

PD제어와 LQR을 이용한 병진 시스템의 제어특성 연구

김택현*, 정상화*, 이동하**

A Study on Control Characteristics of Translation System Using PD Control and LQR

Taek-Hyun Kim*, Sang-Hwa Jeong*, Dong-Ha Lee**

Abstract

The translation system is made up of springs, masses and a dashpot. This precise piece of equipment is controlled electro-mechanically by a motor and operating program. The control strategy of the system can be changed by spring stiffness, change of mass, and the damping coefficient of the dashpot. This system proves the necessity and effect of a closed loop control.

In this paper, PD control experiments were implemented for the translation system. When the notch filter was added on the PD controller, we compared the response characteristics of the two systems. The state feedback controller minimized scalar control gains and the resulting response characteristics of the system were studied using the LQR design.

Finally, we improved the response characteristics of the translation system which are rising time, settling time, steady state error, and overshoot. LQR was better as compared with PD control.

Key Words : PD Control(PD 제어), Notch Filter(노치필터), LQR(Linear Quadratic Regulator)

1. 서 론

제어기의 설계기법은 J. Watt가 원심 조속기(flyball governor)를 개발한 후 직관에 의한 시행착오적 방법에 의해 발전되었다. J. C. Maxwell과 E. J. Routh에 의해 제어시스템의 안정도에 관한 연구가 최초로 수학적 이론에 기반을 두고 체계적으로 발전하였다.

1930년대부터 점차로 주파수응답 및 복소함수 개념이 도입되어 제어이론은 체계화되기 시작하여 H. Nyquist, H. W. Bode, W. R. Evans 등에 의하여 제어이론은 비약적으로 발전하였다. 세계 제2차 대전 중에는 필요한 병기 개발의 필요성으로 실제적인 제어문제 해결에 많은 발전이 있었다.

또한 1950년대에는 Bellman, Kalman, 그리고 Pontryagin 등에 의해 최적제어 이론이 소개되었다. 1960년도 이전에는

* 조선대학교 기계공학부(김택현:thkim@mail.chosun.ac.kr)
** 금호타이어 기술연구소

주로 단일입출력 시스템에 적절한 제어방법인 주파수역 접근법이 사용되었으나, 1960년대에 복잡한 다변수 시스템을 제어할 수 있는 시간역 접근법이 개발되었다. 그리고 1970년 후반부터는 주파수역 접근법과 시간역 접근법 중에서 각각의 좋은 특징만을 이용하려는 노력이 시작되어 Doyle과 Stein⁽¹⁾, 그리고 Zames⁽²⁾ 등에 의하여 실제 제어시스템 설계시 중요시되는 모델링 오차에 대한 안정도-강인성(stability-robustness) 문제를 제어시스템 설계 시에 직접 고려할 수 있는 강인 제어(robust control) 기법이 발달하였다. 최근에는 수학적으로 모델링하기 힘든 시스템이라 할지라도 퍼지 추론 방법⁽³⁾이나 신경회로망⁽⁴⁾을 이용하여 실제적인 제어 문제들을 해결할 수 있는 폭이 확대되어 가고 있다.

본 연구에서는 제어시스템의 응답특성 및 제어효과에 대하여 연구하고자 병진 시스템을 도입하였다. 병진 시스템은 스프링, 질량, 감쇠기로 이루어진 시스템으로, 서보 모터와 실행프로그램에 의해 전자적으로 제어되는 정밀한 장치이다. 시스템의 제어문제는 질량의 변화, 여러 가지 강성을 가지는 스프링, 감쇠기의 감쇠량을 조절함으로써 다양하게 변화시킬 수 있다. 특히, 강제로서 모델링된 시스템에서 실행되는 제어 문제는 공작기계의 위치제어, 자동차의 순항제어, 그리고 우주선의 자세 및 적재 제어 등과 같은 다양한 분야에 적용할 수 있다.

2. 병진시스템의 동특성

2.1 운동방정식

본 연구에서 2자유도 병진 시스템(이하 시스템)을 구성하여 실험하였다. 시스템은 스프링 질량, 액츄에이터 그리고 센서들로 구성되어 있으며, 시스템의 운동은 스프링-질량기구에 연결된 기어랙과 모터축에 연결된 피니언을 이용하여 모터의 회전운동이 질량에 대한 직선운동으로 변환되어 행해진다. 그림 1은 2자유도 시스템의 자유물체도(free body diagram)이다.

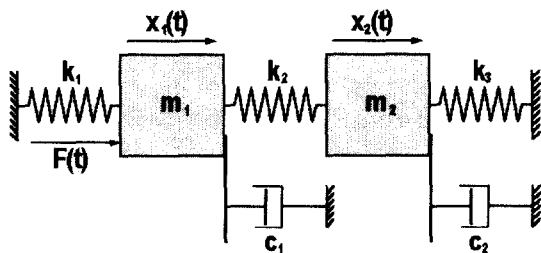


Fig. 1 Two degree of freedom plant model

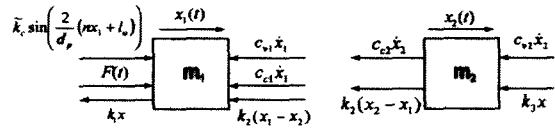


Fig. 2 Free body diagram including friction and nonlinearities

시스템에는 모터 코깅과 베어링, 기어 그리고덤퍼로부터의 쿨롱감쇠(Coulomb damping)와 점성감쇠(viscous damping) 등의 비선형력이 작용한다. 이러한 비선형적인 요소의 영향을 고려하여 그림 2로부터 시스템의 운동방정식을 구하면

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_{v1} \dot{x}_1 + \tilde{k}_c \sin\left(\frac{2}{d_p}(nx_1 + l_0)\right) + c_{c1} \dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F(t) \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_{v2} \dot{x}_2 + c_{c2} \dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 = 0 \quad (2)$$

이다. 식 (1)과 (2)는 비선형의 항을 포함하고 있다. 여기서 비선형의 항을 포함한 식은 등가의 선형의 식으로 변환할 수 있다. 식 (1)에서 세 번째 항은 모터의 코깅에 의한 힘이다. 모터의 코깅은 정지상태에 있을 때나 외력이 없을 때 시스템이 평형상태에 있는 곳으로 향한다. l_0 는 모터가 코깅을 멈추고 안정된 위치에 있을 때 평형점까지의 거리이다. 이때 평형점을 $x_1 = 0$ 으로 정의하고, 쿨롱마찰이 작으면 $l_0 \approx 0$ 이다. $x_1 = 0$ 에 대하여 Taylor급수 확장에 의해 선형화하면, 작은 변위에 대하여 등가 코깅력은 모터의 코깅에 의한 등가 스프링 강성 k_c 를 사용하여

$$\tilde{k}_c \sin\left(\frac{2}{d_p}(nx_1 + l_0)\right) \cong \tilde{k}_c 2n \frac{x_1}{d_p} \equiv k_c x_1 \quad (3)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 d_p 는 구동 모터 피니언의 지름이고, n 은 모터의 극수이다. 이것을 스프링강성 \tilde{k}_1 과 조합하여 연결된 스프링의 강성은

$$k_1 \equiv \tilde{k}_1 + k_c \quad (4)$$

이다. 그리고 시스템에 작용하는 마찰력은 점성마찰과 쿨롱마찰에 의한 것이다. 여기서 작용하는 쿨롱마찰은 시스템이 정규속도 \dot{x}_i 에서 운동할 때 점성마찰로 공급되어진 힘으로 대신 할 수 있다. 따라서 마찰에 의한 감쇠량은

$$c_i \equiv c_{vi} + c_{ci} \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

이다. 여기에서 c_{vi} 는 점성마찰에 의한 점성감쇠계수이고, c_{ci} 는 쿨롱마찰에 의한 등가 점성감쇠계수이다.

따라서, 시스템의 운동방정식은

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F(t) \quad (6)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 = 0 \quad (7)$$

이다.

2.2 전달함수

시스템의 전달함수는 초기조건 $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$ 으로 하고 식 (6)과 (7)을 Laplace 변환을 하여 정리하면

$$\frac{x_1(s)}{F(s)} = \frac{m_2 s^2 + c_2 s + k_2 + k_3}{D(s)} \quad (8)$$

$$\frac{x_2(s)}{F(s)} = \frac{k_2}{D(s)} \quad (9)$$

이다. 여기서,

$$D(s) = m_1 m_2 s^4 + (m_1 c_2 + m_2 c_1) s^3 + (m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2) + c_1 c_2) s^2 + (c_1(k_2 + k_3) + c_2(k_1 + k_2)) s + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 \quad (10)$$

이다.

3. 제어기 설계

3.1 시스템의 구성

병진 시스템은 동역학적 구성을 매우 다양하게 할 수 있다. 그중 다음의 두 가지 플랜트를 구성하여 제어실험을 행하였다. 첫 번째 플랜트는 1단은 자유단, 1단은 구속된

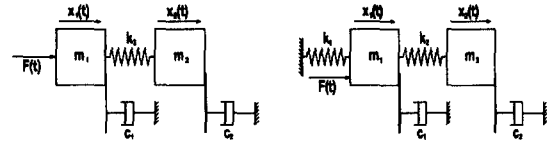


Fig. 3 Block diagram of PD control

형태로써 두 개의 질량사이에 스프링을 연결하고, 두 번째 질량에 감쇠기를 연결한 형태이다. 두 번째 플랜트는 양단이 모두 구속된 형태로 첫 번째 플랜트의 입력측에 스프링을 한 개 더 연결한 형태이다. 두 플랜트의 자유물체도를 그림 5에 나타냈다.

3.2 PD 제어

미분제어 방식에 비교해서 적분제어 방식은 시스템 유형을 증가시켜서 정상상태오차를 감소시키고자 할 때만 사용된다. 적분제어의 단점은 원점에 첨가된 극점이 시스템을 불안정하게 하는 경향이 있다는 것이다. 반대로 미분제어에 의해 첨가된 영점은 보통 시스템의 안정성을 증가시킨다. 그러므로 적분제어는 정상상태 에러를 감소시키고자 할 때 피드백 시스템에 자주 사용된다. PD 제어기는 앞섬보상기의 단순화된 형태로 전달함수 $G_c(s)$ 는 다음과 같다.

$$G_c(s) = k_p(1 + T_d s) \quad (11)$$

k_p 값은 보통 정상상태의 요구조건을 만족하도록 정해진다. PD제어는 시스템의 과도응답을 개선하기 위하여 사용되었다. 그림 3은 병진 시스템에 대한 PD제어를 실행하기 위한 블록다이어그램이다.

3.3 노치필터를 포함한 PD 제어

노치(notch) 보상기는 시스템의 특성에 따라 앞섬/뒤집 보상이 이상의 효과를 얻을 수 있다. 왜냐 하면 이것은 크기 및 위상 특성이 시스템의 저주파 및 고주파 특성에 영향을 주지 않기 때문이다. 노치 보상기는 극점-영점 상쇄 원리를 이용하지 않고 보상을 위한 바람직한 주파수 응답 크기 감소량과 공진주파수를 결정해 주는데 사용될 수 있다.

여기서는 감쇠 진동모드에서 간단한 비례 피드백(rate feedback)을 갖고, 노치필터는 감쇠모드 진동수에서 신호들의 전달을 더욱 감소시키기 위해 설계되었다. 마지막으로 PD 제어기가 좋은 실행결과를 얻기 위하여 사용되었다.

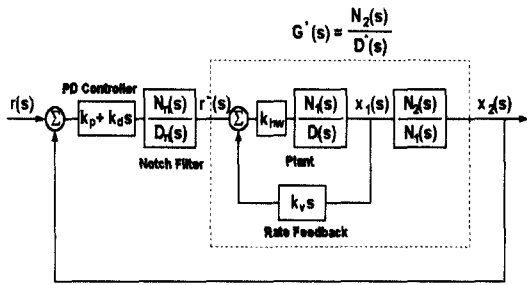


Fig. 4 Block diagram of PD plus notch filter control

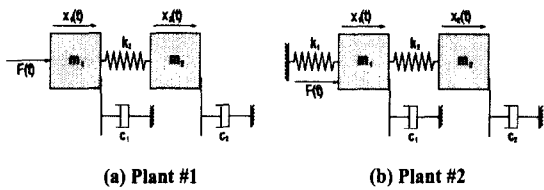


Fig. 5 Free body diagram of experimental system

그림 4는 제어계획에 대한 블록다이어그램이다. 안쪽 루프의 $x_1(s)/r^*(s)$ 에서 복소근의 만족스러운 감쇠를 주는 비례 피드백 이득(rate feedback gain) k_v 를 찾기 위하여 근 궤적기법을 이용한다. k_v 값은 첫 번째 질량의 더 높은 주파수 응답을 걸러내려는 경향을 가지며 제한된 한계치 제어(limit peak control) 효과에 도움을 줄 것이다.

새로운 플랜트 $G^*(s)$ 에 대하여 $N_2(s)$ 는 전에 값과 동일하고

$$D^*(s) = D(s) + k_v s N_1(s) \quad (12)$$

이다. 여기서 $N_1(s)$, $N_2(s)$, $D(s)$ 는 식 (8), (9), (10)의 값이다.

$5.0 \pm 5.0i$ 에서 두 개의 극점을 갖고, $8.0 \pm 8.0i$ 에서 두 개의 더 높은 주파수의 추가된 극점을 갖으며, $D^*(s)$ 의 극점에서 두 개의 영점을 갖는 노치필터 $N_n(s)/D_n(s)$ 을 설계하였다. 첫 번째 극점은 필터를 적당하게 만들기 위해 필요하다. 즉, $D_n(s)$ 에서 상응하는 극점의 제거효과를 받지 않기 위해서 $N_n(s)$ 의 영점에서 충분히 아래에 놓여진다. 두 번째 극점은 고주파 잡음을 작게 하기 위하여 직렬로 된 저주파 통과필터(low pass filter)로써 작용한다.

3.4 LQR 문제

시스템에 대하여 전체 상태 피드백제어(full state feed-

back control)인 LQR을 실행하게 된다.

LQR은 Riccati 방정식 해법⁷⁾이나 수치적 시스템설계 알고리즘을 이용하여 손실함수를 최소화하는 상태 피드백 제어기 게인을 구하여 실행한다.

선형시스템과 2차의 목적 함수를 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BF(t) \\ Y &= Cx \end{aligned} \quad (13)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t (x'Qx + u'Ru)dt \quad (14)$$

문제는 제어입력 $u(t)$ 에 대하여 J 를 최소화하는 것이다. 이는 LQR 문제로 알려져 있다.

일반적으로 Q 와 R 을 다양한 상태들과 제어 채널에 각각의 가중치를 적용한다. 주요한 설계 매개변수는 Q 와 R 이다. 좋은 응답을 가진 안정된 최적 시스템을 얻기 위해서는 여러가지 설계를 반복해 보는 것이 필요하다. 의미 있는 최적화 문제를 얻기 위해서는 Q, R 이 양의 고유치를 갖는 대칭행렬 이어야 한다.

식(13)의 모델이 2%의 지연과 본래 x_2 와 같은 출력을 갖도록 출력벡터 C 를 $[0 \ 0.002 \ 1 \ 0]$ 로 선택한다. 출력 x_2 에서 에리 값이 최소화되는 제어이득을 얻기 위하여 $Q = C'C$ 로 한다.

피드백 법칙은

$$u = -Kx \quad (15)$$

이다. 여기서 $K = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4]$ 이다.

$[A-BK]$ 의 고유값(eigenvalue)들로부터 결정된 페루프 극점 2개가 R 이 감소함에 따라 허수축의 왼쪽으로 이동하고, 실수축에 접근한다. 즉, 시스템의 진동은 감소하고 응답은 빨라지게 된다. x_1, x_2 의 저주파 외란을 제거하고, 트래킹(tracking)을 위하여 프리필터 게인 K_{pr} 는 $K_1 + K_3$ 값과 같아야 한다. 제어가중함수 R 에 따른 피드백 게인값은 MATLAB을 이용하여 구하였고, 표 1에 나타냈다.

4. 결과 및 고찰

1자유도의 강체로서 모델링된 플랜트에 스프링과 질량을 추가하여 시스템을 구성하였다. 이것은 강체 시스템에 대한 동적 외란을 추가한 것이다.

또한 2자유도의 병진 시스템은 강체로서 모델링된 시스

Table 1. Experimental values of feedback gains for LQR

	R	K_1	K_2	K_3	K_4	K_{pf}
plant #1	100	0.0766	0.0071	0.0234	0.0057	0.1
	10	0.2436	0.0129	0.0726	0.0185	0.3162
	1	0.5841	0.0201	0.4159	0.0585	1
	0.1	1.2357	0.0299	1.9266	0.1670	3.1623
plant #2	10	0.1842	0.0112	0.0855	0.0181	0.2697
	5	0.2586	0.0133	0.1410	0.0258	0.3996
	1	0.5075	0.0187	0.4433	0.0568	0.9508
	0.5	0.6565	0.0214	0.7081	0.0786	1.3646
	0.3	0.7872	0.0236	0.9887	0.0993	1.7759

템에 진동모드가 추가된 형태로 생각할 수 있다. 이때 강체로서 모델링된 시스템인 경우 x_2 는 1자유도 시스템에 대한 동적 외란으로 생각할 수 있다. 그림 6과 7은 PD 제어에 대한 계단응답을 도시한 것이다. 여기서의 궁극적인 제어목적은 x 의 응답을 개선하기 위함이다. 따라서 반복적으로 비례계인과 미분계인 값을 조정함으로써 개선된 응답을 얻을 수 있다. 그림 6에 비해 그림 7는 오버슈트와 정착시간 등의 응답특성은 개선되었으나 상승시간은 조금 길어지고, 정상상태 에러가 4% 증가하였다.

그림 8과 9는 노치필터를 포함한 PD 제어의 계단응답을 도시하였다. 비례계인 k_p 값이 커짐에 따라 시스템은 진동하게 되고, 더욱 증가하면 시스템은 불안정해지게 되며, 미분계인 k_d 값이 증가함에 따라 감쇠효과가 증대되어 언더슈트가 현저하게 감소하였으나 정착시간은 0.06초 증가하였다. PD제어에서의 계단응답과 비교하면 오버슈트나

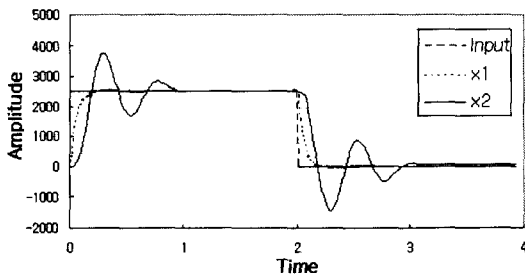


Fig. 6 Step response of PD control in case of plant #1($k_p=0.7, k_d=0.03$)

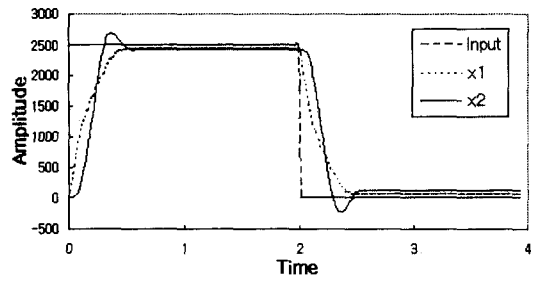


Fig. 7 Step response of PD control in case of plant #1($k_p=0.1, k_d=0.015$)

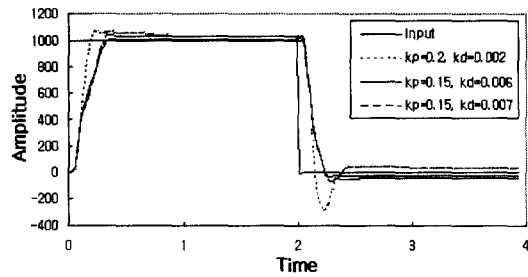


Fig. 8 Step response of PD plus notch filter control in case of plant #1

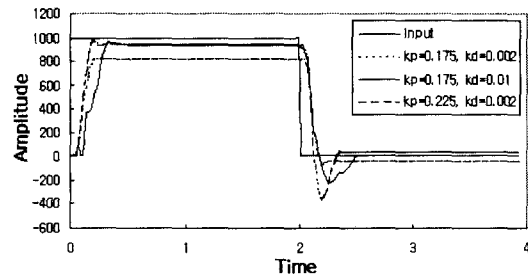


Fig. 9 Step response of PD plus notch filter control in case of plant #2

정상상태에러가 많이 감소하였다.

첫 번째 플랜트에서 LQR 기법에 대한 시스템의 계단응답을 그림 10에 나타냈다. $R=1$ 인 경우에 정착시간 0.16초, 3%의 오버슈트만을 갖고 정상상태에러는 영으로 가장 좋은 응답을 보였다. $R=0.1$ 인 경우에 시스템은 불안정하게 된다. 노치필터를 포함한 PD 제어의 경우보다 상승시간, 오버슈트, 정상상태에러가 현저하게 감소하여 좋은

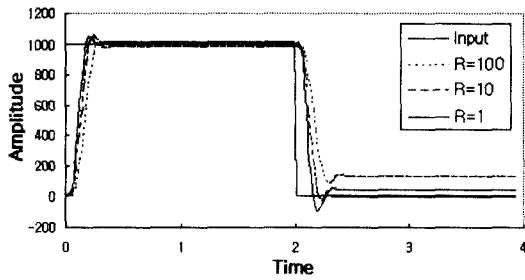


Fig. 10 Step response of LQR controlled system in case of plant #1

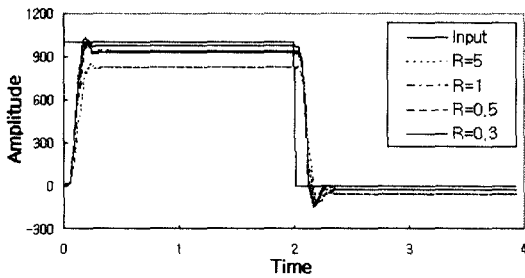


Fig. 11 Step response of LQR controlled system in case of plant #2

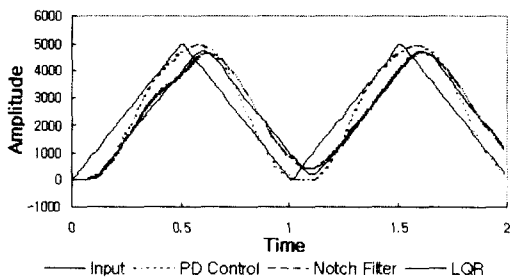


Fig. 12 Saw-tooth tracking in case of plant #1

실행결과를 가져왔다. 두 번째 플랜트에서 LQR에 대한 시스템의 계단응답은 그림 11에 나타났다. 이 경우 역시 노치필터를 포함한 PD 제어의 경우보다 더욱 개선된 응답을 보였다.

그림 12는 톱니파 입력에 대해 각각의 결과 값을 도시하였다. PD 제어의 경우 시스템의 응답은 오버슈트와 언더슈트 등이 많이 나타나고, 응답이 충실하지 못하였다.

반면에 노치필터를 추가하였을 경우에는 약간의 상지연이 발생하였으나 시스템의 응답은 많이 개선되었다. LQR의 경우 약간의 위상지연은 있으나 명령에 대한 레도추적은 충실하고, 가장 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

5. 결 론

스프링, 질량, 감쇠기로 이루어진 병진 시스템은 질량, 스프링의 강성, 감쇠계수를 변화시킬 수 있는 강제진동계이다. 특히, 강제로서 모델링된 시스템의 제어 문제는 공작기계의 위치제어, 자동차의 순항제어, 그리고 우주선의 자세 및 적재제어 등과 같은 다양한 분야에 적용할 수 있다.

본 연구에서는 2 자유도 병진 시스템에 노치필터를 포함한 PD제어 기법과 LQR 기법을 이용하여 그 응답특성을 모의실험하고 결과를 도출하였다.

감쇠 진동모드에서 복소근의 만족스러운 감쇠를 주기 위해 비례 피드백 계인을 사용하였다. 결과적으로 이 계인이 저주파 통과 필터로 작용하여 고주파 영역의 잡음과 떨림을 감소시켰서 노치필터 제어기법을 PD제어에 적용함으로써 시스템의 응답특성이 개선되었다.

LQR 기법은 선형 시스템의 제약조건에 종속된 제어입력에 대한 2차 함수를 최소화하는 기법으로써 시스템을 분석하고 설계할 때 선형 제어법칙을 이용할 수 있는 장점을 갖고 있다. LQR 기법을 이용한 2자유도 병진 시스템의 상태 피드백 제어에서는 제어가중합수를 변화시켜서 시스템의 응답속도를 빠르게 하고, 정상상태 에러를 감소시켜서 시스템의 응답특성을 향상시키는 효과를 가져와 가장 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

후 기

이 논문은 1999년도 조선대학교 학술연구비의 지원을 받아 연구되었음.

참 고 문 헌

- (1) Doyle, J., C. G. Stein., "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis." IEEE Trans. on Auto. Control. AC-26, pp. 4~16, 1981.
- (2) Zames, G., "Feedback and Optimal Sensitivity:

- Model Reference Transformation, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverse", IEEE Trans. Auto. Control, AC-26, pp. 301~320, 1981.
- (3) Maciejowski, J. M., 1989. Multivariable Feedback Design. Addison-Wesley.
 - (4) Sugeno, G, Industrial Applications of Fuzzy Control, North-Holland, 1985.
 - (5) Zadeh, L. A., "A Rationale for Fuzzy Control," Trans. ASME. J. of Dynamic System Measurement and Control. Vol 94, pp. 3~4, 1974.
 - (6) Miller, T. R. S. Sutton. P. J. Werbos., Neural Network for Control, The MIT Press. 1990.
 - (7) Kwakernaak and Sivar, Linear Optimal Control System, Wiley & Sons. 1972.