + bfn) \cdot q_0 \\ c_{64} &= -dn \cdot q_2 \\ c_{65} &= -dn \cdot q_3 + adfn \cdot q_1 \\ c_{66} &= q_5 - (af + bg) \cdot q_3 + (abfg + bf) \cdot q_1 \end{aligned}$$

$$\Delta = -\{ (a^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)(\gamma^2 - a^2) \}^{-1}$$

$$\begin{aligned} q_0 &= \Delta \{ a^{-1}(\beta^2 - \gamma^2) \sinh a\xi + \beta^{-1}(\gamma^2 - a^2) \sinh \beta\xi \\ &\quad + \gamma^{-1}(a^2 - \beta^2) \sinh \gamma\xi \} \\ q_1 &= \Delta \{ (\beta^2 - \gamma^2) \cosh a\xi + (\gamma^2 - a^2) \cosh \beta\xi \\ &\quad + (a^2 - \beta^2) \cosh \gamma\xi \} \\ q_2 &= \Delta \{ a(\beta^2 - \gamma^2) \sinh a\xi + \beta(\gamma^2 - a^2) \sinh \beta\xi \\ &\quad + \gamma(a^2 - \beta^2) \sinh \gamma\xi \} \\ q_3 &= \Delta \{ a^2(\beta^2 - \gamma^2) \cosh a\xi + \beta^2(\gamma^2 - a^2) \cosh \beta\xi \\ &\quad + \gamma^2(a^2 - \beta^2) \cosh \gamma\xi \} \\ q_4 &= \Delta \{ a^3(\beta^2 - \gamma^2) \sinh a\xi + \beta^3(\gamma^2 - a^2) \sinh \beta\xi \\ &\quad + \gamma^3(a^2 - \beta^2) \sinh \gamma\xi \} \\ q_5 &= \Delta \{ a^4(\beta^2 - \gamma^2) \cosh a\xi + \beta^4(\gamma^2 - a^2) \cosh \beta\xi \\ &\quad + \gamma^4(a^2 - \beta^2) \cosh \gamma\xi \} \end{aligned}$$