

<논 문>

GDQM에 의한 띠판을 갖는 조립 칼럼의 좌굴 해석 Buckling Analysis of Built up Column with Stay Plates by the Generalized Differential Quadrature Method

신 영 재[†] · 김 재 호* · 정 인 식**

Young-Jae Shin, Chae-Ho Kim and In-Sik Jung

(2001년 8월 6일 접수 : 2001년 10월 17일 심사완료)

Key Words : Buckling Load(좌굴 하중), Built-up Column(조립칼럼), Stay Plate(띠판), Generalized Differential Quadrature Method(GDQM), Weighting Coefficient(가중치계수), Normalized Buckling Load Parameter(규정좌굴 하중변수), Dimensionless Stiffness Parameter(무차원 강성 변수), Dimensionless Inertia Moment Parameter (무차원 관성모멘트 변수)

ABSTRACT

In this paper, Generalized Differential Quadrature Method is applied to the buckling analysis of built-up columns without or with stay plates. Numerical analysis using GDQM is carried out for various boundary conditions (simply supported conditions, fixed conditions, fixed-simply supported conditions), dimensionless stiffness parameter and dimensionless inertia moment parameter. The accuracy and convergence of solutions are compared with exact solutions of Gjelsvik to validate the results of GDQM. Results obtained by this method are as follows, (1) This method can yield the accurate numerical solutions using few grid points. (2) The buckling load of built-up column increases as the dimensionless stiffness parameter decreases. (3) The effects of boundary conditions on the buckling load are not considerable as the dimensionless stiffness parameter increases. (4) The buckling load of built-up column increases due to the stay plate.

1. 서론

레이스(lace)가 설치된 칼럼(column)은 레이스에 의한 전단 변형(shear deformation)이 발생하기 때문에 같은 형상을 지닌 고체 칼럼(solid column)에 비해서 좌굴 하중(buckling load)이 항상 작다. 레이스가 설치된 칼럼과 다른 종류의 조립칼럼에 대한 해석은 Engesser에 의해서 소개되었다.^(1, 2) Engesser에

의한 해는 여러 경우의 조립 칼럼(built up column)에 대해서 좋은 결과를 제시해 주었다. 그러나 대부분의 조립 칼럼은 전단 변형을 줄이기 위해서 양단에 띠판(stay plate)를 설치하게 된다. 띠판은 칼럼의 전단변형을 방해함으로써 좌굴 하중을 증가시키는 역할을 한다. 양단에 설치된 띠판의 영향은 Engesser에 의해 소개된 이론으로는 설명할 수가 없다. Gjelsvik는 이러한 단점을 보완하기 위해서 양단에 띠판이 설치된 조립 칼럼에 대한 이론을 소개하였으며, Engesser의 4차 미분방정식을 6차 미분방정식으로 변형하고 경계조건을 이용하여 띠판의 영향을 고찰하였다.⁽³⁾ 또한 Paul은 웹(web)을 가진 모든 칼럼에 적용할 수 있는 이론을 제시하였다.⁽⁴⁾

경계조건과 편미분 방정식으로 표현되는 공학 문제

[†] 책임저자, 정회원, 안동대학교 기계공학부
E-mail : yjshin@andong.ac.kr
Tel : (054) 820-5435, Fax : (054) 823-5495

* 정회원, 경북대학교 기계공학부

** (주) 평화발레오 기술연구소

는 대부분 해석적 방법에 의한 해를 구하기 어려워 유한차분법(finite difference method), 유한요소법(finite element method), 유한체적법(finite volume method) 등의 수치해석 방법을 이용하여 해석한다.

또한 최근에는 유체역학 문제^(5,7)와 구조해석 문제^(8,10) 등의 편미분 방정식의 해를 구하기 위해 GDQM(generalized differential quadrature method)이 많이 적용되고 있다.

GDQM은 Bellman과 Casti⁽¹¹⁾ 등에 의해서 처음으로 소개된 수치해석 방법의 일종으로, 함수의 임의 좌표에 대한 미분값은 좌표 방향에 대한 모든 격자점(grid point)의 함수값에 가중치가 적용된 값의 합으로 표현된다는 것에 기초한다. 특히 이 방법은 초기 값 문제나 경계값 문제를 가지는 상미분이나 편미분 방정식의 해를 구하는데 유용한 방법이다.

본 논문은 GDQM을 소개하고 띠판의 유무에 따른 조립 칼럼의 좌굴 문제에 GDQM을 적용하였다. 다양한 경계조건과 무차원 변수에 대한 해의 정확성과 수렴성은 Gjelsvik⁽³⁾의 정해(exact solution)와 비교, 고찰하였으며, 조립 칼럼에서 띠판의 유무에 따른 좌굴 하중의 변화, 칼럼의 경계조건에 따른 좌굴하중의 크

기, 좌굴하중과 무차원 변수의 관계를 고찰하였다.

2. 지배방정식

Fig. 1은 띠판이 설치된 조립 칼럼의 모델을 나타내며, Fig. 2는 지배방정식을 유도할 때 사용된 좌표계로 global 좌표계($x y z$)와 두기둥에 대한 두개의 local 좌표계($x y_U z$ 와 $x y_L z$)로 구성되어 있다. 칼럼에 대한 지배방정식은 Gjelsvik⁽³⁾에 의해 제시된

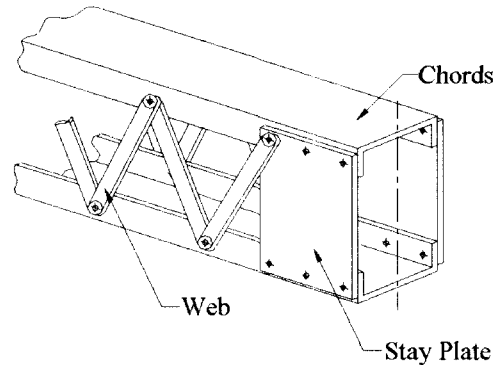


Fig. 1 Typical columns with stay plates

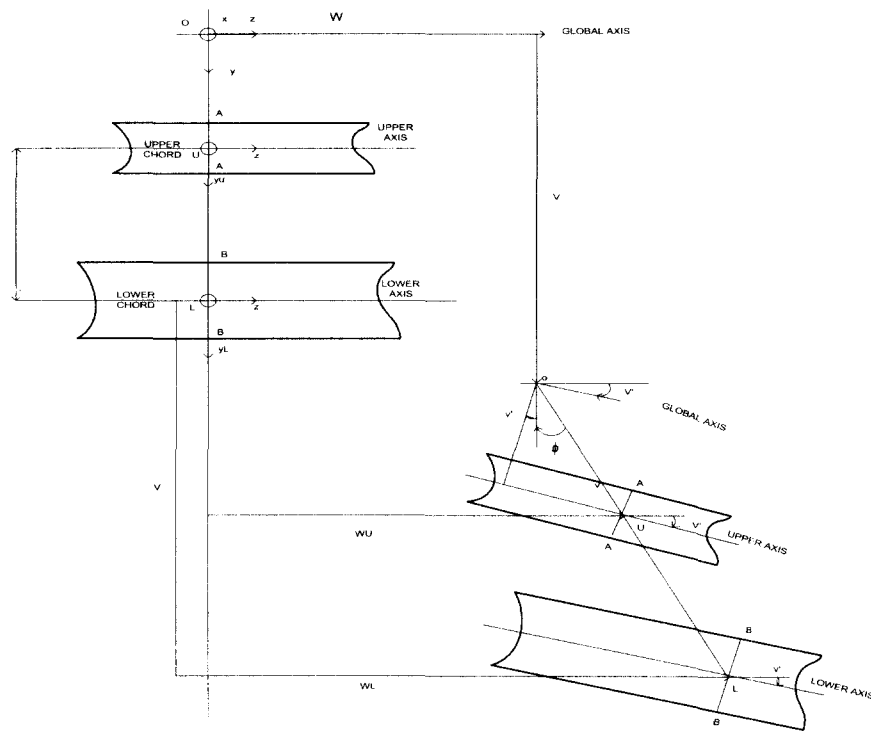


Fig. 2 Coordinates system of built up columns

가정을 이용하여 전개하였다.

Gjelsvik의 가정에 근거하여 ϕ 의 향으로 지배방정식을 유도하면 식 (1a)와 같이 표현된다.

$$-\left(\frac{EI_c EI_t}{K}\right) \phi'''' + [EI_c + EI_t(1 - \frac{P}{K})] \phi'' + P \phi' = 0 \quad (1a)$$

지배방정식 (1a)을 V 의 향으로 표현하면 다음 식과 같이 된다.

$$-\left(\frac{EI_c EI_t}{K}\right) V'''' + [EI_c + EI_t(1 - \frac{P}{K})] V'' + P V' = 0 \quad (1b)$$

또한, V 와 ϕ 의 변환관계는 식 (1c)와 같다.

$$\phi = -V' + \frac{EI_t}{K} [(-\frac{P}{K} - 1)V'' + \frac{EI_c}{K} V'''] \quad (1c)$$

여기서

- E : 칼럼의 탄성 계수
- I_t : 트러스 역할을 하는 칼럼의 관성 모멘트
- I_c : 보의 역할을 하는 칼럼의 관성 모멘트
- I : 칼럼의 관성 모멘트 (= $I_t + I_c$)
- K : 웹의 강성 계수
- P : 칼럼에 작용하는 하중
- V : 칼럼의 y 방향으로 변위
- ϕ : U 점과 L 점을 잇는 선의 양의 x 축에 대한 회전이다

6계 미분방정식의 해를 구하기 위해 필요한 6개의 경계조건은 Gjelsvik⁽⁶⁾가 제안한 방법으로 칼럼이 변형되었을 때 내부 힘에 의해서 행해지는 가상일의 해를 구한다.

내부 힘에 의한 가상일은 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{W} = \bar{Q} V + M_t \phi - M_c V' \quad (2)$$

여기서 $M_t = EI_t \phi$, $M_c = -EI_c V'$ 이다.

일반적인 경우에 대해서 각 경계조건에 대한 경계조건식은 다음과 같다.

(1) 띠판이 없는 경우

- 단순지지: $\phi' = 0, V'' = 0, V = 0$ (3a)

- 고정단: $\phi = 0, V'' = 0, V = 0$ (3b)

(2) 띠판을 갖는 경우

- 단순지지: $\phi + V' = 0, \phi' = \frac{I_c}{I_t} V'', V = 0$ (4a)

- 고정단: $\phi = 0, V' = 0, V = 0$ (4b)

무차원 변수 $\lambda = \frac{I_c}{I_t}$; $\gamma = \frac{\pi^2 EI}{KL^2}$;

$p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$; $\bar{z} = \frac{z}{L}$ 를 도입하여 지배방정식 (1b)

와 변환관계 식 (1c)를 무차원화하면

$$V'''' - 2AV'' - BV'' = 0 \quad (5a)$$

$$\phi L = -V' + CV'' + DV''' \quad (5b)$$

이고,

$$A = \frac{\pi^2}{2} \frac{(1+\lambda)^2}{\gamma\lambda} - \frac{(1+\lambda)}{\lambda} p$$

$$B = \pi^4 \frac{(1+\lambda)^2}{\gamma\lambda} p \quad \text{이다.}$$

$$C = \frac{1}{\pi^2} \frac{\lambda(p\gamma - 1)}{(1+\lambda)}$$

$$D = \frac{\lambda\gamma^2}{\pi^4(1+\lambda)^2}$$

상기 지배방정식 (1b)는 웹의 강성계수(K), 관성 모멘트(I_c)의 값에 따라 다음과 같이 분류된다.

2.1 Euler's Equation

Euler's equation은 웹의 강성계수(K)의 값이 무한히 큰 값을 가지는 경우, 즉 칼럼이 전단에 매우 강한 경우의 지배방정식으로 다음과 같이 표현된다.

$$V'''' + \eta^2 V'' = 0 \quad (6)$$

여기서 $\eta^2 = \frac{PL^2}{EI}$ 이다.

각 경계조건에 따른 경계조건식은 다음과 같다.

- 단순지지: $V = V'' = 0$ at $\bar{z} = 0, 1$ (7)

- 고정단: $V = V' = 0$ at $\bar{z} = 0, 1$ (8)

• 고정단-단순지지:

$$\begin{aligned} V=V'=0 & \quad \text{at } \bar{z}=0 \\ V=V''=0 & \quad \text{at } \bar{z}=1 \end{aligned} \quad (9)$$

2.2 Engesser's Equation

Engesser's equation은 코드(chord)의 관성모멘트 Ic가 아주 작은 경우에 대한 지배방정식으로 식 (10)과 같다.

$$V'''' + \eta^2 V'' = 0 \quad (10a)$$

$$\phi L = -V' + \frac{\gamma}{\pi^2} (p\gamma - 1) V''' \quad (10b)$$

여기서

$$\eta^2 = \frac{p\pi^2}{1-p\gamma}, \quad p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}, \quad \gamma = \frac{\pi^2 EI}{KL^2}, \quad I = I_t \text{ 이다.}$$

각 경계조건에 따른 경계 조건식은 식 (11)~(13)과 같이 나타낼 수 있다.

• 단순지지:

$$V = \phi' = 0 \quad \text{at } \bar{z} = 0, 1 \quad (11)$$

• 고정단:

$$V = \phi = 0 \quad \text{at } \bar{z} = 0, 1 \quad (12)$$

• 고정단-단순지지:

$$\begin{aligned} V = \phi = 0 & \quad \text{at } \bar{z} = 0 \\ V = \phi' = 0 & \quad \text{at } \bar{z} = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

2.3 Johnston's Equation

Johnston's equation은 웹의 강성 계수의 값(K)이 0으로서 전단강성이 전혀 없는 경우로서 Johnston에 의해 연구되었으며,⁽¹²⁾ 지배방정식은 식 (1b), (1c)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V'''' + \eta^2 V'' = 0 \quad (14a)$$

$$\phi'' L = 0 \quad (14b)$$

여기서 $\eta^2 = \frac{PL^2}{EI_c} = \frac{p\pi^2(\lambda+1)}{\lambda}$ 이다.

경계 조건에 따른 경계조건식은 다음과 같다.

(1) 띠판이 없는 경우

• 단순지지:

$$L\phi' = V'' = V = 0 \quad \text{at } \bar{z} = 0, 1 \quad (15)$$

• 고정단:

$$L\phi = V = V'' = 0 \quad \text{at } \bar{z} = 0, 1 \quad (16)$$

• 고정단-단순지지:

$$\begin{aligned} V = V'' = \phi = 0 & \quad \text{at } \bar{z} = 0 \\ V = V'' = \phi' = 0 & \quad \text{at } \bar{z} = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

(2) 띠판을 갖는 경우

• 단순지지:

$$L\phi + V' = L\phi' - \lambda V'' = V = 0 \quad \text{at } \bar{z} = 0, 1 \quad (18)$$

• 고정단:

$$L\phi = V' = V = 0 \quad \text{at } \bar{z} = 0, 1 \quad (19)$$

• 고정단-단순지지:

$$\begin{aligned} L\phi = V' = V = 0 & \quad \text{at } \bar{z} = 0 \\ L\phi + V' = L\phi' - \lambda V'' = V = 0 & \quad \text{at } \bar{z} = 1 \end{aligned} \quad (20)$$

3. Generalized Differential Quadrature Method

GDQM은 Bellman 등⁽¹¹⁾에 의해서 처음 소개되어졌으며, 기본적인 개념은 integral quadrature의 개념을 기본으로 한 함수의 임의 좌표에 대한 미분값은 좌표 방향에 대한 모든 격자점(grid points)의 함수값에 가중치가 적용된 값의 합으로 표현된다는 생각에 기초한다. 그러므로 GDQM에서 가장 중요한 것은 각 미분에 대한 가중치계수(weighting coefficients)를 구하는 것이다. 폐구간[a, b]에 대한 1차원 문제에서 n 개의 격자점은 $a = x_1, x_2, \dots, x_n = b$ 의 좌표값을 가진다. Bellman 등⁽¹¹⁾은 함수 f(x)의 1차 미분함수 $f^{(1)}(x)$ 를 다음과 같이 정의하였다.

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} f(x_j) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (21)$$

여기서 $f(x_i)$ 는 격자점 x_i 에서의 범함수값(functional value), n은 격자점의 수, $c_{ij}^{(1)}$ 은 1차 미분 값에 대한 가중치계수이다. Bellman 등⁽¹¹⁾은 함수의 1차 미분에 대한 가중치계수를 구하는 방법을 두 가지 제시하였다. 첫 번째는 시험함수(test function)를 다음과 같은 식을 사용하였다.

$$g_k(x) = x^k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

식 (22)는 n이 커질수록 가중치계수 행렬이 ill-condition 행렬이 되어서 역행렬을 구하기 어렵게 되

며 격자점의 수가 13이하에서만 적용 가능하다. 두 번째로 제시한 방법은 식 (22)의 시험함수 대신에 다음과 같은 함수를 제시하였다.

$$g_k(x) = \frac{L_n(x)}{(x-x_k)L_n^{(1)}(x_k)} \quad k=1,2,\dots,n \quad (23)$$

여기서 $L_n(x)$ 는 n 차 르잔드르 다항식(Legendre polynomial)이며 $L_n^{(1)}$ 은 $L_n(x)$ 의 1차 미분 함수이다. 식 (22)는 격자점의 좌표가 시프티드 르잔드르 다항식의 근이므로 그 위치가 항상 일정한 단점을 지니고 있다. Bellman 등⁽¹¹⁾이 제시한 방법의 단점을 보완하기 위해서 Shu⁽⁶⁾는 1차 미분값의 가중치계수를 구하는 일반화된 방법(generalized differential quadrature method)을 제시하였다. Shu는 integral quadrature의 개념에 따라 1차 미분값에 대한 가중치계수를 식 (24)와 같은 라그랑지 보간다항식(Lagrange interpolated polynomials)을 사용하여 구하였으며, 2차이상의 고차에 대한 가중치계수는 순환 관계(recurrence relationship)를 이용하여 구하였다.

$$g_k(x) = M(x)/(x-x_k)/M^{(1)}(x_k) \quad k=1,2,\dots,n \quad (24)$$

여기서

$$M(x) = \prod_{j=1}^n (x-x_j)$$

$$M^{(1)}(x_k) = \prod_{j=1, j \neq k}^n (x_k-x_j)$$

함수의 1차 미분값에 대한 가중치계수의 값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$c_{ij}^{(1)} = M^{(1)}(x_i)/(x_i-x_j)/M^{(1)}(x_j) \quad i \neq j \quad (25a)$$

$$c_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij}^{(1)} \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (25b)$$

2차 이상의 고차 미분값에 대한 가중치계수는 순환관계(recurrence relationship)를 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$c_{ij}^{(m)} = m(c_{ij}^{(m-1)} - c_{ij}^{(1)}) - \frac{c_{ij}^{(m-1)}}{x_i-x_j}$$

$$i \neq j \quad m=2,3,\dots,n-1 \quad i,j=1,2,\dots,n \quad (26a)$$

$$c_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij}^{(m)} \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (26b)$$

함수의 고차 미분값은 가중치계수를 사용하여 식

(27)과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{d^m f(x_i)}{dx^m} = \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(m)} f(x_j, t)$$

$$i=1,2,3,\dots,n \quad m=2,3,\dots,n-1 \quad (27)$$

4. Generalized Differential Quadrature Method의 적용

4.1 Euler's Equation에의 적용

지배방정식 식 (6)을 무차원화하여 GDQM을 적용하면 식 (21)과 같다.

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(4)} V_j + \eta^2 \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j = 0 \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (28)$$

각 경계조건에 따른 경계조건식은 다음과 같이 된다.

• 단순지지:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j = V_i = 0 \quad \text{at } i=1, n \quad (29)$$

• 고정단

$$V_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j = 0 \quad \text{at } i=1, n \quad (30)$$

• 고정단-단순지지

$$V_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j = 0 \quad \text{at } i=1$$

$$V_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j = 0 \quad \text{at } i=n \quad (31)$$

4.2 Engesser's Equation에의 적용

식 (10a), (10b)를 무차원화하여 GDQM을 적용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(4)} V_j + \eta^2 \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j = 0$$

$$i=1,2,3,\dots,n \quad (32a)$$

$$\phi L = - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j + \frac{\gamma}{\pi^2} (p\gamma-1) \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(3)} V_j$$

$$i=1,2,3,\dots,n \quad (32b)$$

각 경계조건의 경계조건식은 다음과 같다.

• 단순지지:

$$V_i = 0 \quad \text{at } i=1, n$$

$$- \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j + \frac{\gamma}{\pi^2} (p\gamma-1) \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(4)} V_j = 0$$

$$\text{at } i=1, n \quad (33)$$

• 고정단:

$$V_i = 0 \quad \text{at } i = 1, n$$

$$- \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j + \frac{\gamma}{\pi^2} (p\gamma - 1) \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(3)} V_j = 0 \quad \text{at } i = 1, n \quad (34)$$

• 고정단-단순지지:

$$V_i = 0 \quad \text{at } i = 1, n$$

$$- \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j + \frac{\gamma}{\pi^2} (p\gamma - 1) \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(3)} V_j = 0 \quad \text{at } i = 1$$

$$- \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j + \frac{\gamma}{\pi^2} (p\gamma - 1) \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(4)} V_j = 0 \quad \text{at } i = n \quad (35)$$

4.3 Johnston's Equation에의 적용

식 (14a), (14b)를 무차원화하여 GDQM을 적용하면 다음과 같이 표현된다

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(4)} V_j + \eta^2 \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (36a)$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} \phi_j = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (36b)$$

각 경계조건의 경계조건식은 다음과 같다.

(1) 띠편이 없는 경우

• 단순지지:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} \phi_j = \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j = V_i = 0 \quad \text{at } i = 1, n \quad (37)$$

• 고정단:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j = V_i = 0 \quad \text{at } i = 1, n \quad (38)$$

• 단순지지-고정단:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j = V_i = \phi_i = 0 \quad \text{at } i = 1$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j = V_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} \phi_j = 0 \quad \text{at } i = n \quad (39)$$

(2) 띠편을 갖는 경우

• 단순지지:

$$\phi_i L = - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j \quad \text{at } i = 1, n$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} \phi_j L = \lambda \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j \quad \text{at } i = 1, n \quad (40)$$

$$V_i = 0 \quad \text{at } i = 1, n$$

• 고정단:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j = V_i = 0 \quad \text{at } i = 1, n \quad (41)$$

• 고정단-단순지지

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j = 0 \quad \text{at } i = 1$$

$$\phi_i L = - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j \quad \text{at } i = n$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} \phi_j L = \lambda \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j \quad \text{at } i = n$$

$$V_i = 0 \quad \text{at } i = 1, n \quad (42)$$

4.4 일반적인 경우의 지배방정식에의 적용

식 (5a), (5b)에 GDQM을 적용하면

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(6)} V_j - 2A \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(4)} V_j - B \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j = 0$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (43a)$$

$$\phi_i L = - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j + C \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(3)} V_j + D \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(5)} V_j$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (43b)$$

로 되고,

경계조건의 경계조건식은 식 (3), (4)를 무차원화하여 GDQM을 적용하면 다음과 같이 된다.

(1) 띠편이 없는 경우

• 단순지지:

$$\phi_i L = - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j + C \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(4)} V_j$$

$$+ D \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(6)} V_j = 0 \quad \text{at } i = 1, n$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j = 0 \quad \text{at } i = 1, n$$

$$V_i = 0 \quad \text{at } i = 1, n \quad (44)$$

• 고정단:

$$\phi_i L = - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j + C \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(3)} V_j$$

$$+ D \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(5)} V_j = 0 \quad \text{at } i = 1, n$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j = 0 \quad \text{at } i = 1, n \quad (45)$$

$$V_i = 0 \quad \text{at } i = 1, n$$

• 고정단-단순지지:

$$\phi_i L = - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j + C \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(3)} V_j$$

$$+ D \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(5)} V_j = 0 \quad \text{at } i = 1$$

$$\begin{aligned} \phi_i L = & - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j + C \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(4)} V_j \\ & + D \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(6)} V_j = 0 \quad \text{at } i = n \\ \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j = & 0 \quad \text{at } i = 1, n \\ V_j = & 0 \quad \text{at } i = 1, n \end{aligned} \quad (46)$$

(2) 띠판을 갖는 경우

• 단순지지:

$$\begin{aligned} \phi_i L = & - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j + C \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(3)} V_j \\ & + D \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(5)} V_j = - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j \quad \text{at } i = 1, n \\ \phi_i L = & - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j + C \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(4)} V_j \\ & + D \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(6)} V_j = \lambda \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j \quad \text{at } i = 1, n \\ V_i = & 0 \quad \text{at } i = 1, n \end{aligned} \quad (47)$$

• 고정단:

$$\begin{aligned} \phi_i L = & - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j + C \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(3)} V_j \\ & + D \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(5)} V_j = 0 \quad \text{at } i = 1, n \\ \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j = & 0 \quad \text{at } i = 1, n \\ V_j = & 0 \quad \text{at } i = 1, n \end{aligned} \quad (48)$$

• 고정단-단순지지:

$$\begin{aligned} \phi_i L = & - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j + C \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(3)} V_j \\ & + D \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(5)} V_j = 0 \quad \text{at } i = 1 \\ \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j = & 0 \quad \text{at } i = 1 \\ V_j = & 0 \quad \text{at } i = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_i L = & - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j + C \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(3)} V_j \\ & + D \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(5)} V_j = - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} V_j \quad \text{at } i = n \\ \phi_i L = & - \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j + C \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(4)} V_j \\ & + D \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(6)} V_j = \lambda \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} V_j \quad \text{at } i = n \\ V_i = & 0 \quad \text{at } i = n \end{aligned} \quad (49)$$

5. 수치해석 및 고찰

GDQM을 이용한 조립 칼럼의 좌굴 문제(buckling problem)를 3가지 경계조건, 즉 단순 지지(S-S), 고정단(F-F), 고정단-단순지지(F-S)의 각 경우에 대해서 수치해석을 수행하였다. GDQM에 사용된 격자점은 비균일 간격의 아래 식을 이용하여 구하였다.

$$Z_i = \frac{z_i}{L} = \frac{1 - \cos\left(\frac{(i-1)\pi}{n-1}\right)}{2} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

3가지 경계조건, 띠판의 유무, 다양한 무차원 강성 변수(γ) 및 무차원 관성모멘트 변수(λ)에 대한 조립 칼럼의 좌굴하중은 GDQM을 이용하여 구하여 Table 1~10에 나타냈다.

Table 1~4는 3가지 경계조건에 대한 Euler's solution, Engesser's solution, Johnston's solution의 해석 결과를 도표화한 것이다. Johnston's solution은

Table 1 Comparison of buckling loads $p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$ for Euler's solution

p	Exact	GDQM
S-S	1	1
F-F	4.00007	4.00007
F-S	2.04575	2.04575

Table 2 Comparison of buckling loads $p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$ for Engesser's solution

p	$\gamma=0.25$		$\gamma=0.667$		$\gamma=1.5$		$\gamma=4$		$\gamma=10$		$\gamma=30$	
	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM
S-S	0.8	0.8	0.59988	0.59988	0.4	0.4	0.2	0.2	0.09091	0.09091	0.03226	0.03226
F-F	2.0	2.0	1.09051	1.09051	0.57143	0.57143	0.23529	0.23529	0.09756	0.09756	0.03306	0.03306
F-S	1.31030	1.30925	0.82081	0.82074	0.47262	0.47262	0.21110	0.21108	0.09215	0.09215	0.03232	0.03232

Table 3 Comparison of buckling loads $p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$ for Johnstons's solution (without stay-plates)

p	$\lambda=0.1$		$\lambda=0.5$		$\lambda=1.0$	
	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM
S-S	0.09091	0.09091	0.33333	0.33333	0.5	0.5
F-F	0.09091	0.09091	0.33333	0.33333	0.5	0.5
F-S	0.09091	0.09091	0.33333	0.33333	0.5	0.5

Table 4 Comparison of buckling loads $p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$ for Johnstons's solution (with stay-plates)

p	$\lambda=0.1$		$\lambda=0.5$		$\lambda=1.0$	
	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM
S-S	0.30195	0.30195	0.70779	0.70779	0.83405	0.83405
F-F	0.36364	0.36364	1.33334	1.33334	2.0	2.0
F-S	0.30538	0.30538	0.85050	0.85050	1.16361	1.16361

Table 5 Comparison of buckling loads $p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$ for general case of simply supported condition (without stay-plates)

λ	$\gamma=0.25$		$\gamma=0.667$		$\gamma=1.5$		$\gamma=4$		$\gamma=10$		$\gamma=30$	
	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM
0.2	0.85632	0.85632	0.70229	0.70229	0.53704	0.53704	0.35897	0.35897	0.25595	0.25595	0.19872	0.19872
0.4	0.89177	0.89177	0.76951	0.76951	0.63054	0.63054	0.47090	0.47090	0.37343	0.37343	0.31756	0.31756
0.6	0.91554	0.91554	0.81611	0.81611	0.69758	0.69758	0.55357	0.55357	0.46121	0.46121	0.40665	0.40665
0.8	0.93225	0.93225	0.84980	0.84980	0.74747	0.74748	0.61686	0.61686	0.52919	0.52919	0.47589	0.47589
1.0	0.94444	0.94444	0.87495	0.87495	0.78571	0.78571	0.66667	0.66667	0.58333	0.58333	0.53125	0.53125
1.2	0.95362	0.95362	0.89425	0.89425	0.81572	0.81573	0.70674	0.70674	0.62742	0.62742	0.57651	0.57651

Table 6 Comparison of buckling loads $p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$ for general case of simply supported condition (with stay-plates)

λ	$\gamma=0.25$		$\gamma=0.667$		$\gamma=1.5$		$\gamma=4$		$\gamma=10$		$\gamma=30$	
	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM
0.2	0.88446	0.88404	0.77840	0.77823	0.67527	0.67502	0.57372	0.57370	0.51962	0.51977	0.49117	0.49611
0.4	0.91835	0.91811	0.84683	0.84656	0.77967	0.77963	0.71626	0.71613	0.68309	0.68311	0.66570	0.66544
0.6	0.93827	0.93808	0.88497	0.88472	0.83567	0.83548	0.78940	0.78944	0.76546	0.76604	0.75293	0.75237
0.8	0.95111	0.95111	0.90904	0.90892	0.86931	0.86999	0.83355	0.83343	0.81454	0.81399	0.80459	0.80438
1.0	0.96015	0.96019	0.92570	0.92554	0.89344	0.89334	0.86293	0.86284	0.84698	0.84700	0.83860	0.83867
1.2	0.96693	0.96684	0.93772	0.93760	0.91004	0.91012	0.88388	0.88385	0.86998	0.86952	0.86265	0.86264

Table 7 Comparison of buckling loads $p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$ for general case of simply supported condition (without stay-plates)

λ	$\gamma=0.25$		$\gamma=0.667$		$\gamma=1.5$		$\gamma=4$		$\gamma=10$		$\gamma=30$	
	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM
0.2	0.85632	0.85632	0.70229	0.70229	0.53704	0.53704	0.35897	0.35897	0.25595	0.25595	0.19872	0.19872
0.4	0.89177	0.89177	0.76951	0.76951	0.63054	0.63054	0.47090	0.47090	0.37343	0.37343	0.31756	0.31756
0.6	0.91554	0.91554	0.81611	0.81611	0.69758	0.69758	0.55357	0.55357	0.46121	0.46121	0.40665	0.40665
0.8	0.93225	0.93225	0.84980	0.84980	0.74747	0.74748	0.61686	0.61686	0.52919	0.52919	0.47589	0.47589
1.0	0.94444	0.94444	0.87495	0.87495	0.78571	0.78571	0.66667	0.66667	0.58333	0.58333	0.53125	0.53125
1.2	0.95362	0.95362	0.89425	0.89425	0.81572	0.81573	0.70674	0.70674	0.62742	0.62742	0.57651	0.57651

따관의 유무에 따라 λ 의 값 0.1, 0.5, 1.0에 대해 GDQM을 이용하여 구한 해석결과는 Gjelsvik(3)의 것과 잘 일치함을 알 수 있다.

Table 5~10은 본 해석에 의한 일반적인 조립 칼럼의 경계조건에 따른 좌굴 하중을 나타낸 것이고, 무차원 변수 $\gamma = 0.25, 0.667, 1.5, 4, 10, 30$ 와 $\lambda = 0.2, 0.4, \dots, 1.0, 1.2$ 에서 수치해석을 수행하였다.

GDQM을 이용하여 구한 각각의 좌굴 하중은 상기 표에서 나타난 바와 같이 Gjelsvik(3)에 의한 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 3은 단순지지의 경계조건과 $\gamma=0.667, 4, 10$ 및 $\lambda=0.1, 0.5, 1.0$ 에 대해 수치해석시 규정 좌굴하중

$\frac{p_{GDQM}^2}{p_{exact}^2}$ 의 수렴경향 및 정도를 나타내고 있다. 여기서 p_{exact}^2 은 Gjelsvik(3)에 의한 정해이다. Fig. 3의 결과로부터 GDQM에 의한 조립 칼럼의 좌굴 하중은 격자점의 수가 증가함에 따라 잘 수렴되고 있음을 알 수 있다.

Table 8 Comparison of buckling loads $p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$ for general case of simply supported condition (without stay-plates)

λ	0.25		0.667		1.5		4		10		30	
	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM
0.2	2.48485	2.48474	1.70079	1.70033	1.22222	1.22144	0.89922	0.89556	0.76375	0.76403	0.69967	0.70051
0.4	2.80952	2.80937	2.12614	2.12574	1.68340	1.68228	1.37274	1.36740	1.23948	1.23988	1.17581	1.17704
0.6	3.03846	3.03830	2.43721	2.43677	2.02632	2.02507	1.72727	1.72118	1.59615	1.59661	1.53289	1.53431
0.8	3.20635	3.20619	2.67303	2.67259	2.29060	2.28932	2.00250	1.99613	1.87347	1.87395	1.81062	1.81210
1.0	3.33333	3.33319	2.85690	2.85647	2.50000	2.49873	2.22222	2.21583	2.09524	2.09572	2.03279	2.03429
1.2	3.43182	3.43168	3.00351	3.00310	2.66962	2.66840	2.40160	2.39532	2.27660	2.27708	2.21455	2.21604

Table 9 Comparison of buckling loads $p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$ for general case of fixed-simply supported condition (without stay-plates)

λ	0.25		0.667		1.5		4		10		30	
	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM
0.2	1.43039	1.42253	0.96846	0.96735	0.62839	0.62766	0.37338	0.37341	0.25762	0.25743	0.19881	0.19852
0.4	1.47117	1.47081	1.04608	1.04821	0.73064	0.73061	0.48808	0.48795	0.37555	0.37549	0.31768	0.31754
0.6	1.49214	1.49203	1.10151	1.10157	0.80567	0.80489	0.57330	0.57330	0.46378	0.46376	0.40679	0.40670
0.8	1.50071	1.50051	1.13862	1.13833	0.86069	0.86067	0.63895	0.63889	0.53223	0.53222	0.47607	0.47600
1.0	1.50225	1.50216	1.16484	1.16460	0.90355	0.90363	0.69105	0.69104	0.58684	0.58678	0.53147	0.53144
1.2	1.50015	1.49996	1.18348	1.18360	0.93842	0.93744	0.73319	0.73319	0.63139	0.63139	0.57676	0.57669

Table 10 Comparison of buckling loads $p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$ for general case of fixed-simply supported condition (with stay-plates)

λ	0.25		0.667		1.5		4		10		30	
	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM	Exact	GDQM
0.2	1.54321	1.54400	1.18261	1.18099	0.90284	0.90229	0.68148	0.68137	0.57861	0.57860	0.52699	0.52582
0.4	1.66928	1.66948	1.38029	1.38045	1.14452	1.14415	0.94217	0.94201	0.84019	0.84018	0.78605	0.78654
0.6	1.75118	1.75116	1.51312	1.51280	1.30722	1.30684	1.11897	1.11878	1.01803	0.93637	0.96235	0.96707
0.8	1.80853	1.80800	1.60737	1.60681	1.42476	1.42459	1.24914	1.24897	1.15012	1.08846	1.09382	1.09385
1.0	1.84977	1.84940	1.67702	1.67665	1.51388	1.51379	1.34960	1.34946	1.25302	1.20456	1.19663	1.19752
1.2	1.88057	1.88058	1.73028	1.73028	1.58362	1.58354	1.42962	1.42950	1.33573	1.29653	1.27957	1.27570

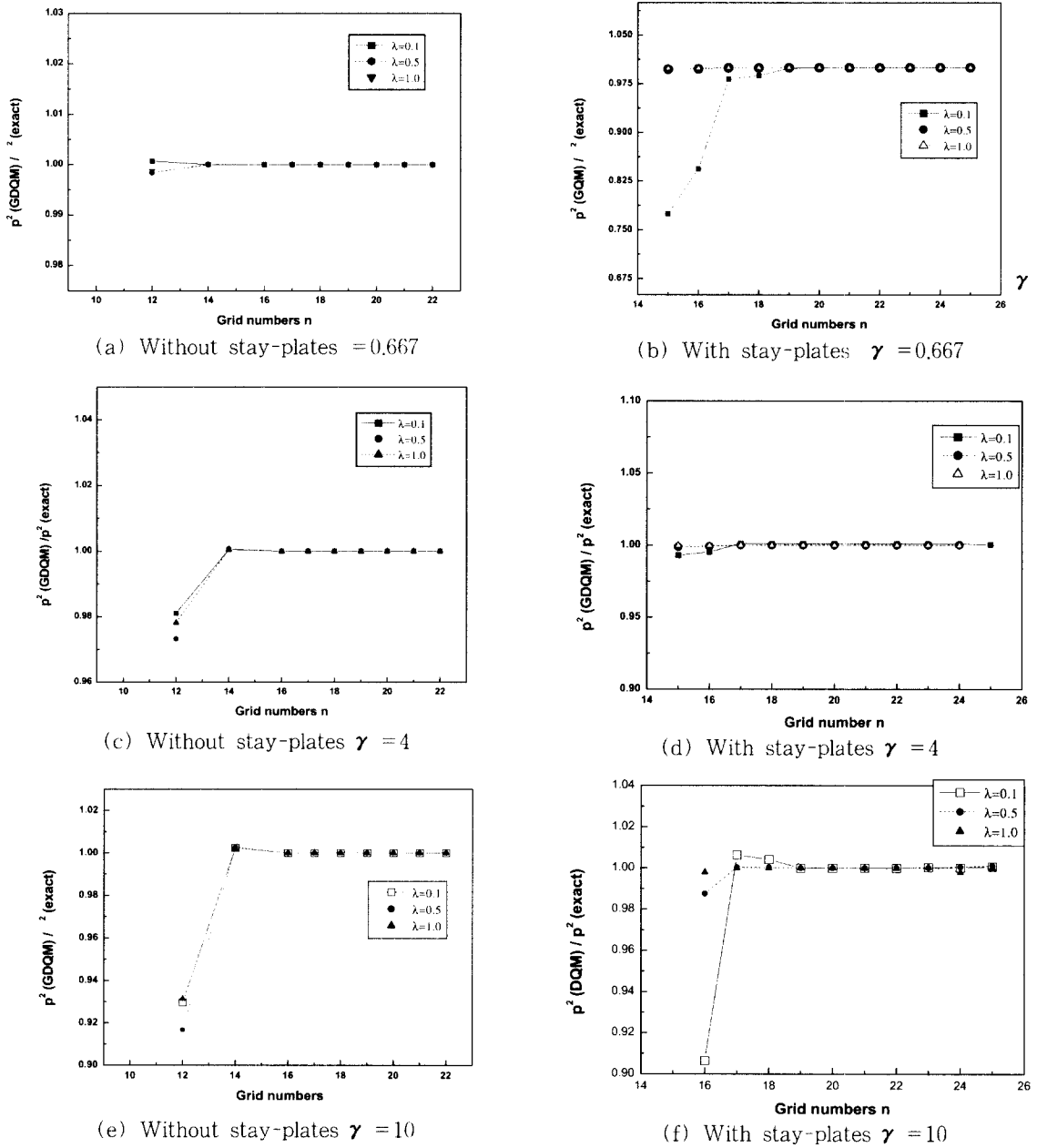


Fig 3. Convergence pattern of normalized buckling loads parameter p_{GDQM}^2/p_{exact}^2 for a simply supported conditions

띠판이 없는 조립 칼럼이 수렴된 결과를 얻기 위해서는 16개 이상의 격자점이 필요하고, 락판이 존재하는 조립 칼럼은 19개 이상의 격자점이 필요하다. 조립 칼럼의 좌굴 하중이 수렴하는 속도는 무차원 변수 γ, λ 와 경계조건에 따라 다르며, 격자점의 수가 증가

할수록 일정한 값에 수렴한다. Fig. 4는 일반적인 경우로서 각각의 경계조건에 대한 좌굴 하중의 크기를 나타내고 있다. 각 경우에서 무차원 변수 γ 값이 감소할수록 좌굴 하중이 증가함을 알 수 있다. 이것은 γ 값이 작을수록 웹의 강성(K)이 증가하여 칼럼의

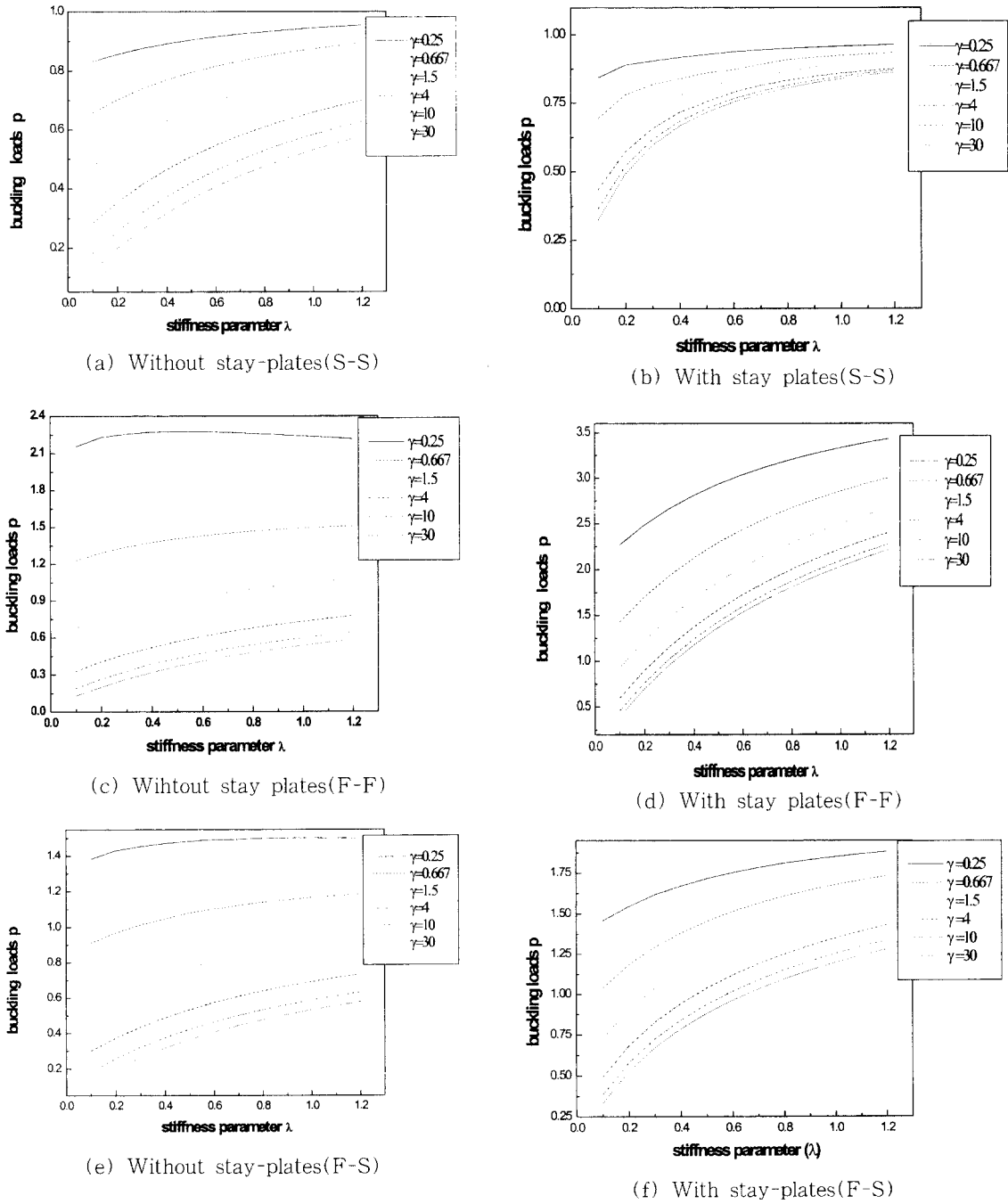
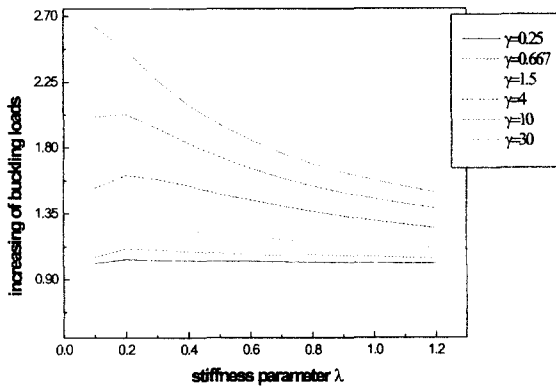


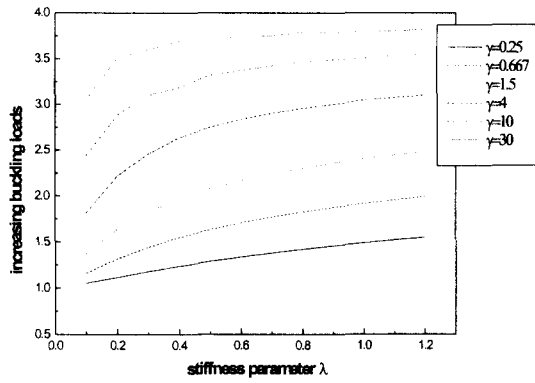
Fig 4. Buckling loads $p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$ for each boundary condition with or without stay-plates

전단 변형에 대한 저항력이 증가하기 때문이다. 그리고 일정한 γ 값에 대해서 λ 이 증가할수록 좌굴 하중이 증가한다.

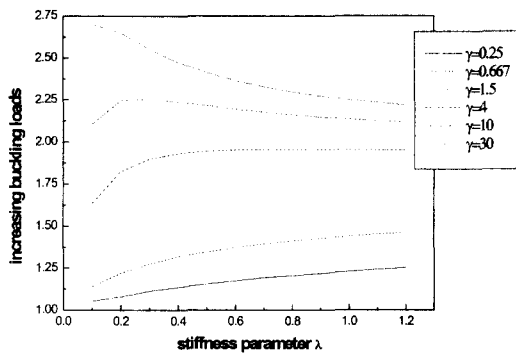
Fig. 5는 조립칼럼에서 띠판의 영향을 나타내고 있으며 조립 칼럼의 좌굴 하중이 띠판으로 인해 증가함을 알 수 있다. Fig. 5(a), (c)에서 띠판으로 인한 좌



(a) Simply supported conditions (S-S)



(b) Fixed conditions (F-F)

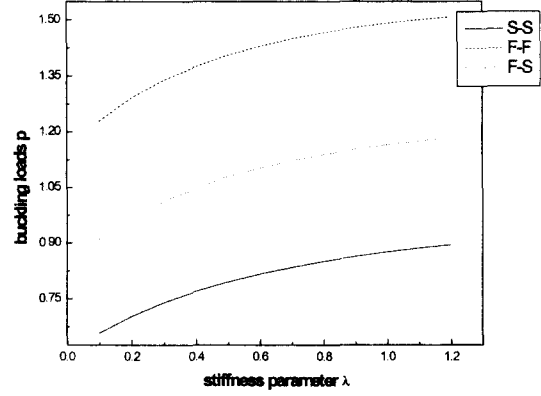


(c) Fixed-Simply supported conditions (F-S)

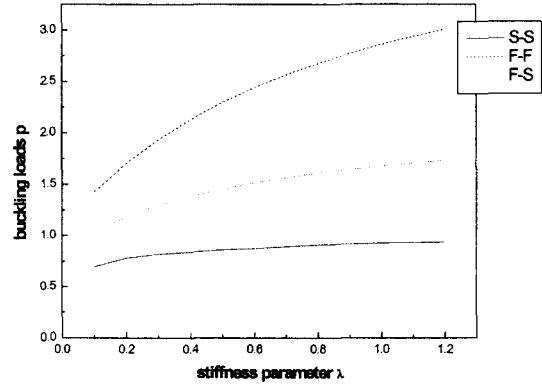
Fig. 5 Increase in buckling load $p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$ obtained from stay-plates

굴 하중의 증가량은 γ 값이 클수록, λ 값이 작을수록 커지고 있으나, Fig. 5(b)에서는 그 증가량이 γ 값이 클수록, λ 값이 클수록 증가하고 있음을 알 수 있다. Fig. 6은 γ 과 λ 값에 대한 경계조건의 영향을 보여 주고 있다. 각각의 경계조건에서 $\gamma=0.667, 4, \lambda$

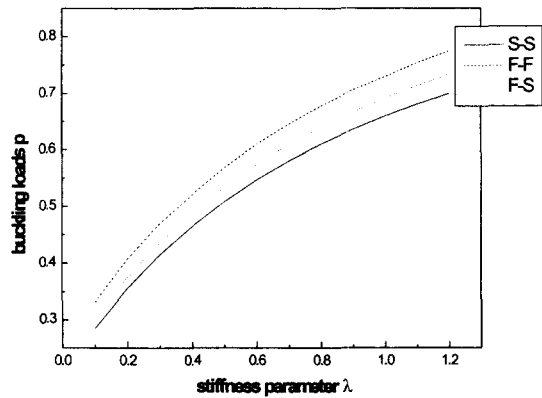
$=0.1, 0.5, 1.0$ 을 변화시켰으며 좌굴 하중은 고정단, 정단-단순지지, 단순지지의 순서로 크게 된다. Fig. 6(b)로부터 락판이 없는 조립 칼럼은 γ 값이 증가할수록 좌굴 하중은 경계조건에 따른 차이가 작음을 알 수 있다.



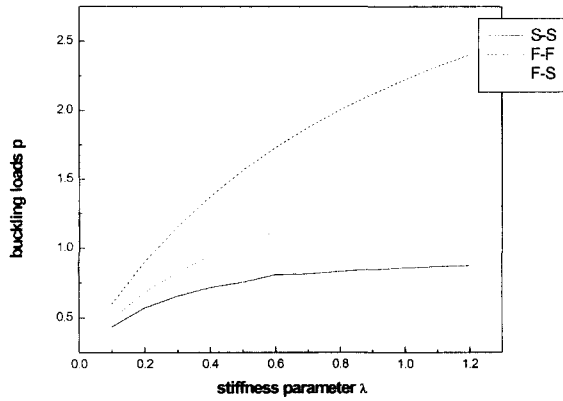
(a) Without stay-plates $\gamma = 0.667G$



(c) With stay-plates $\gamma = 0.667$



(b) Without stay-plates $\gamma = 4$



(d) With stay-plates $\gamma = 4$

Fig. 6 Comparison of buckling loads $p = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$ for each boundary condition

6. 결론

본 논문에서는 띠판의 유무에 따른 조립 칼럼의 좌굴문제에 GDQM을 적용하여 해석하였다. 고정단(F-F), 단순지지(S-S), 고정단-단순 지지(F-S)의 경계 조건과 무차원 변수 γ, λ 값의 다양한 조합에 대한 조립 칼럼의 좌굴 해석을 수행하여 얻은 결과는 다음과 같다.

- (1) GDQM은 작은 격자점으로 정확한 해를 구할 수 있다.
- (2) 띠판을 갖는 조립 칼럼의 좌굴 하중은 고정단(F-F), 고정단-단순지지(F-S), 단순지지(S-S)의 순서로 크게 된다.
- (3) 무차원 강성 변수(γ)가 작을수록 조립 칼럼의 좌굴 하중이 증가한다.
- (4) 무차원 강성 변수(γ)가 커질수록 조립 칼럼의 좌굴하중이 모든 경계조건에 따른 차이가 작아진다.
- (5) 조립 칼럼의 좌굴 하중은 띠판의 영향으로 증가한다.

참 고 문 헌

(1) Engesser, F., 1889, "Die Knickfestigkeit Gerader Stäbe," Zeitschrift des Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover, Vol. 35, p. 455(in German).

(2) Engesser, F., 1891, "Die Knickfestigkeit Gerader Stäbe," Zentralblatt der Bauverwaltung,

Vol. 11, p. 483(in German).

(3) Gjelsvik, A., 1990, "Buckling of Built-up Columns with or without Stay-plates," J. of Engineering Mechanics, Vol. 116, No. 5.

(4) Paul, M., 1995, "Buckling Loads for Built-up Columns with Stay-plates," J. of Engineering Mechanics, Vol. 121, No.11.

(5) Shu, C., and Richards, B. E., 1992, "Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations," International Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol. 15, pp. 791~798.

(6) Shu, C., 1991, "Generalized Differential - Integrated Quadrature and Application to the Simulation of Incompressible Viscous Flows Including Parallel Computation", Ph. D. Thesis, University of Glasgow, Scotland.

(7) Shu, C., Chew, Y. T., and Richards, B. E., 1995, "Generalized Differential-integral Quadrature and Their Application to Solve Boundary Layer Equations," International Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol. 21, pp. 723~733.

(8) Wang, X., Striz, A. G., and Bert, C. W., 1994, "Buckling and Vibration Analysis of Skew Plates by Differential Quadrature Method," American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal Vol. 32, pp. 886~888.

(9) Du, H., Lim, M. K., and Lin, R. M., 1995, "Application of Differential Quadrature to Vibration Analysis," Journal of Sound and Vibration, Vol. 181, pp. 279~293.

(10) Laura, P. A. A., and Gutierrez, R. H., 1994, "Analysis of Vibrating Rectangular Plates with Non-uniform Boundary Conditions by Using the Differential Quadrature Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 173, pp. 702~706.

(11) Bellman, R., Kashef, B. G., and Casti, J., 1972, "Differential Quadrature : A Technique for the Rapid Solution Nonlinear Partial Differential Equations," Journal of Computational Physics, Vol. 10, pp. 40~52.

(12) Johnston, B. G., 1971, "Spaced Steel Columns," J. Struct. Div. ASCE., Vol. 97, No. 5, p. 8109.