

< 논 문 >

신경회로망을 이용한 원통셸의 충격하중 추론에 관한 연구

Identification of Composite Cylindrical Shells by Using Neural Networks

명 창 문* · 이 영 신†

Myung, C. M. and Lee, Y. S.

(2001년 8월 7일 접수 : 2001년 11월 13일 심사완료)

Key Words : Composite Materials(복합재료), Cylindrical Shell(원통셸), Neural Networks(신경회로망), Backpropagation(역전파학습법), Loading Identification(하중특성추론)

ABSTRACT

A study on the structural analysis of the composite laminated cylindrical shell which has simply supported boundary conditions at both ends, was performed. The results were used into the neural networks. Neural networks identify the load characteristics of the composite shells. Momentum Backpropagation which the learning rate can be varied was developed. Input patterns consist of strains at 9 side points which is divided equally. Output layers are the load characteristics. Developed program was used for the training. The training with variable learning rate was converged close to real load characteristics. Inverse engineering can be applicable to the composite laminated cylindrical shells with developed neural networks.

1. 서 론

복합재료를 이용한 구조물의 설계 및 적용은 재질 특성상 항공기 분야를 주축으로 그동안 많은 발전을 이루어 왔다. Dobyns⁽¹⁾에 의해 단순지지 복합재료 사각판의 정적 및 동적해석이 처음 발표된 이후 Bert와 Birman⁽²⁾의 해법을 적용하여 Christoforou와 Swanson⁽³⁾은 단순지지 복합재료 원통셸의 충격에 대한 완전해를 처음으로 발표하였으며, 동일 조건의 충격하중 특성별 해석을 Lee⁽⁴⁾가 발표하였다.

Christoforou와 Swanson의 완전해는 원통셸의 중앙점에서의 충격을 기준으로 해를 구하였고, Gong,

Shim과 Toh^(5,6)는 최근 임의위치에 대한 완전해를 제시하였다. Wardle과 Lagace⁽⁷⁾는 준정적 하중해와 충격실험을 비교분석하였다. Dobyns의 해석결과와 유한요소 프로그램들의 해석결과는 Lahtinen과 Pramila⁽⁸⁾가 셀요소를 이용하여 비교분석 발표하였으며, 그 결과는 상호 잘 일치하고 있다.

신경회로망의 개념은 McCulloch와 Pitts가 1943년 처음으로 제시하였고, 1969년 Minsky와 Papert가 단층 신경회로망은 비선형 문제 해석 및 적용이 불가능하다는 것을 수학적으로 증명하였으나, 이러한 불가능의 한계를 1974년 Werbos가 backpropagation 학습법에 은닉층 개념을 도입하여 극복하였으며, 신경회로망은 선형 및 비선형 문제의 모든 적용이 가능하게 되었다.⁽²⁰⁾

이러한 신경회로망의 발전은 기계공학 개념설계 분야에서 NASA의 지원을 받아 Berke와 Hajela⁽¹²⁾가 1990년 처음으로 시도하였으며, Brown, Murthy와

† 책임저자, 정회원, 국방과학연구소
E-mail : greenbike@hananet.net
Tel : (042) 821-3631, Fax : (042) 823-3400
* 정회원, 충남대학교 기계설계공학과

Berke⁽¹³⁾는 복합재료의 재질특성 추론에 적용하였다. Jayatheertha, Webber와 Morton⁽¹⁴⁾은 복합재료 사각판의 최적설계 분야에 적용하였고, Jenkins⁽¹⁵⁾는 구조물의 반복해석에 적용하였으며, Luo와 Hanagud⁽¹⁶⁾는 PVDF 센서를 활용하여 복합재료 파손감지에 신경회로망을 적용하였다.

계측이 어려운 구조물 해석상 하중위치 및 하중량 추론은 중요하다. 구조해석과 신경회로망을 적용하여 Haddara와 Soares⁽¹⁷⁾는 잠수함의 수압을 구하였으며, Cao, Sugiyama와 Mitsui⁽¹⁸⁾는 항공기 날개에 가해지는 하중분포를 구하였다. Jones와 Sirikis⁽¹⁹⁾는 복합재료 사각판에 스트레인게이지를 부착하고, 사각판에 가해지는 하중특성을 구하였다.

본 연구에서는 신경회로망을 적용하여 복합재료 원통셀의 스트레인으로부터 원통셀에 가해진 하중위치, 하중량 및 충격점의 처짐량에 관한 연구를 수행하였다.

2. 해석이론

2.1 해석모델

본 연구에 적용된 해석모델은 재질이 CFRP로 구성되어 있으며, 적층순서가 [90/+22/-22/90/+22/-22]인 복합재료 원통셀이다. 해석모델의 특성은 Fig. 1에 제시된 바와 같이 양단이 단순 지지되어 있으며, 상단 일정 면적에 하중이 가해진다. 하중이 가해지는 면적은 원주방향으로 9°, 길이 방향으로 1.7 cm이다.

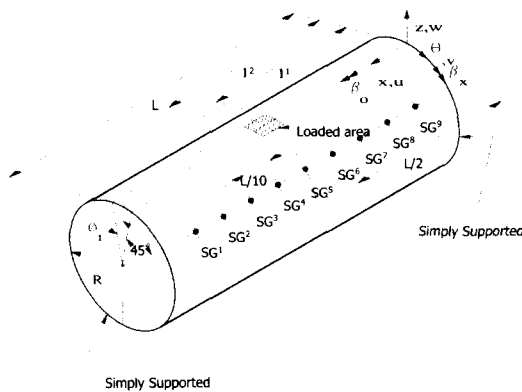


Fig. 1 Analysis model of composite cylindrical shell

2.2 해석이론

반경 R , 길이 L , 두께 h 인 복합재료 원통셀이 본 해석모델과 같은 하중을 받는 경우, 전단변형률을 포함하여 Love의 운동방정식을 적용하면 식 (1)과 같이 된다.^(2, 3, 9)

$$\begin{aligned} N_{x,x} + \frac{1}{R} N_{x,\theta} &= \rho h \ddot{u} \\ N_{x,\theta} + \frac{1}{R} N_{\theta,\theta} + \frac{1}{R} Q_\theta &= \rho h \ddot{v} \\ Q_{x,x} + \frac{1}{R} Q_{\theta,\theta} - \frac{1}{R} N_\theta + q(x, \theta, t) &= \rho h \ddot{w} \\ M_{x,x} + \frac{1}{R} M_{x,\theta} - Q_x &= \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_x \end{aligned} \quad (1)$$

직교이방성 재질을 적용한 구성방정식은 식 (2)와 같다.⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \kappa A_{55} & 0 \\ 0 & \kappa A_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서 $[A]$, $[D]$ 행렬식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (A_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z^2) Q_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ A_{ii} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ii} dz \quad (i, i = 4, 5) \end{aligned} \quad (3)$$

중양면에 대한 변형률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= u_{,x}^0; \quad \epsilon_\theta^0 = \frac{1}{R} v_{,\theta} + \frac{w}{R}; \quad \gamma_{x\theta}^0 = v_{,x} + \frac{1}{R} u_{,\theta} \\ \gamma_{xx}^0 &= \beta_{x,x}; \quad \gamma_{\theta z}^0 = \beta_\theta + \frac{1}{R} w_{,\theta} - \frac{v}{R} \\ \kappa_x &= \beta_{x,x}; \quad \kappa_\theta = \frac{1}{R} \beta_{\theta,\theta}; \quad \kappa_{x\theta} = \beta_{\theta,x} + \frac{1}{R} \beta_{x,\theta} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)와 식 (2)를 운동방정식 식 (1)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$A_{11} u_{,xx} + \frac{A_{66}}{R^2} u_{,\theta\theta} + \left(\frac{A_{12} + A_{66}}{R} \right) v_{,x\theta} + \frac{612}{R} w_{,x} = \rho h \ddot{u}$$

$$\begin{aligned}
 A_{11}u_{,xx} + \frac{A_{66}}{R^2}u_{,\theta\theta} + \left(\frac{A_{12}+A_{66}}{R}\right)v_{,x\theta} + \frac{6I_2}{R}w_{,x} &= \rho h \ddot{u} \\
 + \left(\frac{A_3 + A_5}{R^2}\right)w_{,\theta}^2 + \frac{A_{44}}{R}\beta_{\theta}^{44} &= \rho h \ddot{v} \\
 -\frac{A_{12}}{R}u_{,x} - \left(\frac{A_{42}+A_{66}}{R^2}\right)v_{,\theta} + A_{55}w_{,xx} + \frac{A_{44}}{R}w_{,\theta\theta} \\
 -\frac{A_5}{R^2}w_{,\theta}^2 + A_{55}\beta_{x,x} + \frac{2}{R}\beta_{\theta,\theta} + q(x,\theta,t) &= \rho h \ddot{w} \\
 -A_{55}w_{,x} + D_{11}\beta_{x,xx} + \frac{D_{66}}{R^2}\beta_{x,\theta\theta} - A_{55}\beta_{x,x} \\
 + \left(\frac{D_{12}+D_{66}}{R}\right)\beta_{\theta,x\theta} &= \frac{\rho h^3}{12}\ddot{\beta}_x \\
 \frac{A_{44}}{R}v - \frac{A_{44}}{R}w_{,\theta} + \left(-\frac{6D_{12}}{R}\right)\beta_{x,\theta} + D_{66}\beta_{\theta,xx} \\
 + \frac{D_2}{R^2}\beta_{\theta,\theta\theta} - A_{44}\beta_{\theta} &= \frac{\rho h^3}{12}\ddot{\beta}_{\theta} \quad (5)
 \end{aligned}$$

양단이 단순지지된 원통셀의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 N_x(0,\theta,t) = N_x(L,\theta,t) = M_x(0,\theta,t) = M_x(L,\theta,t) &= 0 \\
 w(0,\theta,t) = w(L,\theta,t) = v(0,\theta,t) = v(L,\theta,t) &= 0 \\
 \beta_{\theta}(0,\theta,t) = \beta_{\theta}(L,\theta,t) &= 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

경계조건 식 (6)을 만족하는 원통셀의 지배방정식 식 (5)의 해는 다음과 같이 시간의 함수와 공간함수로 분리하여 가정할 수 있다.^(2, 3)

$$\begin{aligned}
 u &= U_{mn}(t) \cos n\theta \cos \frac{m\pi x}{L} \\
 v &= V_{mn}(t) \sin n\theta \sin \frac{m\pi x}{L} \\
 w &= W_{mn}(t) \cos n\theta \sin \frac{m\pi x}{L} \\
 \beta_x &= T_{mn}(t) \cos n\theta \cos \frac{m\pi x}{L} \\
 \beta_{\theta} &= B_{mn}(t) \sin n\theta \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (7)
 \end{aligned}$$

하중식은 다음과 같이 가정한다.

$$q(x,\theta,t) = Q_{mn}(t) \cos n\theta \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (8)$$

식 (7)과 식 (8)을 식 (5)에 대입하면 다음과 같다.^(2, 3)

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ & & & C_{44} & C_{45} \\ \text{sym} & & & & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn}(t) \\ V_{mn}(t) \\ W_{mn}(t) \\ B_{mn}(t) \\ T_{mn}(t) \end{Bmatrix}$$

여기에서 C_{ij} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= -A_{11}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - A_{66}\left(\frac{n}{R}\right)^2 \\
 C_{122} &= C_{12} - A_{66}\left(\frac{n}{R}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right) \\
 C_{13} &= C_{31} = \frac{A_{12}}{R}\left(\frac{m\pi}{L}\right) \\
 C_{14} &= C_{41} = C_{15} = C_{51} = 0 \\
 C_2 &= -A_{44}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - A_{44}\left(\frac{n}{R}\right)^2 - \frac{A_{44}}{R^2} \\
 C_{23} &= C_{32} = -\left(\frac{A_2 + 2A_4}{R}\right)\left(\frac{n}{R}\right) \\
 C_{24} &= C_{42} = \frac{A_{44}}{R} \\
 C_{25} &= C_{52} = 0 \\
 C_{33} &= -A_{55}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - A_{44}\left(\frac{n}{R}\right)^2 - \frac{A_2}{R^2} \\
 C_{34} &= C_{43} = A_{44}\left(\frac{n}{R}\right) \\
 C_{35} &= C_{53} = -A_{55}\left(\frac{m\pi}{L}\right) \\
 C_{44} &= -D_{66}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - D_{22}\left(\frac{n}{R}\right)^2 - A_{44} \\
 C_{45} &= C_{54} = -(D_{66} + D_{12})\left(\frac{n}{R}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right) \\
 C_{55} &= -D_{11}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - D_{66}\left(\frac{n}{R}\right)^2 - A_{55} \quad (10)
 \end{aligned}$$

식 (9)는 다음과 같이 2차 미분방정식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 U_{mn}(t) &= K_U W_{mn}(t) \\
 V_{mn}(t) &= K_V W_{mn}(t) \\
 B_{mn}(t) &= K_B W_{mn}(t) \\
 T_{mn}(t) &= K_T W_{mn}(t) \quad (11)
 \end{aligned}$$

여기서 K_U, K_V 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 K_U &= S_1 + S_3 K_B + S_3 K_T \\
 K_T &= S_4 + S_5 K_B + S_6 K_T \\
 \Delta_B &= (C_{35} + C_{31} S_2 + C_{25} S_5)(C_{34} + C_{14} S_1 + C_{24} S_4) \\
 &\quad - (C_{34} + C_{14} S_1 + C_{24} S_4)(C_{55} + C_{15} S_3 + C_{25} S_5) \\
 \Delta_T &= (C_{45} + C_{15} S_2 + C_{25} S_5)(C_{34} + C_{14} S_1 + C_{24} S_4) \\
 &\quad - (C_{44} + C_{14} S_2 + C_{24} S_5)(C_{35} + C_{15} S_3 + C_{25} S_5) \\
 \Delta &= (C_{44} + C_{14} S_2 + C_{24} S_5)(C_{55} + C_{15} S_3 + C_{25} S_5) \\
 &\quad - (C_{45} + C_{14} S_3 + C_{24} S_6)(C_{45} + C_{15} S_2 + C_{25} S_5) \\
 S_1 &= (C_{12} C_5 - C_2 C_5) / S \\
 S_2 &= (C_{12} C_4 - C_2 C_4) / S \\
 S_3 &= (C_{12} C_5 - C_2 C_5) / S \\
 S_4 &= (C_{12} C_{13} - C_{11} C_{23}) / S \\
 S_5 &= (C_{12} C_1 - C_{41} C_1) / S \\
 S_6 &= (C_{12} C_{15} - C_{11} C_{25}) / S \\
 S &= C_{11} C_{22} - C_{12}^2
 \end{aligned} \tag{12}$$

식 (11)을 식 (9)의 3번째 항에 대입하면 다음과 같다.

$$\ddot{W}(t) + \frac{K_{mn}}{\rho h} W_{mn}(t) = \frac{1}{\rho h} Q_{mn}(t) \tag{13}$$

여기에서 K_{mn} 은 다음과 같다.

$$K_{mn} = -(C_{13} K_U + C_{23} K_T + C_{33} + C_{34} K_B + C_{35} K_T) \tag{14}$$

해석모델의 중간지점 $(L/2, 0)$ 을 기준으로 국부면적 $R\phi_1(l_2 - l_1)$ 에 가해진 하중은 다음과 같다.

$$Q_{mn}(t) = P_{mn} \frac{F(t)}{R\phi_1(l_2 - l_1)} \tag{15}$$

여기서 P_{mn} 은 다음과 같다.

$$P_{mn} = \frac{8}{mn\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2L} (l_2 - l_1) \sin n\phi_1 \quad m \neq 0, \quad n \neq 0 \tag{16}$$

식 (15)를 식 (13)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\ddot{W}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 W_{mn}(t) = \frac{P_{mn} \pi RL}{R\phi_1(l_2 - l_1) m_1} \frac{F(t)}{m_1} \tag{17}$$

식 (17)을 이용한 초기변위 및 속도에 관한 식은 다

음과 같다.

$$W_{mn}(t) = \frac{P_{mn} \pi RL}{R\phi_1(l_2 - l_1) m_1 \omega_{mn}} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \tag{18}$$

식 (18), 식 (11), 식 (7)을 이용하면 해석모델 복합 재료 원통셀의 처짐방정식은 다음과 같다.^(3, 11)

$$\begin{aligned}
 w(x, \theta, t) &= \frac{\pi RL}{R\phi_1(l_2 - l_1) m_1} \sum_m \sum_n \frac{P_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta \\
 &\quad \times \int_0^t F(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{19}$$

충격자와 원통셀 사이의 접촉시 충격자의 감속률로부터 원통셀에 가해지는 하중은 다음과 같다.

$$F(t) = -m_2 \ddot{w}(L/2, 0, t) \tag{20}$$

식 (20)을 적분하면 다음과 같다.

$$V_0 t - \frac{1}{m_2} \int_0^t F(\tau)(t - \tau) d\tau = w(L/2, 0, t) \tag{21}$$

식 (21)을 식 (19)에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 V_0 t - \frac{1}{m_2} \int_0^t F(\tau)(t - \tau) d\tau &= w(L/2, 0, t) \\
 \sum_m \sum_n \frac{P_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \frac{m\pi}{L} \cos n\theta \int_0^t F(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{22}$$

식 (22)를 Laplace 변환하면 다음과 같다.^(27, 28)

$$F(s) = \frac{-m_2 V_0}{1 + \frac{\pi RL}{R\phi_1(l_2 - l_1) m_1} \sum_q \sum_r P_{qr} \sin \frac{q\pi}{2} \frac{s^2}{s^2 + \omega_{qr}^2}} \tag{23}$$

Laplace 역변환을 적용하면 다음과 같다.

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s) ds \tag{24}$$

식 (25)는 Cauchy Residue Theorem을 적용하면 다음과 같다.^(29, 30)

$$F(t) = \sum_j \text{Res}(a_j) \tag{25}$$

Residue 극점은 다음과 같다.

$$\text{Re } s(a_j) = \lim [(s - a_j) e^{st} F(s)] \tag{26}$$

식 (23), 식 (25), 식 (27)을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$Res(a_j) = \lim_{s \rightarrow a_j} \left[s - a_j \frac{-m_2 V_0 e^{s t}}{1 + \frac{\pi RL}{R\phi_1(l_2 - l_1) m_1} \frac{m_2}{\sum_q \sum_r P_{qr}} \sin \frac{q\pi}{2} \frac{s^2}{s^2 + \omega_{qr}^2}} \right] \quad (27)$$

식 (27)에 L'Hospital Rule을 적용하면 다음과 같다.⁽²⁹⁾

$$F(t) = \sum_j \frac{-m_2 V_0 e^{a_j t}}{\frac{\pi RL}{R\phi_1(l_2 - l_1) m_1} \frac{m_2}{\sum_q \sum_r P_{qr}} \sin \frac{q\pi}{2} \frac{2a_j \omega_{qr}^2}{(a_j^2 + \omega_{qr}^2)^2}} \quad (28)$$

Identity는 다음과 같다.

$$\frac{e^{i\omega} j^t - e^{-i\omega} j^t}{i} = 2 \sin \omega t \quad (29)$$

식 (28)은 다음과 같이 된다.

$$F(t) = \frac{-m_2 V_0}{\frac{\pi RL}{R\phi_1(l_2 - l_1) m_1} \frac{m_2}{\sum_q \sum_r P_{qr}} \sin \frac{q\pi}{2} \frac{\omega_j \omega_{qr}^2}{(\omega_{qr}^2 - \omega_j^2)^2}} \sin \omega_j t \quad (30)$$

식 (30)에서 개별 주파수에 대한 하중은 다음과 같다.

$$F_j = \frac{-m_2 V_0}{\frac{\pi RL}{R\phi_1(l_2 - l_1) m_1} \frac{m_2}{\sum_q \sum_r P_{qr}} \sin \frac{q\pi}{2} \frac{\omega_j \omega_{qr}^2}{\omega_{qr}^2 + \omega_j^2}} \quad (31)$$

식 (31)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F(t) = \sum_j F_j \sin \omega_j t \quad (32)$$

식 (18)의 Laplace 변환은 다음과 같이 된다.

$$W_{mn}(s) = \frac{\pi RL}{R\phi_1(l_2 - l_1) m_1} \frac{F(s)}{s^2 + \omega^2} \quad (33)$$

식 (32)를 식 (33)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$W_{mn}(s) = \frac{\pi RL}{R\phi_1(l_2 - l_1) m_1} \sum_j \frac{F_j \omega_j}{(s^2 + \omega_{mn}^2)(s^2 + \omega_j^2)} \quad (34)$$

식 (34)를 Laplace 역변환 하면 다음과 같다.

$$W_{mn}(t) = \frac{P_{mn} \pi RL}{R\phi_1(l_2 - l_1) m_1} \sum_j F_j \omega_j \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st}}{(s^2 + \omega_{mn}^2)(s^2 + \omega_j^2)} ds \quad (35)$$

Cauchy Residue Theorem을 적용하여 식 (36)을 적분하면 다음과 같이 된다.⁽¹⁴⁾

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st}}{(s^2 + \omega_{mn}^2)(s^2 + \omega_j^2)} ds = Res(\pm i\omega_{mn}) + Res(\pm i\omega_j) \quad (36)$$

적분식 내부는 다음과 같이 단순화 할 수 있다.

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)R(s)} \quad (38)$$

여기서 각각의 항은 다음과 같다.

$$P(s) = e^{st} \\ s^2 + \omega^2 \\ (s^2 + \omega^2) \quad (39)$$

식 (36)의 Residue는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$i(\pm \omega_{mn}) + i(\pm \omega_j) = \frac{P(\pm i\omega_{mn})}{(s^2 + \omega_j^2)_{s=\pm i\omega_{mn}}} + \frac{P(\pm i\omega_j)}{(s^2 + \omega_{mn}^2)_{s=\pm i\omega_j}} \quad (40)$$

식 (35) ~ (39)를 조합하면 다음과 같이 된다.

$$W_{mn}(t) = \frac{P_{mn} \pi RL}{R\phi_1(l_2 - l_1) m_1} \sum_j \omega_j \left[\frac{e^{i\omega_{mn} t}}{2\omega_j(\omega_{mn}^2 - \omega_j^2)} + \frac{e^{-i\omega_{mn} t}}{-2\omega_j(\omega_{mn}^2 - \omega_j^2)} + \frac{e^{i\omega_j t}}{2\omega_{mn}(\omega_j^2 - \omega_{mn}^2)} + \frac{e^{-i\omega_j t}}{(\omega_j^2 - \omega_{mn}^2)(-2\omega_{mn})} \right] \quad (41)$$

식 (41)에서 Identity 식 (29)를 적용하면 다음과 같다.^(3, 11)

$$W_{mn}(t) = \frac{P_{mn} \pi RL}{R\phi_1(l_2 - l_1) m_1} \sum_j \frac{F_j}{\omega_{mn}(\omega_j^2 + \omega_{mn}^2)} \times (\omega_j \sin \omega_{mn} t - \omega_{mn} \sin \omega_j t) \quad (42)$$

Table 1 Natural frequencies of the composite shell

모드수	1차	2차	3차	4차
진동수	1,206 Hz	1,590 Hz	2,103 Hz	2,296 Hz

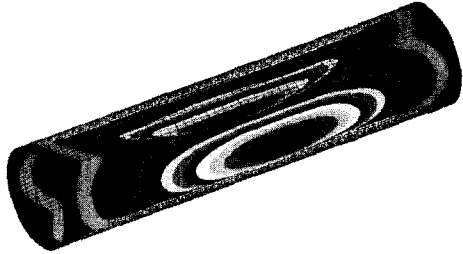


Fig. 2 1st modeshape of the composite shell

2.3 해석결과

복합재료 원통셸의 충격해석 완전해는 하중위치에서의 처짐 및 응력을 구할 수는 있으나 원통셸의 임의 부위에서의 특성을 구할 수 없다. 본 연구는 원통셸의 측면 변형률을 이용하여 가해진 하중특성을 추론하며, 원통셸의 측면 9개소에서 변형률 추출을 위해 관련해석은 PATRAN^(22, 23)으로 모델링한 후, NASTRAN^(24, 25)으로 해석하였다.

양단이 단순지지된 복합재료 원통셸의 유한요소 모델은 원주방향으로 40개, 길이방향으로 50개로 총 2000개 요소로 구성하였으며, 셸요소를 사용하였다.

(1) 고유진동 해석

고유진동 해석결과 복합재료 원통셸 해석모델의 고유진동수는 Table 1과 같으며, 1차 모드의 형상은 Fig. 2와 같다. 일반적으로 복합재료 구조물의 경우 고유진동수는 높은 값을 나타내며, 본 연구 해석모델의 경우도 1차 고유진동수는 1,206 Hz로 나타났다.

(2) 충격해석

복합재료 원통셸의 충격해석에서 하중의 크기는 445 N(100 lbs)부터 8,900 N(2,000 lbs) 까지 445 N(100 lbs)씩 증가시켜 20개의 하중에 대한 해를 구하였다. 하중면적을 원통셸의 상부 셸요소 4개에 가하였으며, 하중의 중심위치는 요소의 한쪽 단에서 시작하여 절점마다 계산하여 총 49개소에 하중을 가하였다. 충격 하중의 특성은 sine 반파의 형태로 가정하였다. 충격하중의 주파수는 일반적으로 100 Hz 부근에서 연구되고 있으며, 본 연구에서도 100 Hz를 기준으로 해석하였다. 충격하중에 대한 원통셸의 변형특성은

고유진동 1차 모드가 지배적이며, 반응특성은 Figs. 3~5와 같다. 신경회로망 학습을 위한 총 계산 패턴수는 980개이며, 해석결과는 Christoforou⁽⁴⁾의 결과와 중앙점 하중위치에서 비교한 결과 유사하였다.

원통셸의 상부 중앙점에서 100 Hz의 sine 반파의 경우, 445 N, 4,450 N, 8900 N 충격하중에 대한 길이방향에 따른 처짐 곡선의 형태는 Fig. 6과 같고, 원주방향의 변형률 패턴은 Figs. 7~9와 같다. 여기

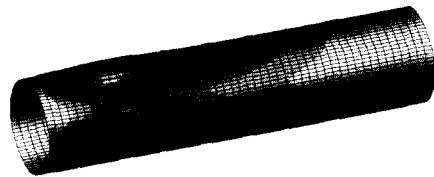


Fig. 3 Impact response shape at L/5 location under 4,450 N(1,000 lbs) loading

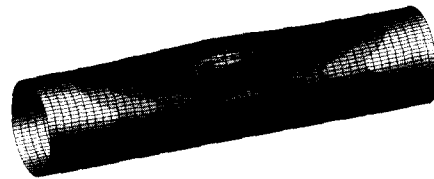


Fig. 4 Impact response shape at L/2 location under 4,450 N(1,000 lbs) loading

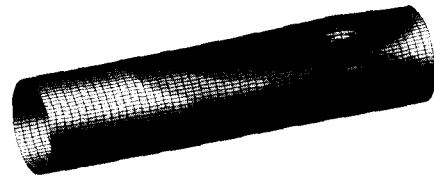


Fig. 5 Impact response shape at 4L/5 location under 4,450 N(1,000 lbs) loading

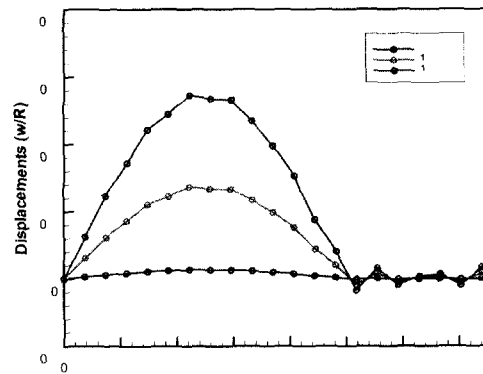


Fig. 6 Displacements time history at impact center

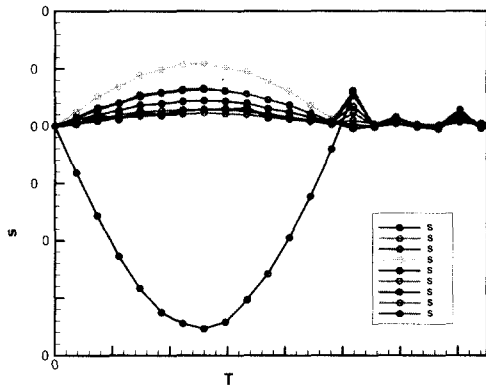


Fig. 7 Strain history at 9 gauging points under 100 Hz, 100 lbs center impact

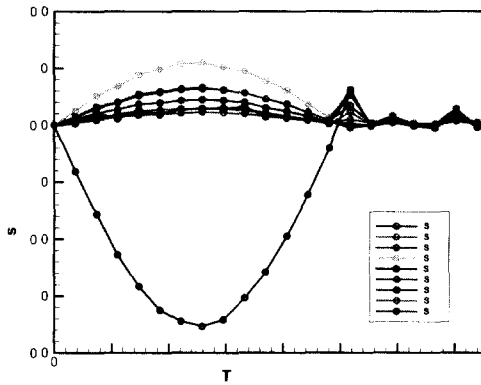


Fig. 8 Strain history at 9 gauging points under 100 Hz, 1,000 lbs center impact

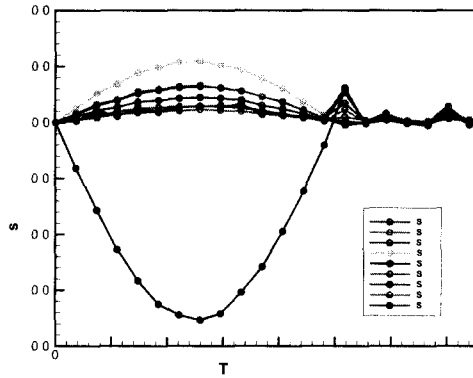


Fig. 9 Strain history at 9 gauging points under 100 Hz, 2,000 lbs center impact

서 +는 인장특성이고, -는 압축특성을 표시한다. 충격 상단부로부터 원주방향으로 45° 떨어진 위치에 있는 SG1-SG9의 9개 등간격 계측점 변형특성이 신

경회로망의 학습자료로 활용된다.

3. 신경회로망 적용

3.1 신경회로망 모델

신경회로망 알고리즘은 적용분야에 따른 각기 다른 알고리즘들이 사용되어 왔으며, 본 연구에서는 구조 해석에 많이 사용되고 있으며, 학습이 안정적인 것으로 평가받고 있는 backpropagation 알고리즘을 적용하였다.

해석모델의 변형률은 Fig. 1에서와 같이 계측점을 SG1에서 SG9까지 9개소로 정하였으며, 입력패턴은 해석결과에서 계산된 값을 스케일링하여 사용하였다. 은닉층의 개수는 1개에서 3개까지 가능하도록 코드를 개발하였으며, 각 은닉층 요소 갯수도 5개에서 20개까지 학습도를 비교하였다. 출력층은 1개를 각각의 신경회로망에 적용하여 하중의 중심 위치, 하중 중심점에서의 최대 처짐량, 가해진 하중량이 각각 별도 학습후 구해지도록 설정하였다.

복합재료 원통셀의 하중특성 및 처짐특성을 추론하기 위한 신경회로망의 구성도는 Fig. 10과 같다.

3.2 Backpropagation 알고리즘

신경회로망 backpropagation 알고리즘^(20, 21)의 경우, 학습도를 증진시키기 위하여, momentum backpro-

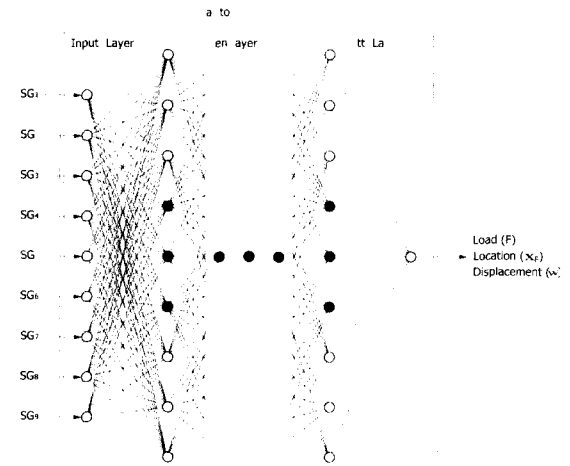


Fig. 10 Model of neural networks for identification of loads characteristics by the side strain

pagation을 많이 사용하고 있으나, 모멘텀 계수 및 학습률 값에 따라 학습도가 영향을 받는다. 본 연구에서는 학습도의 정밀성을 높이기 위하여 모멘텀 계수 및 학습률이 점진적으로 학습도에 따라 변할 수 있는 가변적 momentum backpropagation 알고리즘으로 코드를 개발 적용하였으며, 세부 알고리즘 내용은 다음과 같다.⁽²⁰⁾

Step 1. Initialize weights and counter

$v, w = \text{Small Random Value}$
 $= \text{uniform Value}$
 $= , =$

Step 2. Set learning rate

$\alpha = 0, E_{max}$

Step 3. For each training pattern pair (x, d)

Do Step 4. - 8. Until $k = p$

Step 4. Compute output by using bipolar sigmoid

$$NET_z = x_k v_k^T$$

$$z = f(NET_z) = \frac{1 - e^{-NET_z}}{1 + e^{-NET_z}}$$

$$NET_v = z^T$$

$$y = f(NET_v) = \frac{1 - e^{-NET_v}}{1 + e^{-NET_v}}$$

Step 5. Compute output error

$$E = \frac{1}{2} (d_k - y_k)^2 + E$$

Step 6. Compute error signal

$$\delta_v = \frac{1}{2} (d - y) (d - y)^2$$

$$\delta_z = \frac{1}{2} (z - 1 - z^2) \sum_{i=1}^m \delta_v w^i$$

Step 7. Update weights

$$w^{k+1} = w^k + \Delta w^k = w^k + \alpha \delta_v z^k$$

$$z^{k+1} = v^k + \Delta v^k = v^k + \alpha \delta_z x^k$$

Table 2 Input patterns by using 9 gaging points and outpur patterns of the loading characteristics

Loads (x8900) (N)	Impact point (X/L)	Disp max. (w/R)	Maximum principal strain (x100)								
			SG1	SG2	SG3	SG4	SG5	SG6	SG7	SG8	SG9
0.05	0.10	0.00388	-0.17346	0.02513	0.01551	0.00752	0.00452	0.00413	0.00513	0.00444	0.00307
	0.20	0.00528	0.08067	-0.17752	0.03021	0.01998	0.01084	0.00692	0.00575	0.00686	0.00684
	0.30	0.00624	0.04163	0.05894	-0.17715	0.03185	0.02171	0.01207	0.00696	0.00249	0.01022
	0.40	0.00683	0.01933	0.03160	0.05531	-0.17662	0.03252	0.02211	0.01170	0.00538	0.01216
	0.50	0.00703	0.01341	0.01455	0.03129	0.05427	-0.17661	0.03251	0.02177	0.01106	0.01300
	0.60	0.00683	0.01203	0.01032	0.01738	0.03126	0.05336	-0.17737	0.03236	0.02236	0.01664
	0.70	0.00624	0.00914	0.01191	0.01580	0.01797	0.03025	0.05184	-0.17870	0.03441	0.02901
	0.80	0.00528	0.00550	0.00888	0.01364	0.01481	0.01578	0.02768	0.04927	-0.17933	0.04609
	0.90	0.00388	0.00223	0.00391	0.00673	0.00896	0.00947	0.01085	0.02174	0.04280	-0.17215
0.50	0.10	0.03884	-1.73462	0.25134	0.15513	0.07519	0.04519	0.04133	0.05125	0.04436	0.03066
	0.20	0.05282	0.80667	-1.77524	0.30207	0.19980	0.10839	0.06918	0.05747	0.06860	0.06839
	0.30	0.06242	0.41629	0.58941	-1.77152	0.31848	0.21709	0.12068	0.06955	0.02488	0.10216
	0.40	0.06831	0.19328	0.31602	0.55308	-1.76618	0.32524	0.22112	0.11701	0.05384	0.12162
	0.50	0.07030	0.13410	0.14548	0.31294	0.54270	-1.76608	0.32512	0.21766	0.11061	0.13003
	0.60	0.06831	0.12031	0.10315	0.17377	0.31260	0.53360	-1.77370	0.32355	0.22363	0.16635
	0.70	0.06242	0.09145	0.11911	0.15802	0.17967	0.30248	0.51839	-1.78700	0.34414	0.29014
	0.80	0.05282	0.05500	0.08881	0.13639	0.14806	0.15778	0.27675	0.49266	-1.79334	0.46087
	0.90	0.03884	0.02235	0.03910	0.06733	0.08960	0.09473	0.10850	0.21738	0.42804	-1.72152
1.00	0.10	0.07768	-3.46924	0.50268	0.31027	0.15037	0.09038	0.08266	0.10250	0.08871	0.06133
	0.20	0.10565	1.61334	-3.55048	0.60413	0.39960	0.21679	0.13836	0.11494	0.13719	0.13679
	0.30	0.12485	0.83259	1.17882	-3.54304	0.63695	0.43418	0.24137	0.13910	0.04976	0.20431
	0.40	0.13661	0.38656	0.63205	1.10616	-3.53236	0.65048	0.44225	0.23402	0.10768	0.24324
	0.50	0.14061	0.26821	0.29096	0.62588	1.08539	-3.53215	0.65024	0.43531	0.22122	0.26007
	0.60	0.13661	0.24062	0.20630	0.34753	0.62519	1.06720	-3.54739	0.64711	0.44726	0.33270
	0.70	0.12485	0.18289	0.23821	0.31603	0.35934	0.60497	1.03678	-3.57399	0.68828	0.58027
	0.80	0.10565	0.11000	0.17762	0.27279	0.29613	0.31557	0.55351	0.98531	-3.58668	0.92175
	0.90	0.07768	0.04469	0.07821	0.13466	0.17921	0.18947	0.21701	0.43476	0.85608	-3.44304

Step 8. Increase the counter & check N_{iter}
goto step 3.

$$k = k + 1$$

$$If k = N_{iter} Then \Delta = 0.5 \Delta, a = 0.5 a$$

Step 9. Increase counter and goto step 3.

$$k = k + 1$$

Step 9. Test stop condition

$$If E < E_{min} Then Stop Else E=0 Goto Step 3.$$

3.3 신경회로망 학습결과

신경회로망의 학습데이터 준비를 위해 NASTRAN 구조해석용 데이터는 상부 절점(49개)마다 모두 충격하중의 중심점이 되도록 하였으며, 충격하중의 경우 445 N(100 lbs)에서 8,900 N (2,000 lbs)까지 445 N (100 lbs)씩 증가시켜 20개의 충격하중을 고려하였다. 따라서 신경회로망의 학습에 필요한 데이터를 마련하기 위해 총 980개의 NASTRAN 입력 데이터를 작성 계산하였으며, 그 중에서 445 N, 4,450 N, 8,900 N의 충격하중에 대한 $L/10$ 간격의 충격지점에 대한 해석 결과는 Table 2와 같다. Table 2에서 제시된 결과는 신경회로망의 학습을 위해 스케일된 자료이다. 입력 패턴으로 사용된 SG1-SG9의 계측점에서의 변형률 값은 구조해석 결과치로부터 모두 100배로 증폭하였다. 신경회로망 각각의 출력패턴으로 사용된 충격하중량, 충격지점, 최대 처짐량도 신경회로망의 적용을 위해 스케일링하였다. 충격하중의 경우 최대하중 8,900 N을 1로 하였으며, 충격지점의 경우 원통셀의 전장 L 을 1로 하였으며, 최대처짐량은 원통셀의 반경 R 을 1로 각각 normalize 하였다. 신경회로망 backpropagation 알고리즘의 경우 모멘텀 계수, 학습률에 의한 학습 정확도가 큰 영향을 받는다. 본 연구에서는 모멘텀 계수를 1.0, 학습률을 0.5로 초기값을

설정하였으며, 반복계산 10^6 마다 50 %씩 감소시켜 학습이 계속 진행하도록 하였으며, 200×10^6 까지 반복계산하여 충분한 학습이 이루어지도록 하였다.

신경회로망 backpropagation 알고리즘에서 은닉층의 수는 학습대상의 비선형 특성 정도에 따라 달라진다. 본 연구에서는 은닉층의 수를 1개~3개까지 증가시켜 학습도를 비교하였다. 또한 각 은닉층의 요소도 5개에서 20개까지 증가시켜 은닉층당 요소의 갯수에 의한 비교도 하였다. 은닉층 층수별, 은닉층당 요소수별 계산결과는 Table 3과 같다.

4. 결과분석

복합재료 원통셀의 해석모델 및 충격해석은 Christoforou의 복합재료 원통셀의 충격하중에 대한 이론해석에 제시된 해석모델을 이용하여 원통셀의 측면 변형률로부터 충격하중 특성을 추론하였다.

충격하중 중심에서의 처짐특성은 이론치와 근사하였으며, 충격위치로부터 45° 회전된 9개의 계측점에서 나타난 변형률은 인장 및 압축의 반응특성이 Figs. 7~9에 보인 바와 같이, 충격하중과 동일 원주선상의 계측점에서 압축이 심하게 나타난다.

NASTRAN을 이용한 충격해석의 결과를 신경회로망 학습의 입력패턴 및 출력패턴으로 사용하였으며, 해석모델의 49개 하중중심 지점과 20개의 하중량으로 총 980개의 해석결과를 사용하였다. 학습 정확도를 증가시키기 위하여 momentum backpropagation 알고리즘의 모멘텀 계수와 학습률의 가변 적용이 가능하도록 프로그램을 개발 및 적용한 결과 Table 3에 제시된 바와 같이 오차평균이나 오차편차가 모두 1 %이내까지 3개 출력패턴이 수렴할 수 있는 정도까지 학습이 가능하게 되었다. 학습의 횟수는 200×10^6

Table 3 Mean and standard deviation of the output layer percentage errors after learning

Output layer	1 Hidden layer			2 Hidden layer			1 Hidden layer		
	No. of layer	Mean	STD dev.	No. of layer	Mean	STD dev.	No. of layer	Mean	STD dev.
Loads	5	NA	NA	5 5	1.0041	5.7765	5 5 5	0.1652	3.1432
	10	0.0158	10.5481	10 10	0.2195	2.2923	10 10 10	0.0120	1.1018
	15	0.4569	6.4572	15 15	0.0885	1.5455	15 15 15	0.0078	0.6554
	20	0.3032	6.7670	20 20	0.0227	1.2662	20 20 20	0.0086	0.6676
Loading piong	5	NA	NA	5 5	0.5640	5.0704	5 5 5	0.3764	3.5314
	10	3.6260	11.7872	10 10	0.0427	1.6029	10 10 10	0.0674	1.0289
	15	1.4268	7.1382	15 15	0.0950	1.1019	15 15 15	0.0098	0.4863
	20	1.3474	8.8712	20 20	0.0185	0.7518	20 20 20	0.0009	0.2548
Max. disp.	5	NA	NA	5 5	1.4533	5.4512	5 5 5	1.3531	5.0440
	10	1.6473	5.7854	10 10	1.1517	4.1423	10 10 10	0.8826	3.6899
	15	1.2333	5.0128	15 15	1.0599	3.8558	15 15 15	0.9811	3.8099
	20	1.8955	6.2176	20 20	1.3965	4.4865	20 20 20	0.7927	3.2173

까지 매 10^6 마다 backpropagation의 모멘텀 계수 및 학습률을 50 %씩 감소시켜 학습을 시켰다.

Table 3에 제시된 신경회로망을 이용한 학습결과에서 알 수 있는 바와 같이 은닉층의 층수가 1인 경우는 요소수를 20개까지 증가시켜도 하중특성 3개의 오차평균이 2 %까지는 근접할 수 있으나, 오차편차는 5 % 이상으로 적용하기 곤란하며, 특히 은닉층의 요소수가 5개 이하인 경우는 학습에 실패하였다. 은닉층 2개를 적용한 결과 각 은닉층의 요소수를 5개씩 적용한 경우 오차평균은 1 % 정도, 오차편차는 여전히 5 % 이상으로 나타났다. 각 은닉층의 요소수가 15개 이상인 경우에만 오차평균 1 %이내로 학습되었고, 오차편차도 1 % 정도까지 학습되었다. 은닉층을 3개로 구성한 경우 각 은닉층의 요소수가 5개인 경우는 오차평균은 0.5 %까지 감소하나 오차평균은 3 % 정도로 학습되었다. 은닉층의 요소수가 증가할수록 학습의 정확도는 계속 증가하였고, 오차평균도 0.5 %이내로 오차편차도 0.5 %까지 정확도가 증가함을 알 수 있다. 특히 각 은닉층이 15개 이상일 경우 오차평균이 실제값으로 근접함을 알 수 있다.

은닉층의 층수가 증가할수록 학습의 정확도는 계속 증가하나 오차평균 1 %, 오차편차 1 % 정도로 학습 결과를 활용할 경우, 은닉층이 2개일 때 각 은닉층의 요소수를 15개씩, 은닉층이 3개일 때는 은닉층의 요소수를 10개로 적용하는 것이 바람직하다. 이러한 조건의 신경회로망을 구성할 경우, 충격하중량이나 충격위치의 추론은 1 %이내로 가능함을 알 수 있다.

5. 결 론

복합재료 원통셀의 충격하중에 대한 해석과 해석결과와 변형률을 이용한 backpropagation 신경회로망 알고리즘의 학습을 연구한 결과 복합재료 원통셀의 역문제 학습에 성공하였으며, 다음과 같은 결론을 얻었다.

본 연구에 적용된 variable momentum back-propagation 알고리즘은 모멘텀 계수 및 학습률을 일정한 학습단위마다 재조정이 가능하며 신경회로망 학습의 정확도를 크게 향상시킬 수 있다. 복합재료 원통셀의 충격하중에 대한 충격 하중량, 충격 위치, 최대 처짐량도 9개 계측점에서의 변형률만을 이용하여도 추론이 가능하다. 또한 복합재료 원통셀의 역문제

해석도 신경회로망을 이용한 학습후 활용 및 추론이 가능해졌다.

향후 본 연구 해석모델과 유사한 복합재료 원통셀의 하중특성 추론도 스트레인 게이지를 부착한 시험을 통한 학습을 실시해도 가능할 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

- (1) Dobyns, A. L., 1981, "Analysis of Simply Supported Orthotropic Plates Subjected to Static and Dynamic Loads", AIAA Journal, Vol. 19, No. 5, pp. 642~650.
- (2) Bert, C. W. and Birman, V., 1988, "Parametric Instability of Thick, Orthotropic, Circular Cylindrical Shells", Acta Mechanica, Vol. 71, pp. 61~76.
- (3) Christoforou, A. P. and Swanson, S. R., 1990, "Analysis of Simply Supported Orthotropic Cylindrical Shells Subjected to Lateral Impact Loads", Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 57, pp. 376~382.
- (4) Lee, Y. S. and Lee, K. D., 1997, "On the Dynamic Response of Laminated Circular Cylindrical Shells under Impulse Loads", Computers and Structures, Vol. 63, No. 1, pp. 149~157.
- (5) Gong, S. W., V. Shim, P. W., and Toh, S. L., 1996, "Central and Noncentral Normal Impact on Orthotropic Composite Cylindrical Shells", AIAA Journal, Vol. 34, No. 8, pp. 1619~1626.
- (6) Toh, S. L., Gong, S. W. and Shim, V. P. W., 1995, "Transient Stresses Generated by Low Velocity Impact on Orthotropic Laminated Cylindrical Shells", Composite Structures, Vol. 31, pp. 213~228.
- (7) Wardle, B. L. and Lagace, P. A., 1998, "Behavior of Composite Shells under Transverse Impact and Quasi-Static Loading", AIAA Journal, Vol. 36, No. 6, pp. 1065~1073.
- (8) Lahtinen, H. and Pramila, A., 1996, "Accuracy of Composite Shell Elements in Transient Analysis Involving Multiple Impacts", Computers and Structures, Vol. 59, No. 4, pp. 593~600.

- (9) Markus, S., 1988, The Mechanics of Vibrations of Cylindrical Shells, Elsevier Press.
- (10) Jones, R., 1975, Mechanics of Composite Materials, Scripta Book.
- (11) Abrate, S., 1998, Impact on Composite Structures, Cambridge University Press.
- (12) Berke, L. and Hajela, P., 1990, "Application of Artificial Neural Nets in Structural Mechanics", NASA Technical Memorandum Report 102420.
- (13) Brown, D. A., Murthy, P. L. N. and L. Berke, 1991, "Computational Simulation of Composite Ply Micromechanics Using Artificial Neural Networks", Microcomputers in Civil Engineering, Vol. 6, pp. 87~97.
- (14) Jayatheertha, C., Webber, J. P. H. and Morton, S. K., 1996, "Application of Artificial Neural Networks for the Optimum Design of a Laminated Plate", Computers and Structures, Vol. 59, No. 5, pp. 831~845.
- (15) Jenkins, W. M., 1999, "A Neural Networks for Structural Re-Analysis", Computers and Structures, Vol. 72, pp. 687~698.
- (16) Luo, H. and Hanagud, S., 1997, "Dynamic Learning Rate Neural Network Training and Composite Structural Damage Detection", AIAA Journal, Vol. 35, No. 9, pp. 1522~1527.
- (17) Haddara, M. R. and Guedes Soares, C., 1999, "Wind Loads on Marine Structures", Marine Structures, Vol. 12, pp. 199~209.
- (18) Cao, X., Sugiyama, Y. and Mitsui, Y., 1998, "Application of Artificial Neural Networks to Load Identification", Computers and Structures, Vol. 69, pp. 63~78.
- (19) Richard T. Jones, James S. Sirkis and E. J. Friebele, 1997, "Detection of Impact Location and Magnitude for Isotropic Plates Using Neural Networks", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 7, pp. 90~99.
- (20) 오창석, 1996, 뉴로컴퓨터, 지성출판사.
- (21) Cichocki, A. and Unbehauen, R., 1993, Neural Networks for Optimization and Signal Processing, John Wiley & Sons.
- (22) MSC, Patran 2000 Reference Manual, MacNeal Schwendler Corporation, 2000.
- (23) MSC, Patran 2000-MSC.Nastran Preference Guide, MacNeal Schwendler Corporation, 2000.
- (24) Lee, J. M., 1997, "Linear Static Analysis User's Guide", MacNeal Schwendler Corporation.
- (25) Blakely, K., 1997, "Basic Dynamic Analysis User's Guide", MacNeal Schwendler Corporation.
- (26) Herting, D. N., 1997, "Advanced Dynamic Analysis User's Guide", MacNeal Schwendler Corporation.
- (27) Wylie, C. R. and Barrett, L. C., 1995, Advanced Engineering Mathematics, 6th Ed. McGraw-Hill.
- (28) Spiegel, M. R., 1968, Mathematical Handbook of Formulas and Tables, McGraw-Hill.
- (29) Duffy, D. G., 1994, "Transform Methods for Solving Partial Differential Equations, CRC" Press.
- (30) Hinchey, F. A., 1984, Introduction to Applicable Mathematics, Part 2, Advanced Analysis, John Wiley & Sons.