

<논 문>

변두께를 갖는 두꺼운 환형판의 삼차원적 리츠방법에 의한  
진동수와 모드형상

Frequencies and Mode Shapes of Annular Plates with Variable  
Thickness by the Ritz Method in Three-Dimensional Analysis

양 근 혁\* · 강 재 훈\*\*

Keun-Hyeok Yang and Jae-Hoon Kang

(2001년 2월 8일 접수 : 2001년 6월 29일 심사완료)

**Key Words** : Three-dimensional Analysis(3차원적 해석), Thick Plate(후판), Annular Plate(환형판), Ritz Method(리츠방법), Variable Thickness(변두께), Convergence Study(수렴연구), Vibration(진동)

ABSTRACT

The Ritz method is applied in a three-dimensional (3-D) analysis to obtain accurate frequencies for thick, linearly tapered, annular plates. The method is formulated for annular plates having any combination of free or fixed boundaries at both inner and outer edges. Admissible functions for the three displacement components are chosen as trigonometric functions in the circumferential co-ordinate, and algebraic polynomials in the radial and thickness co-ordinates. Upper bound convergence of the non-dimensional frequencies to the exact values within at least four significant figures is demonstrated. Comparisons of results for annular plates with linearly varying thickness are made with ones obtained by others using 2-D classical thin plate theory. Extensive and accurate (four significant figures) frequencies are presented for completely free, thick, linearly tapered annular plates having ratios of average plate thickness to difference between outer radius ( $a$ ) and inner radius ( $b$ ) ratios ( $h_m/L$ ) of 0.1 and 0.2 for  $b/L=0.2$  and 0.5. All 3-D modes are included in the analyses: e.g., flexural, thickness-shear, in-plane stretching, and torsional. Because frequency data given is exact to at least four digits, it is benchmark data against which the results from other methods (e.g., 2-D thick plate theory, finite element methods, finite difference methods) and may be compared. Throughout this work, Poisson's ratio  $\nu$  is fixed at 0.3 for numerical calculations.

1. 서론

대부분의 두꺼운 원형판과 환형판의 진동해석은 Mindlin<sup>(1)</sup>이 전개한 2차원적인 6계의 판이론을 사용

\* 중앙대학교 대학원

\*\* 정회원, 중앙대학교 공과대학 건축학과

E-mail : jhkang@cau.ac.kr

Tel : (02) 820-5342. Fax : (02) 812-4150

해 왔다. 일반적으로 이 이론은 두꺼운 판의 하위진동수와 휨모드에는 비교적 정확하다. 최근 몇 년 동안, 임의의 판 두께에도 적용될 수 있는 엄밀한 3차원적 탄성이론에 입각한 연구가 상당히 이루어져 왔다.<sup>(2~9)</sup> 그러나 이 모든 연구는 일정한 두께를 갖는 판에 관한 연구에 국한되어 있다. 판의 두께가 두꺼워질수록 '원형판'과 '환형판'이라는 용어는 그 의미를 상실하게 되며 오히려 '속이 찬 원기둥'과 '속이 빈 원기둥'이라는 용어가 이러한 문제를 더 잘 설명해

준다. 보다 강력한 컴퓨터의 출현과 보다 효율적인 해석절차가 연구됨에 따라서 3차원적 이론 및 해석은 기존의 2차원적 판이론의 정확도를 검증해 줄 뿐 만이 아니라, 정확한 진동수와 모드 형상을 구해줄 수 있기 때문에 점차 그 중요성과 필요성이 증가될 것이다.

변두께를 갖는 판의 경우, 2차원적 이론에 의한 지배 운동 미분방정식은 변계수를 갖게 되며, 이런 사실은 그 방정식의 근을 구하는데 어려움을 더해준다. 그런 어려움에도 불구하고 최근에 변두께를 갖는 판에 대한 관심과 연구가 상당한 수준으로 이루어져 왔다. 변두께를 가지는 원형판과 환형판에 대한 많은 문헌을 접할 수 있는데, 여기에는 다양한 형태의 두께 변분과 경계조건에 대한 정보를 얻을 수 있다. Leissa<sup>(10)</sup>의 저서와 그의 일련의 리뷰 조항<sup>(11~13)</sup>에는 1966년도 이전<sup>(10)</sup>과 1973에서 1985년도까지<sup>(11~13)</sup>의 판의 진동과 관련된 거의 모든 문헌이 잘 정리되어 있다. 일찍이 Conway,<sup>(14,15)</sup> Kovalenko,<sup>(16)</sup> Kazantseva,<sup>(17)</sup> Ehrich<sup>(18)</sup>는 고전적인 박판이론을 사용하여 변두께를 갖는 원형판과 환형판의 진동을 2차원적으로 연구하였다. Kovalenko<sup>(16)</sup>의 주된 연구는 미분방정식의 해를 급수로 가정하여 근을 구하였다. 경계조건은 특성행렬식을 무한차수로 만들지만, 그 차수를 유한으로 가정하여 근사해를 구하였다. 내측은 고정되고 외측은 자유경계조건을 갖는 환형판에 대한 수치결과는 주어지지 않았지만, 완전 자유 경계조건에 대한 수치결과는 주어지지 않았다.

Sony와 Amba Rao<sup>(19)</sup>는 두께가 선형적으로 변하는 직방성(orthotropic)의 원형판의 축대칭 자유진동을 연구하였다. 그들은 Mindlin 판이론을 근간으로 지배미분방정식을 유도하였으며, Chebyshev 병치법(collocation method)을 사용해서 이 미분방정식을 풀었다.

Irie<sup>(20)</sup>는 변두께를 갖는 환형판을 Mindlin의 판이론으로 다루었으며, Gupta와 Lal<sup>(21)</sup>은 Chebyshev 병치법을 사용해서 변두께를 갖는 극직방성(polar orthotropic)의 Mindlin 환형판의 축대칭 진동을 연구하였다. Singh와 Goel,<sup>(22)</sup> Singh와 Tyagi<sup>(23)</sup>는 리츠방법을 사용하여 타원판과 원형판의 근사해를 구하였으며, Singh와 Chakraverty<sup>(24~29)</sup>는 다양한 경계조건을 가지며 일정한 또는 변두께를 갖는 원형판과 타원판의 진동수와 모드형상을 구하기 위해서 리츠방법에 의한 직교특성다항식을 사용하였다.

최근에 리츠방법을 이용해서 Singh와 Saxena는<sup>(30)</sup> 2개의 서로 다른 선형적인 두께의 변분(하나는 중앙핵에서의 변분, 다른 하나는 환형판의 외측에서의 변분)을 갖는 원형판의 축대칭 횡진동을 연구하였다. 경계는 고정 또는 단순지지의 조건을 택하였다. Gutierrez는<sup>(31)</sup> 고전적 리츠방법을 사용하였는데  $n$ 을 양의 정수로 하여  $h_0[1 + \gamma(r^*/a)^n]$ 의 함수 관계식에 따라 두께가 변하는 원형판의 진동과 좌굴을 연구하였다. 그러나 위에 열거된 문헌 중에는 아직까지 변두께를 갖는 두꺼운 판의 진동수를 3차원적 해석을 통해서 연구한 것은 아직 없다.

본 연구의 목적은 선형적으로 두께가 변하는 두꺼운 환형판의 정확한 고유진동수와 모드형상을 구하는 것이다. 이 연구에서는 3차원적 해석방법을 제공하였으며, 리츠해의 수렴성 연구와 2차원적 판이론과의 비교를 통해 결과의 정확성을 검증하였다. 본 연구에서 제공하는 정확한 3차원적 결과는 유한요소법과 유한차분법 등의 근사해법과 1계 또는 고계의 2차원적 판이론의 정확성을 검증할 수 있는 비교의 대상으로 사용될 수 있다.

## 2. 해석 방법

Fig. 1은 반경방향으로 선형적으로 두께( $h$ )가 변하고, 내측 반경  $b$ , 외측 반경  $a$ , 내측 모서리의 판의 두께  $h_i$ , 외측 모서리의 판의 두께  $h_o$ 를 갖는 선형적인 환형판과 국소좌표계  $(s, \theta, z)$ 를 보여주고 있다. 반지름 좌표( $s$ )와 두께 좌표( $z$ )는 각각 환형판의 내측 모서리와 중앙면에서 수직으로 측정되며,  $\theta$ 는 원주각을 나타낸다. 반지름 좌표는 환형판의 중심을 원점으로 할 수 있으나, 임의의 곡률과 변두께를 갖는 두꺼운 쉘에 적용할 수 있는 보다 일반적인 해석 방법<sup>(32,33)</sup>과 일관성을 갖기 위해 현재의 방법을 선택하였다.

환형판의 자유진동을 해석하기 위해서 운동 에너지( $T$ )와 변형률 에너지( $V$ )가 3개의 변위성분  $u, v, w$ 로 표현할 수 있고 Fig. 1에서와 같이 변위성분은  $s, \theta, z$ 가 증가하는 방향을 양의 방향으로 한다.

운동 에너지는 다음 식

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \left( \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \right) (s+b) ds d\theta dz \quad (1)$$

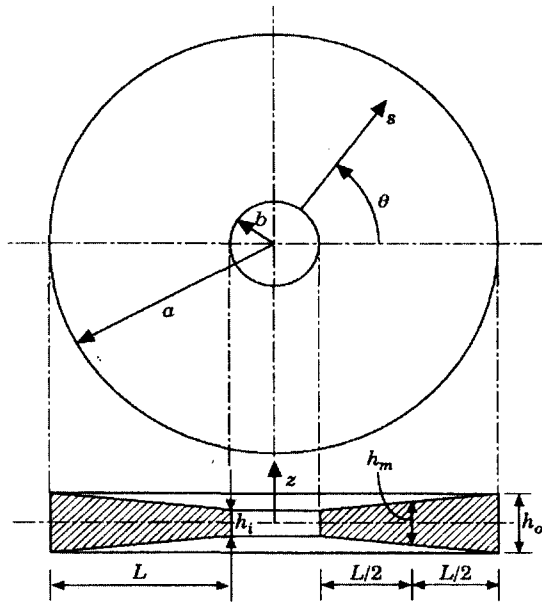


Fig. 1 Cross-section of a thick, linearly tapered annular plate with local co-ordinate system  $(s, \theta, z)$  and corresponding displacements  $(u, v, w)$

과 같으며, 여기서  $\rho$ 는 밀도이고, 닷트(.)는 시간 도함수를 의미한다. 적분은 환형판의 정의역( $\Omega$ )에 대해서 수행된다.

변형률(위치) 에너지는 다음 식과 같이 응력( $\sigma_{ij}$ )과 변형률( $\epsilon_{ij}$ )로 표현된다.

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ss}\epsilon_{ss} + \sigma_{\theta\theta}\epsilon_{\theta\theta} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + \sigma_{s\theta}\epsilon_{s\theta} + \sigma_{sz}\epsilon_{sz} + \sigma_{\theta z}\epsilon_{\theta z})(s+b) ds d\theta dz \quad (2)$$

이미 잘 알려진 등방성 재료에 대한 선형 탄성의 응력-변형률 방정식은

$$\sigma_{ij} = \lambda(\epsilon_{ss} + \epsilon_{zz} + \epsilon_{\theta\theta}) + 2G\epsilon_{ij}, \quad \sigma_{ij} = G\epsilon_{ij} \quad (i \neq j) \quad (3)$$

이다. 여기서  $\lambda$ 와  $G$ 는 라메의 상수(G. Lamé 1852)로서 등방성 재료에 대해서 탄성계수( $E$ )와 프와송비( $\nu$ )로 표현하면 다음 식과 같다.

$$\lambda = E\nu/(1+\nu)(1-2\nu), \quad G = E/2(1+\nu) \quad (4)$$

3차원적인 변형률은 변위와 다음 식과 같은 관계를 가진다.

$$\epsilon_{ss} = u_{,s}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = [1/(s+b)](u + v_{,\theta}) \quad (5a, 5b)$$

$$\epsilon_{zz} = w_{,z} \quad (5c)$$

$$\epsilon_{s\theta} = [1/(s+b)][u_{,\theta} - v + (s+b)v_{,s}] \quad (5d)$$

$$\epsilon_{sz} = u_{,z} + w_{,s} \quad (5e)$$

$$\epsilon_{\theta z} = [1/(s+b)][(s+b)v_{,z} + w_{,\theta}] \quad (5f)$$

여기서 콤마(.)의 뒤를 따르는 하첨자로 된 기호는 편미분을 의미한다.

식 (3)과 (5)를 식 (2)에 대입하면

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\lambda(\epsilon_{ss} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz})^2 + G\{2(\epsilon_{ss}^2 + \epsilon_{\theta\theta}^2 + \epsilon_{zz}^2) + \epsilon_{s\theta}^2 + \epsilon_{sz}^2 + \epsilon_{\theta z}^2\}](s+b) ds d\theta dz \quad (6)$$

을 얻는다.

편의상  $s$ 와  $z$ 의 좌표는 다음 식

$$\psi = s/L, \quad \zeta = z/h_m \quad (7)$$

처럼 무차원화 하였다. 여기서  $L$ 은 환형판의 반지름의 폭  $(a-b)$ 을,  $h_m$ 은 판의 평균 두께로서

$h_m = (h_i + h_o)/2$ 로 정의된다.

비감쇠 자유 진동에서는 3개 변위의 시간 반응은 정현적(sinusoidal)이며 환형판의 원형 대칭성(circular symmetry)으로 인해 변위를 다음 식

$$u(\psi, \theta, \zeta, t) = U(\psi, \zeta) \cos n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (8a)$$

$$v(\psi, \theta, \zeta, t) = V(\psi, \zeta) \sin n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (8b)$$

$$w(\psi, \theta, \zeta, t) = W(\psi, \zeta) \cos n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (8c)$$

과 같이 표현할 수 있다. 여기서  $U, V, W$ 는  $\psi$ 와  $\zeta$ 의 변위함수,  $\omega$ 는 고유진동수,  $\alpha$ 는 초기조건으로 결정되는 임의의 위상각을 나타내며,  $n=0, 1, 2, \dots, \infty$ 이다. 원기동좌표로 표현된 3개의 편미분 운동방정식에 식 (8)을 대입하면, 식 (8)이 적절히 가정된 변위의 형태임을 알 수 있으며,  $\theta$ 와  $t$ 는  $\psi$ 와  $\zeta$ 에 관련을 갖지 않는다는 사실을 입증할 수 있다.

식 (8)에서  $\cos n\theta$ 를  $\sin n\theta$ 로,  $\sin n\theta$ 를  $\cos n\theta$ 로 대체하면, 또 다른 일련의 공액변위함수를 얻을 수 있다. 이 공액변위함수는  $n=0$  일 때를 제외하고는 모드 형상이  $\theta$ 방향으로  $\pi/2n$ 만큼 회전된 형태를 나타내며, 식 (8)이 주는 모드 형상과 진동수가 동일하다. 그러나  $n=0$  일 때, 이 공액변위함수는  $u$ 와  $w$ 와는 관련이 되지 않고 오직  $v$ 만이 관련된 비틀림 모드를 준다. 따라서 환형 단면은 비틀림 진동 중에 휨(warping)이 발생하지 않는다.

식 (8)의 변위함수  $U, V, W$ 를 수학적으로 완비된

(complete) 대수 다항식으로 표현하면, 다음 식

$$U = \eta \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J A_{ij} \psi^i \zeta^j. \quad (9a)$$

$$V = \eta \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L B_{kl} \psi^k \zeta^l. \quad (9b)$$

$$V = \eta \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{mn} \psi^m \zeta^n \quad (9c)$$

과 같으며, 이는 그 어떤 기하학적 경계조건도 만족시킬 수 있다. 여기서  $i, j, k, l, m, n$ 은 정수이고,  $I, J, K, L, M, N$ 은 다항식의 최고차항을 나타내며,  $A_{ij}, B_{kl}, C_{mn}$ 은 임의의 계수이고,  $\eta$ 는 적용될 경계조건에 의해 결정되는 함수이다. 예를 들면 (1) 완전자유 경계조건일 때  $\eta=1$ 이고: (2) 내측 모서리는 고정되고 외측 모서리는 자유 경계조건을 가질 때  $\eta=\psi$ 이고: (3) 외측 모서리는 고정되고 내측 모서리는 자유 경계조건을 가질 때  $\eta=\psi-1$ : (4) 양측 모서리가 모두 고정일 때  $\eta=\psi(\psi-1)$ 이다.

함수  $\eta$ 는 경계조건에서 요구되는 기하학적 구속만을 부과하는데, 이는 리츠방법을 사용할 때 필수적이며, 응력과 관련된 경계조건은 무시한다. 식 (9)의 대수 다항식과 함께 이 함수  $\eta$ 는 환형판의 자유 진동 모드 형상을 원하는 정확도를 가지고 표현할 수 있는 수학적으로 완비된 일련의 식을 형성한다.<sup>(34)</sup>

리츠방법은 진동계의 최대 에너지 범함수를 사용한다. 진동의 한 주기 동안의 최대 위치 에너지 ( $V_{\max}$ )는 변형률 에너지에 기인한다. 식 (6)~(8)을 이용하면, 이 최대 에너지는

$$V_{\max} = \frac{LG}{2} \int_0^1 \int_{-\delta(\phi)/2}^{\delta(\phi)/2} \left[ \frac{\lambda}{G} (K_1 + K_2 + K_3)^2 + 2(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2) + K_4^2 \right] \Gamma_1 + (K_5^2 + K_6^2) \Gamma_2 \Big] r^* d\zeta d\psi \quad (10)$$

이 된다. 여기서

$$\begin{aligned} K_1 &\equiv (U + nV)/r^*, & K_2 &\equiv (h_m/L)U_{,\psi}, & K_3 &\equiv W_{,\zeta} \\ K_4 &\equiv U_{,\zeta} + (h_m/L)W_{,\psi} \\ K_5 &\equiv V_{,\zeta} - nW/r^* \\ K_6 &\equiv (nU + V)/r^* - (h_m/L)V_{,\psi} \end{aligned} \quad (11)$$

이고,  $r^*$ 는 다음 식

$$r^* \equiv (s+b)/h_m = (\psi + b/L)L/h_m \quad (12)$$

으로 정의되며,  $\delta(\phi)$ 는 무차원화된 판의 두께로 다음 식

$$\delta(\phi) \equiv h(s)/h_m = [2/(1+h^*)][(1-h^*)\psi + h^*] \quad (13)$$

으로 정의된다. 여기서  $h^*$ 는 테이퍼비  $h_i/h_o$ 이고,  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_2$ 는 상수로서 다음 식

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\equiv \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \begin{cases} 2\pi, & \text{if } n=0 \\ \pi, & \text{if } n \geq 1 \end{cases} \\ \Gamma_2 &\equiv \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{if } n=0 \\ \pi, & \text{if } n \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

으로 정의된다. 식 (4)로부터  $\lambda$ 와  $G$ 는  $E$ 와 같은 차원을 가진다는 사실을 알 수 있다. 식 (10)에 있는 무차원 상수인  $\lambda/G$ 는  $\nu$ 만 관계한다.

즉,  $\lambda/G = 2\nu/(1-2\nu)$ 이다.

진동의 한 주기 중의 최대 운동 에너지는 다음 식과 같다.

$$T_{\max} = \frac{\rho L h_m^2 \omega^2}{2} \int_0^1 \int_{-\delta(\phi)/2}^{\delta(\phi)/2} [(U^2 + W^2)\Gamma_1 + V^2\Gamma_2] r^* d\zeta d\psi \quad (15)$$

고유 진동수와 모드 형상을 구하는 고유치 문제는 리츠의 최소화 방정식(Ritz minimizing equation)으로 구할 수 있다. 본 연구의 최소화 방정식은 다음 식과 같다.

$$\frac{\partial(V_{\max} - T_{\max})}{\partial A_{ij}} = 0, \quad \left( \begin{matrix} i=0,1,2,\dots,I \\ j=0,1,2,\dots,J \end{matrix} \right) \quad (16a)$$

$$\frac{\partial(V_{\max} - T_{\max})}{\partial B_{kl}} = 0, \quad \left( \begin{matrix} k=0,1,2,\dots,K \\ l=0,1,2,\dots,L \end{matrix} \right) \quad (16b)$$

$$\frac{\partial(V_{\max} - T_{\max})}{\partial C_{mn}} = 0, \quad \left( \begin{matrix} m=0,1,2,\dots,M \\ n=0,1,2,\dots,N \end{matrix} \right) \quad (16c)$$

식 (16)의 최소화 조건은  $[(I+1)(J+1) + (K+1)(L+1) + (M+1)(N+1)]$ 개의 미지수  $A_{ij}, B_{kl}, C_{mn}$ 를 가진 동수의 선형, 동차, 대수 방정식으로 이루어진 일련의 대수 방정식(또는 리츠계)을 양산한다. 이 방정식은 다음 식의 형태로 표현된다.

$$(K - \Lambda M)x = 0 \quad \text{or} \quad (KM^{-1} - \Lambda I)x = 0 \quad (17)$$

여기서  $K$ 와  $M$ 은 각기 최대 변형률 에너지( $V_{\max}$ )와 최대 운동 에너지( $T_{\max}$ )에 기인한 강도행렬과 질량행렬이다.  $\Lambda$ 는 진동계의 고유치로서 무차원 진동수의 제곱  $\omega^2 h_m^2 \rho/G$ 이며, 벡터  $x$ 는 다음 식의 형

태를 따른다.

$$x = (A_{00}, A_{01}, \dots, A_{IJ}; B_{00}, B_{01}, \dots, B_{KL}; C_{00}, C_{01}, \dots, C_{MN})^T \quad (18)$$

식 (17)은 고유치 문제를 나타내고 있다. 자명하지 않은 해를 구하기 위해 계수행렬의 행렬식을 0으로 한다. 즉,  $|K - \lambda M| = 0$  또는  $|KM^{-1} - \lambda I| = 0$ 으로 한다. 여기서  $I$ 는 단위행렬을,  $M^{-1}$ 는  $M$ 의 역행렬을 나타낸다. 이 행렬식의 근이 바로 고유치가 된다. 각각의 고유치를 다시 고유치 행렬식을 만드는 방정식에 대입하면 그 고유치에 해당하는 고유벡터를 얻을 수 있으며, 이 고유벡터를 변위함수에 대입하면 각 고유치에 해당하는 모드 형상을 얻을 수 있다.

리츠방법에 의한 진동수는 엄밀해의 상위 경계로 수렴한다는 사실은 널리 알려져 있다. 식 (9)에 있는 다항식의 항의 수를 증가시켜 보다 엄밀해에 근접한 상위 경계치를 구할 수 있다. 식 (9)의 대수 다항식은 수학적으로 완전하므로 충분한 수의 항을 취하면 엄밀해에 단조 수렴함이 보장된다.

### 3. 수렴성 연구

수렴성 연구는 리츠방법으로 구한 모든 진동수가 엄밀해에 상위 경계로 수렴한다는 사실에 바탕을 둔다. 가정된 변위가 불충분하거나 최소로 완비된 일련의 다항식에서 어떤 함수가 누락되면 타당한 수렴성을 보여 주지 않거나 수렴의 속도가 매우 느려진다.

Table 1은  $n=2$ 일 때  $h_i/h_o=1/3$ ,  $b/L=h_m/L=0.2$ ,  $\nu=0.3$ 인 반경방향으로 두께가 선형적으로 변하는 환형판의 무차원 진동수  $\omega a \sqrt{\rho/G}$ 의 수렴성 연구의 결과를 보여주고 있다. 이 환형판은 고전적 박판이론을 사용하기에 부적당한 두꺼운 판이다.

서로 다른 숫자의 다항식을 사용했을 때 보다 최적화된 어떤 모드 형상이 얻어질 수도 있으나, 수렴성 연구를 보다 간단하게 하기 위해서,  $s$ (또는  $\psi$ ) 좌표 방향과  $z$ (또는  $\zeta$ ) 좌표 방향으로 같은 수의 다항식을 택하였다. 즉,  $I=K=M$ 이고  $J=L=N$ 으로 하였다.

이 표에서  $TZ$ 와  $TS$ 는  $z$ (또는  $\zeta$ )와  $s$ (또는  $\psi$ ) 방향으로 사용된 다항식의 총 항수를 각각 의미한다. 행렬식의 차수  $DET$ 는  $TZ$  및  $TS$ 와 다음의 관계를 갖는다.

$$DET = \begin{cases} TZ \times TS & \text{for torsional modes } (n=0) \\ 2 \times TZ \times TS & \text{for axisymmetric modes } (n=0) \\ 3 \times TZ \times TS & \text{for general modes } (n \geq 1) \end{cases} \quad (19)$$

**Table 1** Convergence of frequencies  $\omega a \sqrt{\rho/G}$  of a completely free, annular plate with linearly varying thickness along the radial direction for the five lowest modes for  $n=2$  with  $h_i/h_o=1/3$ ,  $b/L=0.2$ ,  $h_m/L=0.2$ , and  $\nu=0.3$

TZ	TS	DET	1	2	3	4	5
2	2	12	0.5029	1.847	3.587	4.127	8.684
2	4	24	0.4182	1.707	2.540	4.058	5.587
2	6	36	0.4166	1.692	2.514	4.050	5.066
2	8	48	0.4165	1.688	2.512	4.049	4.999
2	10	60	0.4165	1.687	2.512	4.049	4.995
3	2	18	0.4678	1.843	3.520	4.126	8.616
3	4	36	0.4064	1.704	2.355	4.057	5.343
3	6	54	0.4052	1.690	2.355	4.050	4.748
3	8	72	0.4051	1.686	2.334	<u>4.048</u>	4.692
3	10	90	0.4051	<u>1.685</u>	2.334	4.048	4.690
4	2	24	0.4602	1.842	3.450	4.124	8.610
4	4	48	0.4033	1.704	2.329	4.057	5.290
4	6	72	0.4022	1.690	2.310	4.050	4.676
4	8	96	0.4022	1.686	2.309	4.048	4.622
4	10	120	<u>0.4021</u>	1.685	2.309	4.048	4.620
5	2	30	0.4602	1.841	3.445	4.124	8.604
5	4	60	0.4033	1.704	2.328	4.057	5.287
5	6	90	0.4022	1.690	2.309	4.050	4.673
5	8	120	0.4022	1.686	<u>2.308</u>	4.048	4.620
5	10	150	0.4021	1.685	2.308	4.048	4.619
6	2	36	0.4598	1.841	3.435	4.124	8.604
6	4	72	0.4031	1.704	2.328	4.057	5.274
6	6	108	0.4022	1.690	2.309	4.050	4.670
6	8	144	0.4021	1.686	2.308	4.048	4.620
6	9	162	0.4021	1.686	2.308	4.048	4.619

Notes:

$TZ$ =Total number of natural polynomial terms used in the  $z$  or  $\zeta$  direction

$TS$ =Total number of natural polynomial terms used in  $s$  or  $\psi$  direction

$DET$ =Determinant order

이 표는 5개의 최저 진동수에 해당하는 5개의 데이터 열을 가지고 있다. 굵고 밑줄이 그어진 진동수는 각 열에서 최소의 행렬식 차수를 가지고 가장 잘 수

렴된 값을 나타낸다. 강체의 모드 형상에 해당하는 영의 진동수는 생략되었다.  $TZ$ 와  $TS$ 는 2에서 시작되며,  $TS$ 는 2씩 증가하여 10까지,  $TZ$ 는 1씩 증가하여 6까지 사용되었다.  $TZ$ 가 6일 때,  $TS$ 는 10 대신에 9를 사용하였는데, 이는 강도행렬과 질량행렬을 구하는데 많은 시간과 컴퓨터 기억 용량을 필요로 하기 때문이다.

반경방향으로 충분한 수의 항들이 사용되었다면 ( $TS \geq 8$ ), 두께 방향으로 단지 2개의 다항식을 사용해도 ( $TZ=2$ ), 제 1, 제 2 및 제 4모드는 꽤 정확하다는 사실을 Table 1에서 볼 수 있다. 그러나  $TZ=2$ 일 때, 제 3과 제 5의 진동수는 수렴치에 비해서 각기 8.8%와 8.1% 높은 부정확한 결과가 나왔다. 이러한 부정확한 해는 변위  $w$ 는  $z$ 에 대해서 변분하지 않으며,  $u$ 와  $v$ 는  $z$ 에 대해서 선형적으로 변한다는 제한 조건을 갖는 Mindlin의 후판이론에 해당한다.

모드 형상은 판의 중앙면 ( $z=0$ )에 관해서 대칭 또는 반대칭 형상으로 분리된다. Table 1의 하위 진동수는 모두 휨 모드와 두께 전단 모드가 우세한 반대칭 모드이며, 반경방향 및 축방향으로의 신장(extension)은 상위 진동 모드이다.

부가적인 수렴성 연구가 다른 원주 수 ( $n=0$ , 비틀림과 축대칭 모드;  $n=1$ )에 대해서 이루어 졌다.<sup>(32)</sup> 그 수렴성 연구는 위와 유사한 수렴성을 보여 주고 있다.

#### 4. 수치 결과 및 토론

Table 2~5는 완전 자유 경계조건을 갖는 선형적으로 테이퍼된 두꺼운 환형판의 정확한 무차원 진동수  $\omega a \sqrt{\rho/G}$ 를 유효숫자 4자리까지 보여주고 있다. Fig. 2~5는 Table 2~5에 각기 해당하는 환형판의 형상을 보여주고 있다. 각 형상에 대해서 30개의 진동수가 주어지는데, 이는 6개의 원주 형상 수 ( $n$ ) (즉,  $n=0(T), 0(A), 1, 2, 3, 4$ )에 대해서 각각 처음 5개의 모드에 대한 진동수를 나타내며, 여기서  $T$ 는 비틀림 모드,  $A$ 는 축대칭 모드를 의미한다. 괄호 안의 숫자는 각각의 형상에 대해서 하위 5개의 진동수를 나타내고 있다. 강체 모드의 영 진동수는 이 도표에서 생략되었다.

**Table 2** Non-dimensional frequencies  $\omega a \sqrt{\rho/G}$  of completely free, annular plates with linearly varying thickness along the radial direction for  $b/L=0.2$ ,  $h_m/L=0.1$ , and  $\nu=0.3$ .

$n$	Mode	$h_i/h_o$				
		0	1/3	1	3	$\infty$
$0^T$	1	6.118	5.558	5.181	4.997	5.375
	2	9.768	8.949	8.640	8.512	9.027
	3	13.38	12.40	12.16	12.06	12.66
	4	17.01	15.95	15.76	15.68	16.34
	5	20.66	19.57	19.41	19.34	20.04
$0^A$	1	(2) 0.3875	(2) 0.3198	(2) 0.3438	(2) 0.4334	(2) 0.6510
	2	1.657	1.505	1.557	1.592	1.763
	3	2.449	2.799	3.152	3.501	3.323
	4	3.264	3.427	3.572	3.568	4.104
	5	5.217	5.981	6.241	6.039	5.277
1	1	(4) 0.6589	(4) 0.6966	(4) 0.7851	(5) 0.8666	(5) 1.092
	2	1.805	1.903	2.113	2.206	2.321
	3	2.728	2.739	2.776	2.890	3.271
	4	3.360	3.739	4.014	4.017	3.810
	5	5.315	6.220	6.384	6.399	5.630
2	1	(1) 0.2368	(1) 0.2104	(1) 0.2085	(1) 0.2550	(1) 0.4005
	2	1.211	1.298	1.339	1.343	1.502
	3	1.338	1.686	1.995	2.310	2.620
	4	2.219	2.742	3.026	3.046	2.973
	5	3.691	4.049	4.080	4.192	4.667
3	1	(3) 0.6430	(3) 0.5562	(3) 0.4937	(3) 0.4919	(3) 0.6735
	2	1.918	2.026	2.005	1.913	1.957
	3	2.731	3.129	3.551	3.902	3.607
	4	2.845	3.735	3.987	4.093	4.862
	5	4.220	5.703	5.786	5.950	5.536
4	1	(5) 1.190	(5) 1.018	(5) 0.8572	(4) 0.7496	(4) 0.8893
	2	2.773	2.851	2.734	2.502	2.366
	3	3.650	4.268	4.684	4.762	4.200
	4	3.929	4.809	4.980	5.288	6.296
	5	4.925	6.999	7.428	5.359	6.311

Notes:

$T$ : Torsional mode

$A$ : Axisymmetric mode

Numbers in parentheses identify frequency sequences.

변장비( $b/L$ ), 두께비( $h_m/L$ ), 테이퍼비( $h_i/h_o$ )에 관계없이, 제 1, 제 2, 제 3의 진동수는 각기 2개( $n=2$ ), 0개( $n=0$ , 축대칭 모드), 3개( $n=3$ )의 원주 파동을 갖는 모드 형상을 준다. 일정한 두께를 갖는 완전 자유 경계 환형판의 기본 모드는  $n=2$ 일 때의 휨 모드란 사실은 잘 알려져 있다.<sup>(10)</sup>

비교적 작은 구멍을 가지며 ( $b/L=0.2$  또는  $b/a=1/6$ ), 보통의 두께를 가지는 ( $h_m/L=0.1$ ) 판의 대부분의 진동수는 판의 평균 두께( $h_m$ )가 일정할 때, 내외경의 두께비가 심하게 변하더라도 ( $0 \leq h_i/h_o \leq \infty$ ) 그다지 크게 변하지 않는다는 사실을 Table 2는 보여

주고 있다. 그러나 제 1( $n=2$ )과 제 2( $n=0(A)$ ) 모드는 이러한 사실에 상당히 배치되는 결과를 얻었다. 날카로운 내측 모서리에서 날카로운 외측 모서리로 판의 두께 형상이 변할 때 (참조 Fig. 2) 진동수는 거의 두 배로 증가한다. 이 보다 더 두꺼운 판 ( $h_m/L=0.2$ , Table 3) 또는 더 큰 구멍 ( $b/L=0.5$ , Table 4)을 가지는 판의 진동수는  $h_i/h_o$ 의 변화에 더 크게 영향을 받는다.

평균 두께( $h_m$ )가 고정된 판은 내측 모서리의 두께가 최대일 때 ( $h_i/h_o=\infty$ ) 처음 2개의 진동수가 항상 최대값을 가지나, 다른 3개의 모드는 반드시 그렇

지 않다는 사실을 Table 2~5에서 알 수 있다.

예상했던 바, 비틀림 진동수 ( $n=0(T)$ )는 축대칭 진동수 ( $n=0(A)$ ) 보다 훨씬 크다는 사실을 Table 2~5에서 알 수 있다. 그 이유는 두꺼운 판일지라도 축대칭 모드는 판의 중앙면에 수직인 최대 변위성분을 가지는 휨 모드가 우세한 반면에, 휨보다 훨씬 큰 강성이 수반되는 비틀림 모드는 중앙면의 접선 방향으로의 유일한 변위성분을 가지는 전단 모드와 관련이 되어있기 때문이다.

Table 2와 Table 3의 비틀림 진동수 ( $n=0(T)$ )를 비교했을 때, 일정한 두께 ( $h_i/h_o=1$ )를 갖는 판의 처음 4개의 진동수 (5.181, 8.640, 12.16, 15.76)는 판

**Table 3** Non-dimensional frequencies  $\omega a \sqrt{\rho/G}$  of completely free, annular plates with linearly varying thickness along the radial direction for  $b/L=0.2$ ,  $h_m/L=0.2$ , and  $\nu=0.3$ .

n	Mode	$h_i/h_o$				
		0	1/3	1	3	$\infty$
$0^T$	1	6.008	5.551	5.181	4.991	5.348
	2	9.719	8.938	8.640	8.502	8.981
	3	10.82	12.39	12.16	12.05	12.60
	4	13.31	13.78	15.76	15.51	12.82
	5	16.73	15.93	18.85	15.66	16.25
$0^A$	1	(2) 0.7306	(2) 0.6173	(2) 0.6687	(2) 0.8440	(2) 1.253
	2	2.448	2.717	2.804	2.878	3.204
	3	3.000	2.798	3.150	3.559	4.077
	4	5.548	5.644	5.829	5.782	5.703
	5	8.376	8.242	8.047	8.120	8.553
1	1	(4) 1.195	(4) 1.286	(4) 1.454	(5) 1.611	(5) 2.016
	2	2.727	2.738	2.776	2.888	3.263
	3	3.244	3.332	3.597	3.718	3.945
	4	5.717	6.062	6.340	6.300	6.131
	5	6.978	6.537	6.368	6.577	7.284
2	1	(1) 0.4392	(1) 0.4021	(1) 0.4062	(1) 0.4958	(1) 0.7641
	2	(5) 1.336	(5) 1.685	1.995	2.308	2.610
	3	2.135	2.308	2.416	2.459	2.765
	4	3.925	4.048	4.078	4.189	4.654
	5	4.038	4.619	5.001	5.080	5.131
3	1	(3) 1.140	(3) 1.027	(3) 0.9422	(3) 0.9540	(3) 1.295
	2	2.720	3.124	3.480	3.408	3.560
	3	3.273	3.445	3.551	4.090	4.844
	4	4.954	5.698	5.783	5.946	6.147
	5	5.630	6.023	6.356	6.330	6.534
4	1	2.002	1.805	(5) 1.592	(4) 1.437	(4) 1.707
	2	3.907	4.260	4.577	4.351	4.278
	3	4.530	4.638	4.684	5.284	6.284
	4	6.271	7.322	7.421	7.533	7.095
	5	7.241	7.419	7.671	7.605	8.333

Notes:

$T$ : Torsional mode

$A$ : Axisymmetric mode

Numbers in parentheses identify frequency sequences.

**Table 4** Non-dimensional frequencies  $\omega a \sqrt{\rho/G}$  of completely free, annular plates with linearly varying thickness along the radial direction for  $b/L=0.5$ ,  $h_m/L=0.1$ , and  $\nu=0.3$ .

n	Mode	$h_i/h_o$				
		0	1/3	1	3	$\infty$
$0^T$	1	6.912	6.059	5.604	5.4612	5.990
	2	11.41	10.28	9.971	9.890	10.62
	3	15.97	14.73	14.52	14.46	15.29
	4	20.57	19.30	19.14	19.09	19.98
	5	25.20	23.93	23.80	23.75	24.68
$0^A$	1	(2) 0.3497	(2) 0.2665	(2) 0.2713	(2) 0.3494	(2) 0.5363
	2	1.932	1.694	1.709	1.711	1.919
	3	2.181	2.405	2.629	2.864	3.113
	4	3.921	4.092	4.221	4.094	3.889
	5	6.392	7.301	7.580	7.294	6.354
1	1	(4) 0.5403	(4) 0.4835	(4) 0.5564	(5) 0.6836	(5) 0.9371
	2	2.000	1.827	1.898	1.937	2.133
	3	2.704	2.756	2.840	2.997	3.354
	4	3.975	4.193	4.351	4.238	4.019
	5	6.438	6.954	6.680	6.661	6.447
2	1	(1) 0.1762	(1) 0.1551	(1) 0.1545	(1) 0.1920	(1) 0.2907
	2	0.9149	0.9044	1.019	1.134	1.406
	3	1.004	1.249	1.421	1.542	1.594
	4	2.200	2.194	2.401	2.528	2.716
	5	4.052	4.050	4.096	4.260	4.437
3	1	(3) 0.4861	(3) 0.4221	(3) 0.3896	(3) 0.4240	(3) 0.6100
	2	1.348	1.436	1.566	1.631	1.846
	3	2.282	2.700	3.051	3.283	3.388
	4	2.516	2.741	3.105	3.361	3.567
	5	4.397	4.955	5.338	5.381	5.130
4	1	(5) 0.9141	(5) 0.7884	(5) 0.6900	(4) 0.6643	(4) 0.8692
	2	1.828	2.074	2.196	2.186	2.303
	3	2.931	3.433	3.943	4.112	4.048
	4	3.533	4.003	4.472	4.998	5.494
	5	4.757	5.574	6.136	6.292	5.960

Notes:

$T$ : Torsional mode

$A$ : Axisymmetric mode

Numbers in parentheses identify frequency sequences.

의 두께를 두 배로 증가시켜도 영향을 받지 않는다는 사실을 알 수 있다. 이것은 환형판의 내측 부분이 이 것과 인접한 외측 부분과 반대 방향으로 회전하는 역회전(counter-rotating) 모드인데, 이 모드는 이 두 부분의 경계면에서 변위가 없는 절점이 원형 기둥의 표면 모양으로 만들어진다. 이러한 진동수는 원주방향 변위( $V$ )를  $\psi$ (또는  $s$ )와 함께 변하는 Bessel 함수로 나타내면 엄밀해의 형태로 구할 수 있다.<sup>(35)</sup> Table 4와 Table 5를 비교해 보면, 이와 똑 같은 현상이 더 큰 구멍을 가진 판에서도 나타나는 것을 볼 수 있다. 그러나 판의 두께가 일정하지 않을 때 ( $h_i/h_o \neq 1$ )에는 그러한 관계가 존재하지 않는다.

**Table 5** Non-dimensional frequencies  $\omega a \sqrt{\rho/G}$  of completely free, annular plates with linearly varying thickness along the radial direction for  $b/L=0.5$ ,  $h_m/L=0.2$ , and  $\nu=0.3$ .

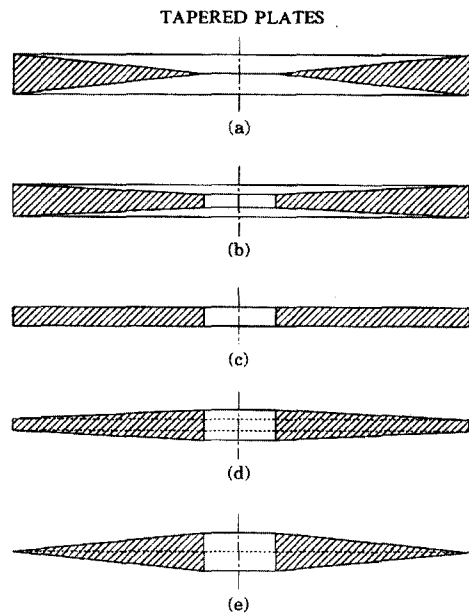
$n$	Mode	$h_i/h_o$				
		0	1/3	1	3	$\infty$
0 <sup>T</sup>	1	6.878	6.051	5.604	5.454	5.960
	2	11.36	10.26	9.971	9.877	10.57
	3	13.62	14.72	14.52	14.44	14.98
	4	15.88	17.31	19.14	18.50	15.21
	5	20.45	19.28	23.56	19.06	19.87
0 <sup>A</sup>	1	(2) 0.6639	(2) 0.5186	(2) 0.5316	(2) 0.6838	(2) 1.034
	2	2.181	2.405	2.628	2.862	3.109
	3	3.513	3.086	3.112	3.123	3.501
	4	6.721	6.770	6.920	6.790	6.690
	5	10.12	8.970	8.614	8.783	9.948
1	1	(4) 0.9887	(4) 0.9142	(4) 1.042	(4) 1.254	1.664
	2	2.703	2.756	2.839	2.995	3.349
	3	3.620	3.296	3.388	3.420	3.742
	4	6.796	6.908	6.676	6.650	6.808
	5	7.536	6.942	7.083	6.948	7.139
2	1	(1) 0.3332	(1) 0.3001	(1) 0.3027	(1) 0.3729	(1) 0.5517
	2	(5) 1.003	(5) 1.248	1.421	1.539	(4) 1.586
	3	1.651	1.675	1.886	2.099	2.572
	4	3.932	3.877	4.095	4.257	4.542
	5	4.050	4.049	4.145	4.274	4.747
3	1	(3) 0.8941	(3) 0.8237	(3) 0.7536	(3) 0.8237	(3) 1.164
	2	2.276	2.975	2.835	2.975	3.372
	3	2.428	3.356	3.051	3.356	3.550
	4	4.423	5.446	5.216	5.446	5.681
	5	5.680	5.781	5.620	5.781	6.404
4	1	1.621	1.450	(5) 1.310	(5) 1.283	(5) 1.664
	2	3.291	3.646	3.862	3.901	4.164
	3	3.519	3.998	4.472	4.993	5.470
	4	5.064	5.799	6.461	6.708	6.806
	5	7.184	7.188	7.197	6.313	7.978

Notes:

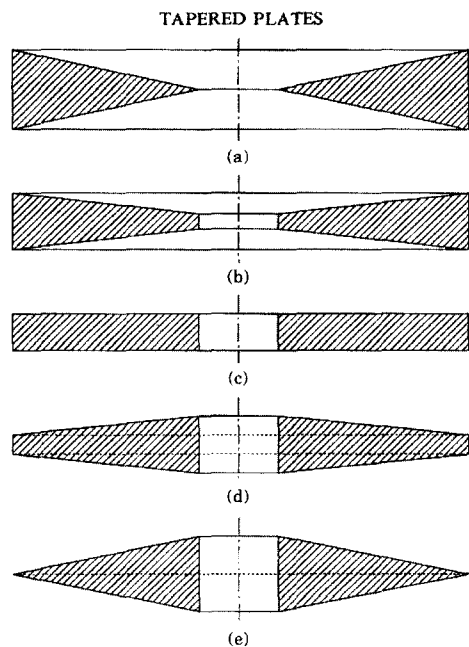
T: Torsional mode

A: Axisymmetric mode

Numbers in parentheses identify frequency sequences.



**Fig. 2** Cross-sections of annular plates with  $b/L=0.2$  and  $h_m/L=0.1$ : (a)  $h_i/h_o=0$ ; (b)  $h_i/h_o=1/3$ ; (c)  $h_i/h_o=1$ ; (d)  $h_i/h_o=3$ ; (e)  $h_i/h_o=\infty$



**Fig. 3** Cross-sections of annular plates with  $b/L=0.2$  and  $h_m/L=0.2$ : (a)  $h_i/h_o=0$ ; (b)  $h_i/h_o=1/3$ ; (c)  $h_i/h_o=1$ ; (d)  $h_i/h_o=3$ ; (e)  $h_i/h_o=\infty$



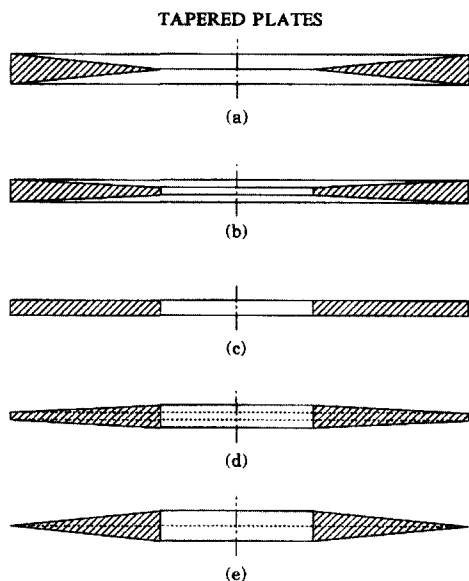


Fig. 4 Cross-sections of annular plates with  $b/L = 0.5$  and  $h_m/L = 0.1$ : (a)  $h_i/h_o = 0$ ; (b)  $h_i/h_o = 1/3$ ; (c)  $h_i/h_o = 1$ ; (d)  $h_i/h_o = 3$ ; (e)  $h_i/h_o = \infty$

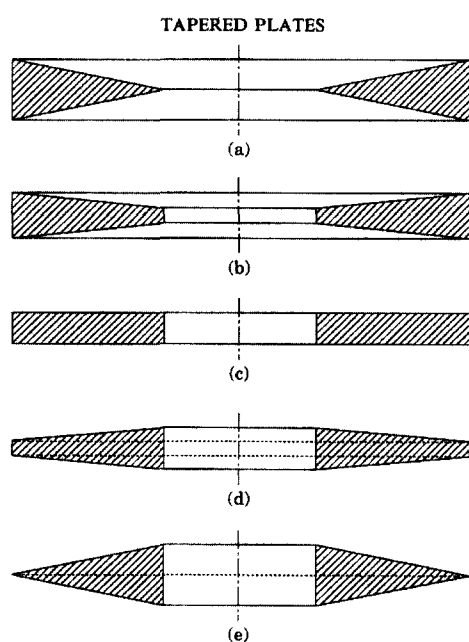


Fig. 5 Cross-sections of annular plates with  $b/L = 0.5$  and  $h_m/L = 0.2$ : (a)  $h_i/h_o = 0$ ; (b)  $h_i/h_o = 1/3$ ; (c)  $h_i/h_o = 1$ ; (d)  $h_i/h_o = 3$ ; (e)  $h_i/h_o = \infty$

### 5. 이차원적 박판이론에 의한 결과와의 비교

Ramaiah와 Vijayakumar<sup>(36)</sup>는 반경방향으로 두께가 선형적으로 변하는 환형판에 대한 철저한 연구를 하였다. 그들은 다양한 테이퍼비( $h_o/h_i$  또는  $h_i/h_o$ )와 경계 반경비( $b/a$ )를 사용해서 고정, 단순지지 및 자유 모서리 조건의 조합으로 이루어지는 9개의 가능한 모든 경계조건의 경우를 다루었다. 그들은 반경방향으로 9개의 시행함수(trial function)를 가지고 리츠방법을 사용하였으며, 이는 정확한 결과를 주기에 충분하다. 그들의 해석은 2차원 박판이론을 근간으로 한 것이었다. 축대칭 모드( $n=0$ )와 1개( $n=1$ ) 및 2개( $n=2$ )의 절점직경(nodal diameter)을 가지는 모드에 대한 진동수가 계산되었다. 여기서 사용된 무차원 진동수를 나타내는 매개변수로는  $2(\omega a^2/h_o)\sqrt{\rho/E}$  또는  $2(\omega a^2/h_o)\sqrt{\rho/E}$ 가 사용되었다.

Table 6에서는 반경방향으로 두께가 선형적으로 변하는 4개의 환형박판에 대해서 3차원 이론과 2차원

Table 6 Comparison of frequencies in  $2(\omega a^2/h_o)\sqrt{\rho/E}$  from the 3-D and the 2-D theories of completely free, annular plates having linearly varying thickness along the radial direction for  $b/L = 3/7$ ,  $h_m/L = 0.05$ , and  $\nu = 0.3$

n	Method	$h_o/h_i$			
		0.2	0.4	0.6	0.8
0 <sup>A</sup>	3DR	4.39	4.35	4.49	4.73
	2DR	4.04	4.22	4.45	4.73
	Difference(%)	(7.97)	(2.99)	(0.89)	(0)
1	3DR	8.58	9.02	9.60	10.22
	2DR	8.22	9.03	9.74	10.41
	Difference(%)	(4.20)	(-0.11)	(-1.46)	(-1.86)
2	3DR	2.50	2.47	2.56	2.73
	2DR	2.54	2.49	2.58	2.75
	Difference(%)	(-1.60)	(-0.81)	(-0.78)	(-0.73)

Notes:

3DR: the 3-D frequencies by the Ritz method

2DR: the 2-D frequencies by the Ritz method

Values in parentheses are the percent difference between 3DR and 2DR.

이론으로 구한 진동수  $2(\omega a^2/h_0)\sqrt{\rho/E}$  가 비교되었다. 이 4개 판의 형상은  $b/L=3/7$  과  $h_0/h_i=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 으로 표현되며, 프와송비로는 0.3이 사용되었다. 그들의 해석은 2차원 박판이론을 사용하였으므로 경계반경에 대한 판 두께의 비는 주어지지 않았다. 비교를 위해서 여기서는  $h_m/L$ 을 0.05로 가정하였다. 이 표에서는 4개의 환형판에 대해서 3차원 리츠방법(3DR)과 2차원 리츠방법(2DR)<sup>(36)</sup>으로 각각 구한 3개의 진동수가 주어졌다. 이 3개의 진동수는  $n=0$ (축대칭 모드),  $n=1,2$ 에 해당하는 3개의 원주방향 휨 모드(circumferential flexural mode)이다. 퍼센트 차이는 다음 식으로 주어진다.

$$\text{Difference}(\%) = (3DR - 2DR) / 3DR \times 100 \quad (20)$$

예상했던 바, 이 표는 테이퍼비에 관계없이, 3차원 리츠방법은 2차원 리츠방법보다 작은 기본 진동수를 준다는 사실을 보여 준다. 대체로 두께의 변화가 적어질수록 (즉 테이퍼비  $h_0/h_i$ 가 증가함에 따라서) 2DR과 3DR 사이의 절대 퍼센트 차이는 줄어들며, 3DR 진동수가 2DR 진동수보다 작아짐을 알 수 있다. 최대 퍼센트 차이 (7.97%)는  $h_0/h_i=0.2$  일 때  $n=0$  (축대칭 모드)에서 발생한다. 양의 퍼센트 차이는 예상하지 못했었다. 그 이유는 2차원 박판이론에서는 다루지 않는 전단 변형과 회전 관성 효과까지도 고려한 정확한 3차원 해석은 전형적으로 2차원 박판이론보다 작은 진동수를 주기 때문이다.

## 6. 결론

3차원적인 리츠방법으로 선형적으로 테이퍼된 두꺼운 환형판의 정확한 진동수와 모드 형상을 계산하였다. 이 해석에서는 등방성 재료에 대한 일반적 형태의 3차원적 탄성론에 입각한 방정식이 이용되었다. 이 해석에서는 변형률이 작다는 제한 조건 이외에 어떤 다른 변위에 관한 제한 조건을 두지 않았다. 이것은 판의 두께방향 변위의 변분에 관해서 매우 제한적인 가정을 하는 기존의 고전적인 2차원적 판 이론과 가장 두드러진 차이점이다.

본 연구의 해석 방법은 간단하지만, 엄밀해에 매우 근접한 진동수와 모드 형상을 결정할 수 있었다. 따라서 3차원적인 유한요소법의 정확성을 검증하기 위한 벤치마크로 사용될 수 있다. 또한 유한요소해석과

비교했을 때 본 연구의 해석방법이 보다 적은 차수의 행렬식으로도 상당한 정확도를 지닌 진동수를 구할 수 있다.

## 참고 문헌

- (1) Mindlin, R. D., 1951, "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 31~38.
- (2) Aksent'ial, O. K. and Selezneva, T. N., 1976, "Determination of Frequencies of Natural Vibrations of Circular Plates," PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 40, pp. 96~103.
- (3) Celep, Z., 1978, "On the Axially Symmetric Vibration of Thick Circular Plates," Ingenieur-Archiv, Vol. 47, pp. 411~420.
- (4) Celep, Z., 1980, "Free Vibration of Some Circular Plates of Arbitrary Thickness," Journal of Sound and Vibration, Vol. 70, pp. 379~388.
- (5) Gupta, A. P. and Mishra, N., 1980, "Effect of Secondary Terms on Axisymmetric Vibration of Circular Plates," Journal of Engineering Mathematics, Vol. 14, pp. 101~106.
- (6) Hutchinson, J. R., 1979, "Axisymmetric flexural vibrations of a thick free circular plate," Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 139~144.
- (7) Iyengar, K. T. S. R. and Raman, P. V., 1978, "Free Vibration of Circular Plates of Arbitrary Thickness," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 64, pp. 1088~1092.
- (8) Komissarova, G. L., 1979, "Vibrations of a Rigidly Clamped circular plate," Soviet Applied Mechanics, Vol. 14, pp. 735~739.
- (9) So, J. and Leissa, A. W., 1998, "Three-Dimensional Vibrations of Thick Circular and Annular Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 209, pp. 15~41.
- (10) Leissa, A. W., 1969, Vibration of Plates, NASA SP 160: U.S. Govt. Printing Office;

reprinted by the Acoustical Society of America.

(11) Leissa, A. W., 1978, "Recent Research in Plate Vibration, 1973-1976: Complicating Effects," The Shock and Vibration Digest, Vol. 10, pp. 21~35.

(12) Leissa, A. W., 1981, "Plate Vibration Research, 1976-1980: Complicating Effects," The Shock and Vibration Digest, Vol. 13, pp. 19~36.

(13) Leissa, A. W., 1987, "Recent Studies in Plate Vibrations, 1981-1985: Part II Complicating Effects," The Shock and Vibration Digest, Vol. 19, pp. 10~24.

(14) Conway, H. D., 1957, "An Analogy Between the Flexural Vibrations of a Cone and a Disc of Linearly Varying Thickness," Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 37, pp. 406~407.

(15) Conway, H. D., 1958, "Some Special Solutions for the Flexural Vibrations of Disc of Varying Thickness," Ingenieur Archiv, Vol. 26.

(16) Kovalenko, A. D., 1959, Circular Variable-Thickness Plates, Fizmatgiz, Moscow (in Russian).

(17) Kazantseva, G. E., 1958, "On the Vibrations of Circular Plates of Variable Thickness," Prikladnaya Mekhanika, Vol. 4, pp. 197~204 (in Russian).

(18) Ehrlich, F. F., 1956, "A Matrix Solution for the Vibration Modes of Nonuniform Disks," Journal of Applied Mechanics, Vol. 23, pp. 109~115.

(19) Soni, S. R. and Amba Rao, C. L., 1975, "On Radially Symmetric Vibrations of Orthotropic Non-uniform Disks Including Shear Deformation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 42, pp. 57~63.

(20) Irie, T., Yamada, G., and Aomura, S., 1979, "Free Vibrations of a Mindlin Annular Plate of Varying Thickness," Journal of Sound and Vibration, Vol. 66, pp. 187~197.

(21) Gupta, U. S. and Lal, R., 1985, "Axisymmetric Vibrations of Polar Orthotropic Mindlin Annular Plates of Variable Thickness,"

Journal of Sound and Vibration, Vol. 98, pp. 565~573.

(22) Singh, B. and Goel, R., 1985, "Transverse Vibrations of an Elliptic Plate with Variable Thickness," Proceedings of the Workshop on Solid Mechanics, University of Roorkee, pp. 13~16.

(23) Singh, B. and Tyagi, D. K., 1985, "Transverse Vibration of an Elliptic Plate with Variable Thickness," Journal of Sound and Vibration, Vol. 99, pp. 379~391.

(24) Singh, B. and Chakraverty, S., 1991, "Transverse Vibration of Circular and Elliptic Plates with Variable Thickness," Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 22, pp. 787~803.

(25) Singh, B. and Chakraverty, S., 1992, "Transverse Vibration of Circular and Elliptic Plates with Quadratically Varying Thickness," Applied Mathematical Modelling, Vol. 16, pp. 269~274.

(26) Singh, B. and Chakraverty, S., 1991, "Transverse Vibration of Completely Free Elliptic and Circular Plates Using Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 33, pp. 741~751.

(27) Singh, B. and Chakraverty, S., 1992, "On the Use of Orthogonal Polynomial in the Rayleigh-Ritz Method for the Study of Transverse Vibration of Elliptic Plates," International Journal of Computers and Structures, Vol. 43, pp. 439~443.

(28) Singh, B. and Chakraverty, S., 1992, "Transverse Vibration of Simply Supported Elliptical and Circular Plates Using Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials in Two Variables," Journal of Sound and Vibration, Vol. 152, pp. 149~155.

(29) Singh, B. and Chakraverty, S., 1994, "Use of Characteristic Orthogonal Polynomials in Two Dimensions for the Transverse Vibration of Elliptical and Circular Plates with Variable Thickness," Journal of Sound and Vibration, Vol.

173, pp. 289~299.

(30) Singh, B. and Saxena, V., 1995, "Axisymmetric Vibration of a Circular Plate with Double Linear Variable Thickness," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 179, pp. 879~897.

(31) Gutierrez, R. H., Romanelli, E., and Laura, P. A. A., 1996, "Vibrations and Elastic Stability of Thin Circular Plates with Variable Profile," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 195, pp. 391~399.

(32) Kang, J.H., 1997, "Three-dimensional Vibration Analysis of Thick Shells of Revolution with Arbitrary Curvature and Variable Thickness", Ph.D. Dissertation, The Ohio State University.

(33) 강재훈, 이은택, 양근혁, 2001, "임의의 곡률과

변두께를 갖는 두꺼운 축 대칭 회전 쉘의 삼차원적 장방정식, 운동방정식, 에너지 범함수," *한국소음진동 공학회지*, 제 11권, 제 1호, pp. 156~166.

(34) Kantorovich, L. V. and Krylov, V. I., 1958, *Approximate Methods in Higher Analysis*, Groningen: Noordhoff.

(35) So, J. and Leissa, A. W., 1997, "Free Vibrations of Thick Hollow Circular Cylinders from Three-Dimensional Analysis," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 119, pp. 89~95.

(36) Ramaiah, G. K. and Vijaykumar, K., 1975, "Vibrations of Annular Plates with Linear Thickness Profiles," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 40, pp. 293~298.