

< 논 문 >

원판의 비선형 비대칭 강제진동응답 Responses of Nonlinear Asymmetric Forced Vibrations of a Circular Plate

여 명 환* · 이 원 경**

Myeong Hwan Yeo and Won Kyoung Lee

(2001년 4월 28일 접수 : 2001년 6월 15일 심사완료)

Key Words : Nonlinear Vibration(비선형진동), Circular Plate Vibration(원판의 진동), Asymmetric Vibration(비대칭진동), Method of Multiple Scales(다중시간법), Primary Resonance(주공진)

ABSTRACT

An investigation into asymmetric vibrations of a clamped circular plate under a harmonic excitation is made. We examine a primary resonance, in which the frequency of excitation is near the natural frequency of an asymmetric mode of the plate. We found not only a response having the form of standing wave but also one having the form of traveling wave, which was not observed by Sridhar, Mook and Nayfeh.⁽¹⁾

1. 서 론

고정경계를 가진 원판의 횡변형은 중간평면의 신장을 수반하게 된다. 이 신장에 기인한 기하학적 비선형성은 운동의 진폭이 증가함에 따라 원판의 동적응답에 심각한 영향을 미치게 된다. 이 경우에는 선형 해석만으로는 이러한 계의 응답특성을 규명하는 데는 한계가 있으므로 비선형해석이 필요하다.

조화 가진력이 작용하는 고정경계를 가진 원판의 비선형진동에 대한 연구는 대칭진동에 대한 연구와 비대칭진동에 대한 연구로 나눌 수 있다. 대칭진동에 대한 연구는 Sridhar 등⁽²⁾과 Hadian과 Nayfeh⁽³⁾가 3개 모드의 상호작용(three-mode interaction)을 포함하는 원판의 주공진(primary resonance)을 연구하였고, Lee와 Kim⁽⁴⁾은 원판의 조합공진(combination resonance)을 연구하였다. 이러한 연구에서는 정상 상태응답이 대칭모드들만의 중첩이므로 정상파(standing wave)로 나타난다. 원판의 비대칭진동을 해석한 Sridhar 등⁽¹⁾은 가진진동수가 비대칭모드의 고유진동수에 가까운 주공진에선 정상파인 응답만 존재함을 확인하였으며, 대칭모드와 비대칭모드가 포함된 내부공진의 경우엔 가진진동수가 이 내부공진조건에 포함된 고유진동수 중 최대값에 가까운 주공진에선 정상파뿐만 아니라 진행파(traveling wave)인 응답도 가능함을 예측하였다. 그러나 이 연구에선 수치예를 통해 결과를 보여주지 않았으므로 사실 여부를 확인할 수가 없었다.

본 연구에서는 Sridhar 등⁽¹⁾의 해석과정을 엄밀히 검토하고 수치예를 통해 그 타당성을 검토한 결과 그들의 가해조건(solvability condition)에 오류가 있음을 확인하고 그 조건을 수정하였다.

2. 운동방정식과 해석

Fig. 1의 고정경계를 가진 얇은 원판의 횡변형이 두께에 비해 상당히 작다고 가정하면, 횡진동을 나타내는 무차원화된 운동방정식은 von Karman 방정식의 동적상사(dynamic analogue)로부터 다음과 같이 표현된다.⁽¹⁾

* 정회원, 영남대학교 대학원 기계공학부

** 정회원, 영남대학교 공과대학 기계공학부

E-mail : wkleee@yu.ac.kr

Tel : (053) 810-2455, Fax : (053) 813-3703

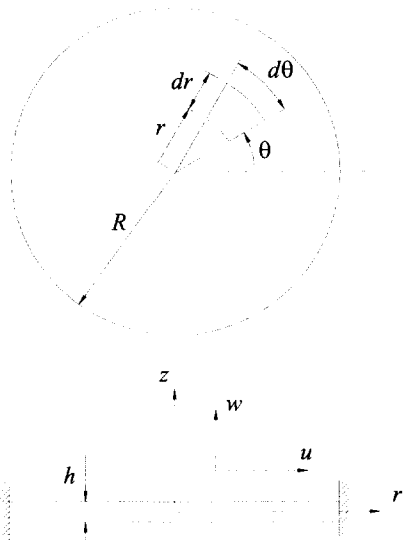


Fig. 1 A schematic diagram of a clamped circular plate

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nabla^4 w = \varepsilon [L(w, F) - 2c \frac{\partial w}{\partial t} + p(r, \theta, t)] \quad (1a)$$

$$\nabla^4 F = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (1b)$$

여기서,

$$L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \times \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \times \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right),$$

$$\nabla^4 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2$$

이고 w 는 중간평면의 횡변위, c 는 감쇠계수, p 는 외력, ν 는 Poisson 비(Poisson's ratio), F 는 응력함수, $\varepsilon (= 12(1-\nu^2)h^2/R^2 \ll 1)$ 은 작은 매개변수(small parameter)로서 각 항들의 상대적인 크기를 나타낸다.

경계조건은 모든 t 와 θ 에 대해 $r=1$ 에서

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}=0, \quad (2a, b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r^2} - \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2+\nu}{r^2} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2}$$

$$- \frac{3+\nu}{r^3} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3b)$$

그리고 $r=0$ 에서 해가 유한하다는 조건이 필요하다.

식 (1)~(3)의 비선형편미분방정식의 근사해를 다중시간법(method of multiple scales)을 적용하여 구하기 위해 w 와 F 가 다음과 같이 전개된다고 가정하자.

$$w(r, \theta, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j(r, \theta, T_0, T_1, \dots) \quad (4a)$$

$$F(r, \theta, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j F_j(r, \theta, T_0, T_1, \dots) \quad (4b)$$

여기서 $T_n = \varepsilon^n t$ 이다. 식 (1)~(3)에 식 (4)를 대입하고 ε 의 동일차수 계수들을 같게 두면,

$$D_0^2 w_0 + \nabla^4 w_0 = 0, \quad (5)$$

$$\nabla^4 F_0 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right), \quad (6)$$

$$D_0^2 w_1 + \nabla^4 w_1 = -2D_0 D_1 w_0 - 2c D_0 w_0 + p + \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 F_0}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F_0}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \quad (7)$$

여기서, $D_n = \partial / \partial T_n$ 이다. 그리고 모든 j, θ, t 에 대해 $r=1$ 에서

$$w_j = 0, \quad \frac{\partial w_j}{\partial r} = 0, \quad (8a, b)$$

$$\frac{\partial^2 F_j}{\partial r^2} - \nu \left(\frac{\partial F_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad (9a)$$

$$\frac{\partial^3 F_j}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial r^2} - \frac{\partial F_j}{\partial r} + (2+\nu) \frac{\partial^3 F_j}{\partial r \partial \theta^2} - (3+\nu) \frac{\partial^2 F_j}{\partial \theta^2} = 0. \quad (9b)$$

그리고 모든 j 에 대해 $r=0$ 에서 w_j 와 F_j 는 유한해야 한다.

식 (5)와 (8)로부터 w_0 는 다음과 같다.

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{0m}(r) A_{0m} e^{i\omega_{0m} T_0}$$

$$+ \sum_{n,m=1}^{\infty} \phi_{nm}(r) \{ A_{nm} e^{i(\omega_{nm} T_0 + n\theta)} + B_{nm} e^{i(\omega_{nm} T_0 - n\theta)} \} + cc \quad (10)$$

여기서 $\phi_{nm}(r)$ 은 경계조건을 만족하는 r 방향의 형상 함수(shape function)로서 다음과 같다.

$$\phi_{nm} = x_{nm} \left[J_n(\eta_{nm} r) - \frac{J_n(\eta_{nm})}{I_n(\eta_{nm})} I_n(\eta_{nm} r) \right]$$

J_n 은 베셀함수(Bessel function of the first kind of order n)이고, I_n 은 수정베셀함수(modified Bessel function of the first kind of order n)이며, 상수 x_{nm} 은 ϕ_{nm} 을 다음과 같이 정규화(normalize)함으로써 구해진다.

$$\int_0^1 r \phi_{nm}^2 dr = 1$$

η_{nm} 은 특성방정식

$$I_n(\eta) J_n'(\eta) - I_n'(\eta) J_n(\eta) = 0$$

의 근으로 $\omega_{nm} = \eta_{nm}^2$ 이고 n 은 반경방향의 nodal 선의 수를 m 은 경계를 포함하여 원주방향의 nodal 선의 수를 나타낸다. A_{nm} , B_{nm} 은 $n \geq 1$ 인 T_n 의 복소 함수(complex function)로서 다음단계의 근사화에서 가해조건(solvability condition)으로부터 구해질 수 있다. cc 는 앞 항의 공액복소수(complex conjugate)를 나타낸다. 식 (10)에서 우변 첫 번째 항은 진폭이 시간(T_n , $n \geq 0$)의 함수인 대칭모드들의 중첩을, 두 번째 항은 진폭이 시간의 함수인 비대칭모드들의 중첩으로 T_0 가 변함에 따라 서로 다른 원주방향으로 진행되는 진행파의 중첩을 나타낸다. $\omega_{-nm} = \omega_{nm}$, $\phi_{-nm} = \phi_{nm}$ 으로 두면 식 (10)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{nm}(r) u_{nm}(T_0, T_1, \dots) e^{in\theta} \quad (11)$$

여기서

$$u_{nm} = A_{nm} e^{i\omega_{nm} T_0} + \bar{B}_{nm} e^{-i\omega_{nm} T_0}$$

이고 $A_{-nm} = \bar{B}_{nm}$ 이다.

식 (11)을 식 (6)에 대입하고 경계조건 식 (9)를 이용하면 F_0 는 다음과 같다.

$$F_0 = \sum_{a,n=-\infty}^{\infty} \sum_{b,m,q=1}^{\infty} \phi_{ab} G(nm, pq, ab) u_{nm} u_{pq} e^{ia\theta} \quad (12)$$

여기서 $p = a - n$,

$$G(nm, pq, ab) = \xi_{ab}^{-4} \int_0^1 r \phi_{ab} E(nm, pq) dr$$

$$E(nm, pq) = \frac{-n\dot{p}}{r^2} \left(\phi'_{nm} - \frac{\phi_{nm}}{r} \right) \left(\phi'_{pq} - \frac{\phi_{pq}}{r} \right)$$

$$- \frac{1}{2r} (\phi'_{nm} \phi'_{pq})' + \frac{1}{2r^2} (p^2 \phi''_{nm} \phi_{pq} + n^2 \phi''_{pq} \phi_{nm})$$

$$\phi_{an} = \tilde{\chi}_{an} [J_a(\xi_{an} r) - \tilde{c}_{an} I_a(\xi_{an} r)]$$

여기서, 상수 $\tilde{\chi}_{an}$ 은 다음의 정규화로 구하여진다.

$$\int_0^1 r \phi_{an}^2 dr = 1$$

그리고,

$$\tilde{c}_{an} = \frac{[a(a+1)(\nu+1) - \xi_{an}^2] J_a(\xi_{an}) - \xi_{an}(\nu+1) J_{a-1}(\xi_{an})}{[a(a+1)(\nu+1) + \xi_{an}^2] I_a(\xi_{an}) - \xi_{an}(\nu+1) I_{a-1}(\xi_{an})}$$

ξ_{an} 은 다음 특성방정식의 근이다.

$$\begin{aligned} & a^2(a+1)(\nu+1) [J_a(\xi_{an}) - \tilde{c}_{an} I_a(\xi_{an})] \\ & - a^2 \xi_{an}(\nu+1) [J_{a-1}(\xi_{an}) - \tilde{c}_{an} I_{a-1}(\xi_{an})] \\ & + a \xi_{an}^2 [J_a(\xi_{an}) + \tilde{c}_{an} I_a(\xi_{an})] \\ & - \xi_{an}^3 [J_{a-1}(\xi_{an}) + \tilde{c}_{an} I_{a-1}(\xi_{an})] = 0 \end{aligned}$$

식 (7)에서 c 는 모드감쇠계수이며,

$$p = \left[\sum_{m=1}^{\infty} P_{0m} \phi_{0m} + \sum_{n,m=1}^{\infty} P_{nm} \phi_{nm} \cos(n\theta + \tau_{nm}) \right] \cos \lambda T_0$$

로 두고, 식 (12), (11)과

$$w_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} H_{nm}(T_0, T_1, \dots) \phi_{nm} e^{in\theta}$$

을 대입하여 $r \phi_{kl} e^{-ik\theta}$ 를 곱하고 양변을 $r=0$ 에서 1까지, $\theta=0$ 에서 2π 까지 적분하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & D_0^2 H_{kl} + \omega_{kl}^2 H_{kl} = -2i\omega_{kl} [(D_1 A_{kl} + c_{kl} A_{kl}) e^{i\omega_{kl} T_0} \\ & - (D_1 \bar{B}_{kl} + c_{kl} \bar{B}_{kl}) e^{-i\omega_{kl} T_0}] \\ & + \frac{1}{4} P_{kl} e^{i\tau_{kl}} [e^{i\lambda T_0} + e^{-i\lambda T_0}] \\ & + \sum_{n,c=-\infty}^{\infty} \sum_{d,m,q=1}^{\infty} \Gamma(kl, cd, nm, pq) \sum_{j=1}^8 S_j e^{i\lambda_j T_0} \quad (13) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Gamma(kl, cd, nm, pq) &= \sum_{\delta=1}^{\infty} G(nm, pq, ab) \\ &\times \int_0^1 r \phi_{kl} \bar{E}(cd, ab) dr \end{aligned}$$

$$\hat{E}(cd, pq) = \frac{\phi_{cd}''}{r} \left(\psi_{ab}' - \frac{a^2}{r} \psi_{ab} \right) + \frac{\psi_{ab}''}{r} \left(\phi_{cd}' - \frac{c^2}{r} \phi_{cd} \right) + \frac{2ac}{r^2} \left(\psi_{ab}' - \frac{1}{r} \psi_{ab} \right) \left(\phi_{cd}' - \frac{1}{r} \phi_{cd} \right),$$

$$a = k - c, \quad p = k - c - n,$$

$$S_1 = A_{cd} A_{nm} A_{pq}, \quad S_2 = A_{cd} A_{nm} \bar{B}_{pq},$$

$$S_3 = A_{cd} \bar{B}_{nm} A_{pq}, \quad S_4 = \bar{B}_{cd} A_{nm} A_{pq},$$

$$S_5 = \bar{B}_{cd} \bar{B}_{nm} \bar{B}_{pq}, \quad S_6 = \bar{B}_{cd} \bar{B}_{nm} A_{pq},$$

$$S_7 = \bar{B}_{cd} A_{nm} \bar{B}_{pq}, \quad S_8 = A_{cd} \bar{B}_{nm} \bar{B}_{pq},$$

$$\Lambda_1 = \omega_{cd} + \omega_{nm} + \omega_{pq}, \quad \Lambda_2 = \omega_{cd} + \omega_{nm} - \omega_{pq},$$

$$\Lambda_3 = \omega_{cd} - \omega_{nm} + \omega_{pq}, \quad \Lambda_4 = -\omega_{cd} + \omega_{nm} - \omega_{pq},$$

$$\Lambda_5 = -\omega_{cd} - \omega_{nm} - \omega_{pq}, \quad \Lambda_6 = -\omega_{cd} - \omega_{nm} + \omega_{pq},$$

$$\Lambda_7 = -\omega_{cd} + \omega_{nm} - \omega_{pq}, \quad \Lambda_8 = \omega_{cd} - \omega_{nm} - \omega_{pq}.$$

식 (13)은 우변에서 $e^{\pm i\omega_k T_0}$ 의 계수 즉 불멸항(secular term)들의 합이 0이 되는 다음과 같은 가해조건(solvability condition)을 가진다.

$$\begin{aligned} & -2i\omega_{kl}(D_1 A_{kl} + c_{kl} A_{kl}) \\ & + A_{kl} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{klm} (A_{nm} \bar{A}_{nm} + B_{nm} \bar{B}_{nm}) - \gamma_{klkl} A_{kl} \bar{A}_{kl} \right\} \\ & + 2(1 - \delta_{kl}) B_{kl} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_{klm} A_{km} \bar{B}_{km} - \hat{\gamma}_{klkl} A_{kl} \bar{B}_{kl} \right\} + N_{kl}^A + R_{kl}^A = 0 \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} & 2i\omega_{kl}(D_1 \bar{B}_{kl} + c_{kl} \bar{B}_{kl}) \\ & + \bar{B}_{kl} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{klm} (A_{nm} \bar{A}_{nm} + B_{nm} \bar{B}_{nm}) - \gamma_{klkl} B_{kl} \bar{B}_{kl} \right\} \\ & + 2(1 - \delta_{kl}) \bar{A}_{kl} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_{klm} A_{km} \bar{B}_{km} - \hat{\gamma}_{klkl} A_{kl} \bar{B}_{kl} \right\} + N_{kl}^B + R_{kl}^B = 0 \end{aligned} \quad (14b)$$

여기서 δ 는 Kronecker delta이며, $R_{kl}^{A,B}$ 는 내부공진에서 기인하는 항이고, $N_{kl}^{A,B}$ 는 외부가진에서 기인하는 항이며, γ_{klm} 와 $\hat{\gamma}_{klm}$ 은 다음과 같이 정의되는 상수이다.

$$\begin{aligned} \gamma_{klm} &= \Gamma(kl, kl, nm, -nm) \\ & + \Gamma(kl, -nm, kl, nm) + \Gamma(kl, nm, -nm, kl) \\ \hat{\gamma}_{klm} &= \Gamma(kl, km, km, -kl) \\ & + \Gamma(kl, -kl, km, km) + \Gamma(kl, km, -kl, km) \end{aligned}$$

식 (14)는 이 식에 해당하는 Sridhar 등⁽¹⁾의 식 (31)과는 현저히 다르다.

이 현저한 차이가 결과에 어떤 영향을 미치는지를 알아보기 위하여 $\lambda \approx \omega_{11}$ 인 주공진의 경우를 검토해보기로 한다. 가진진동수 λ 가 ω_{11} (=21.2604)에 가까운 정도를 나타내기 위하여 이탈변수(detuning parameter) σ 를 다음과 같이 도입하자.

$$\lambda = \omega_{11} + \varepsilon\sigma$$

식 (14)에서 A_{nm} , B_{nm} 을 식 (15)와 같은 극좌표 표현으로 바꾸고 실수부와 허수부로 분리하면 식 (16)과 같은 상미분방정식을 얻는다.

$$A_{nm} = \frac{1}{2} a_{nm} e^{i\alpha_{nm}}, \quad B_{nm} = \frac{1}{2} b_{nm} e^{i\beta_{nm}} \quad (15a, b)$$

$$\begin{aligned} & \omega_{kl}(a_{kl}' + c_{kl} a_{kl}) - \frac{1}{4}(1 - \delta_{kl}) b_{kl} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_{klm} a_{km} b_{km} \\ & \times \sin(\alpha_{km} - \beta_{km} - \alpha_{kl} + \beta_{kl}) - \frac{1}{4} \delta_{kl} \delta_{\Lambda} P_{11} \sin \mu_{11}^a = 0 \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} & \omega_{kl}(b_{kl}' + c_{kl} b_{kl}) + \frac{1}{4}(1 - \delta_{kl}) a_{kl} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_{klm} a_{km} b_{km} \\ & \times \sin(\alpha_{km} - \beta_{km} - \alpha_{kl} + \beta_{kl}) - \frac{1}{4} \delta_{kl} \delta_{\Lambda} P_{11} \sin \mu_{11}^b = 0 \end{aligned} \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} & \omega_{kl} a_{kl} a_{kl}' + \frac{1}{8} a_{kl} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{klm} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) - \gamma_{klkl} a_{kl}^2 \right\} \\ & + \frac{1}{4}(1 - \delta_{kl}) b_{kl} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_{klm} a_{km} b_{km} \times \cos(\alpha_{km} - \beta_{km} - \alpha_{kl} + \beta_{kl}) - \hat{\gamma}_{klkl} a_{kl} b_{kl} \right] \\ & + \frac{1}{4} \delta_{kl} \delta_{\Lambda} P_{11} \cos \mu_{11}^a = 0 \end{aligned} \quad (16c)$$

$$\begin{aligned} & \omega_{kl} b_{kl} b_{kl}' + \frac{1}{8} b_{kl} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{klm} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) - \gamma_{klkl} b_{kl}^2 \right\} \\ & + \frac{1}{4}(1 - \delta_{kl}) a_{kl} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_{klm} a_{km} b_{km} \times \cos(\alpha_{km} - \beta_{km} - \alpha_{kl} + \beta_{kl}) - \hat{\gamma}_{klkl} a_{kl} b_{kl} \right] \\ & + \frac{1}{4} \delta_{kl} \delta_{\Lambda} P_{11} \cos \mu_{11}^b = 0 \end{aligned} \quad (16d)$$

여기서 '은 T_1 에 대한 미분을 나타내고,

$$\mu_{11}^a = \sigma T_1 + \tau_{11} - \alpha_{11}, \quad \mu_{11}^b = \sigma T_1 - \tau_{11} - \beta_{11}$$

이다. 정상상태에서 $a_{kl}' = b_{kl}' = 0$ 이므로, $kl \neq 11$ 인 경우 식 (16a)와 (16b)에서 $a_{kl} = b_{kl} = 0$ 이다. a_{kl} , b_{kl} 이 0이 아닌 해가 존재한다고 가정하면, 식 (16a)를 b_{kl} 로 나누고 식 (16b)를 a_{kl} 로 나누어 더하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\frac{c_{kl}(a_{kl}^2 + b_{kl}^2)}{a_{kl} b_{kl}} = 0 \quad (17)$$

감쇠 c_{kl} 이 양인 경우, 식 (17)을 만족하는 0이 아닌 실수 a_{kl} , b_{kl} 은 존재하지 않는다. 따라서 $a_{kl} = b_{kl} = 0$ ($kl \neq 11$)인 해만이 존재하고, 식 (16)으로부터 $kl=11$ 일 때 다음과 같은 4개의 자율상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} a_{11}' &= -c_{11}a_{11} + \frac{P_{11}}{4\omega_{11}} \sin \mu_{11}^a, \\ b_{11}' &= -c_{11}b_{11} + \frac{P_{11}}{4\omega_{11}} \sin \mu_{11}^b \end{aligned} \quad (18a, b)$$

$$a_{11}\mu_{11}^{a'} = \sigma a_{11} + \frac{\gamma_{1111}}{8\omega_{11}} a_{11}(a_{11}^2 + 2b_{11}^2) + \frac{P_{11}}{4\omega_{11}} \cos \mu_{11}^a \quad (18c)$$

$$b_{11}\mu_{11}^{b'} = \sigma b_{11} + \frac{\gamma_{1111}}{8\omega_{11}} b_{11}(b_{11}^2 + 2a_{11}^2) + \frac{P_{11}}{4\omega_{11}} \cos \mu_{11}^b \quad (18d)$$

정상상태응답은 식 (18)의 평형해($a_{kl}' = b_{kl}' = \mu_{kl}' = \mu_{kl}^{b'} = 0$)로부터 구해지는데, w 를 식 (4a), (10), (15)를 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$w = w_0 + O(\epsilon)$$

여기서,

$$\begin{aligned} w_0 &= \phi_{11} \{ a_{11} \cos(\lambda t - \mu_{11}^a + \theta + \tau_{11}) \\ &\quad + b_{11} \cos(\lambda t - \mu_{11}^b - \theta - \tau_{11}) \} \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)의 근사해는 위상속도(phase velocity)가 λ 이며, 진폭이 각각 $a_{11}\phi_{11}$ 과 $b_{11}\phi_{11}$ 인 두 진행파의 중첩을 나타내고 있다. 이 두 파는 시간이 경과함에 따라 각각 시계방향과 반시계방향으로 진행하는 파이다. μ_{11}^a 와 μ_{11}^b 는 각 파의 시간(t)과 관련된 위상각을, τ_{11} 은 공간(θ)과 관련된 위상각을 나타낸다.

식 (18)에서 정상상태응답이 $a_{11} = b_{11}$ 인 경우에는 $\mu_{11}^a = \mu_{11}^b$ 가 되고 이 경우 식 (19)는 다음과 같이 표현된다.

$$w_0 = 2\phi_{11}a_{11} \cos(\lambda t - \mu_{11}^a) \cos(\theta + \tau_{11}) \quad (20)$$

식 (20)의 응답은 모드형상(mode shape)이 $\phi_{11}\cos(\theta + \tau_{11})$ 이고 진동수가 λ 인 진동 즉, 고유진동수 ω_{11} 에 해당하는 비대칭모드와 유사한 정상파를 나타내고 있다. 달리 말하자면, 식 (19)에서의 두 진행파가 중첩되어 정상파가 된 것이다.

식 (18)에서 정상상태응답이 $a_{11} \neq b_{11}$ 인 경우에는

두 진행파가 중첩된 결과는 진행파가 되어 시간이 경과함에 따라 nodal 선이 회전한다(부록 참조).

수치결과를 위해 본 연구에서는

$$\{\nu, \epsilon, \epsilon c, \epsilon P_{11}\} = \{1/3, 0.001067, 0.01, 8\}$$

인 경우를 생각하였다. 식 (13)의 $\Gamma(kl, cd, nm, pq)$ 를 통해 $\gamma_{1111} = -772.046$ 을 구하였다. 이 값을 이용하여 식 (18)의 정상상태응답 a_{11} , b_{11} 을 $\epsilon\sigma$ 의 함수로서 구하여 Fig. 2에 나타내었다. SS1, SS2, US1, US2는 $a_{11} = b_{11}$ 인 응답 즉, 정상파를 나타내며, ST1, UT1, UT2는 $a_{11} \neq b_{11}$ 인 응답 즉, 진행파를 나타내고 있다. 실선은 안정한 응답을, 점선은 불안정한 응답을 나타낸다.

정상파에 해당하는 응답은 US1이 불안정하다는 점을 제외하면 Duffing 진동계의 응답과 일치하고 있다. 유일하게 안정한 진행파에 해당하는 응답 {ST1A, ST1B}는 $\{a_{11}, b_{11}\}$ 이나 $\{b_{11}, a_{11}\}$ 을 나타낸다.

Fig. 2는 $\epsilon\sigma < 0.025$ 의 경우에는 정상파가, $0.025 < \epsilon\sigma < 0.095$ 의 경우에는 진행파가 실재함을 보여주고 있다. 또한 $0.095 < \epsilon\sigma < 0.420$ 의 경우에는 정상파와 진행파가 공존하며, $\epsilon\sigma > 0.420$ 의 경우에는 정상파만 실재한다.

Sridhar 등⁽¹⁾의 해석은 Duffing 진동계의 응답과 일치하는 정상파의 존재만 확인하고 있다. 본 연구결과와의 주목할만한 차이는 식 (14)와 그들의 식 (31)⁽¹⁾의 차이에서 비롯한 것으로 추측된다.

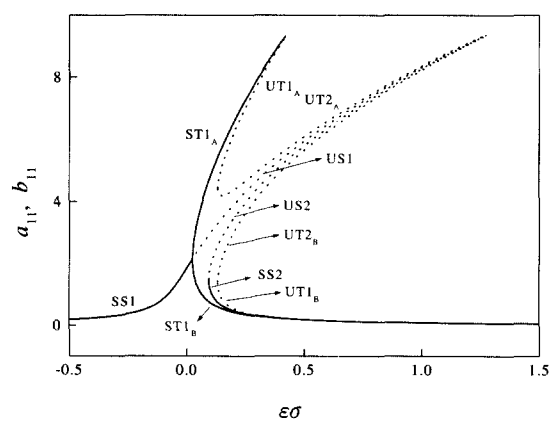


Fig. 2 Variations of the amplitudes with detuning parameter $\epsilon\sigma$ when $\epsilon P_{11} = 8$. —, stable; - - -, unstable.

3. 결 론

조화가진을 받는 원판의 비선형 비대칭 진동응답을 연구하기 위하여 비대칭 모드의 주 공진을 조사하였다. 그 결과 Sridhar 등⁽¹⁾의 가해조건에 오류가 있음을 발견하고 이 조건을 수정하였다. 결국 Sridhar 등⁽¹⁾이 정상파의 존재만 확인한 것과는 달리, 정상파와 더불어 진행파도 실재할 수 있음을 확인하였다.

후 기

이 논문은 2000학년도 영남대학교 학술연구조성비 지원에 의한 것임.

참 고 문 헌

- (1) Sridhar, S. Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1978, "Non-Linear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part II: Asymmetric Responses of Circular Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 59, No. 2, pp. 159~170.
- (2) Sridhar, S. Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1975, "Non-Linear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part I: Symmetric Responses of Circular Plates.", Journal of Sound and Vibration, Vol. 41, No. 3, pp. 359~373.
- (3) Hadian, J. and Nayfeh, A. H., 1990, "Modal Interaction in Circular Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 142, No. 2, pp. 279~292.
- (4) Lee, W. K. and Kim, C. H., 1995, "Combination Resonances of a Circular Plate with Three-Mode Interaction", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 62, pp. 1015~1022.

부 록

근사화 변위 w_0 를 나타내는 식 (19)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \phi_{11} \{ a_{11} \cos(\lambda t - \mu_{11}^a + \theta + \tau_{11}) \\
 &\quad + b_{11} \cos(\lambda t - \mu_{11}^b - \theta - \tau_{11}) \} \quad (19) \\
 &= \phi_{11} \{ X_1 \cos(\lambda t - \chi_1) \cos(\theta + \tau_{11}) \\
 &\quad - X_2 \cos(\lambda t - \chi_2) \sin(\theta + \tau_{11}) \} \quad (A-1)
 \end{aligned}$$

$$= q_1(t) \phi_{11} \cos \theta + q_2(t) \phi_{11} \sin \theta \quad (A-2)$$

여기서,

$$q_1(t) = Y_1 \cos \lambda t + Y_2 \sin \lambda t = Z_1 \cos(\lambda t - \zeta_1),$$

$$q_2(t) = Y_3 \cos \lambda t + Y_4 \sin \lambda t = Z_2 \cos(\lambda t - \zeta_2),$$

$$X_1 = \sqrt{a_{11}^2 + b_{11}^2 + 2a_{11}b_{11} \cos(\mu_{11}^a - \mu_{11}^b)},$$

$$\tan \chi_1 = \frac{a \sin \mu_{11}^a + b \sin \mu_{11}^b}{a \cos \mu_{11}^a + b \cos \mu_{11}^b},$$

$$X_2 = \sqrt{a_{11}^2 + b_{11}^2 - 2a_{11}b_{11} \cos(\mu_{11}^a - \mu_{11}^b)},$$

$$\tan \chi_2 = \frac{a \cos \mu_{11}^a - b \cos \mu_{11}^b}{-a \sin \mu_{11}^a + b \sin \mu_{11}^b},$$

$$Y_1 = a_{11} \cos(\mu_{11}^a - \tau_{11}) + b_{11} \cos(\mu_{11}^b + \tau_{11}),$$

$$Y_2 = a_{11} \sin(\mu_{11}^a - \tau_{11}) + b_{11} \sin(\mu_{11}^b + \tau_{11}),$$

$$Y_3 = a_{11} \sin(\mu_{11}^a - \tau_{11}) - b_{11} \sin(\mu_{11}^b + \tau_{11}),$$

$$Y_4 = -a_{11} \cos(\mu_{11}^a - \tau_{11}) + b_{11} \cos(\mu_{11}^b + \tau_{11}),$$

$$Z_1 = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}$$

$$= \sqrt{a_{11}^2 + b_{11}^2 + 2a_{11}b_{11} \cos(\mu_{11}^a - \mu_{11}^b - 2\tau_{11})}$$

$$Z_2 = \sqrt{Y_3^2 + Y_4^2}$$

$$= \sqrt{a_{11}^2 + b_{11}^2 - 2a_{11}b_{11} \cos(\mu_{11}^a - \mu_{11}^b - 2\tau_{11})}$$

$$\tan \zeta_1 = \frac{Y_2}{Y_1}, \quad \tan \zeta_2 = \frac{Y_4}{Y_3}$$

식 (19)는 각각 a_{11} , b_{11} 의 진폭을 가지고 서로 반대방향으로 진행되는 두 진행파의 합에 r 만의 함수인 ϕ_{11} 이 곱해진 표현이고, 식 (A-1)은 각각 X_1 , X_2 의 진폭을 가지고 θ 방향으로 위상이 $\pi/2$ 만큼 차이가 나는 두 정상파의 합에 ϕ_{11} 이 곱해진 표현이다. 식 (A-2)는 ω_{11} 에 상응하는 두 진동양상 $\phi_{11} \cos \theta$ 와 $\phi_{11} \sin \theta$ (Fig. A-1)에 시간의 함수 $q_1(t)$ 와 $q_2(t)$ 가 각각 곱해져서 선형진동모드와 유사한 두 모드의 중첩으로 표현된 것이다.

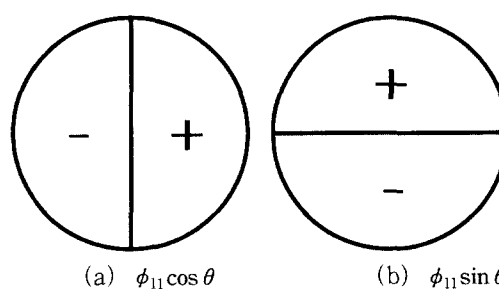


Fig. A-1 Two mode shapes corresponding to ω_{11}