

확장된 블록 펄스 연산 행렬을 이용한 분포정수계의 시불변 파라미터 추정

(Identification of Time-invariant Parameters of Distributed Systems via Extended Block Pulse Operational Matrices)

김태훈* · 이 승** · 김종부***

(Tai-Hoon Kim · Seung Lee · Jong-Boo Kim)

요 약

대부분의 시스템은 그 구조가 시간과 공간에 널리 분포되어 있기 때문에 집중정수 모델로 표현하여 시스템의 동적 특성을 해석하고 제어하기에는 여러 가지 문제점들이 있다. 시스템의 상태는 시간과 공간의 영향을 받는 상태변수가 되므로 그 동적 특성은 편미분 방정식으로 표현되어 분포정수계로 모델링하게 된다.

본 연구에서는 직교 함수의 특성을 이용하여 선형 편미분 방정식으로 표현되는 분포정수계의 두 변수에 대하여 연속적으로 적분을 취하여 적분 방정식으로 변환하고, 확장된 블록 펄스 연산 행렬[3]을 도입하여 적분 방정식을 간단한 대수 방정식으로 변환하는 방법을 제시하였으며, 최소자승오차법을 이용하여 분포정수계의 파라미터들을 추정하는 알고리즘을 제안하였다.

또한 시뮬레이션을 통하여 기존의 방법을 사용하는 것보다 본 연구에서 제안하는 방법을 사용하는 것이 오차가 적음을 보였다.

Abstract

This paper considers the problem of the identification of the time invariant parameters of distributed systems. In general, the parameters are identified by using the CBPOM(Conventional Block Pulse Operational Matrices), but in this paper, the parameters are identified by using the EBPOMs(Extended Block Pulse Operational Matrices) which can reduce the burden of operation and the volume of error caused by matrices multiplication.

The simulation proves the effectiveness of the proposed method.

key words : EBPOMs, distributed systems, parameter estimation

1. 서 론

* 정회원 : 프라임 테크 선임연구원

E-mail : taihoon@netsgo.com

** 정회원 : 대임대 자동화 · 시스템과 교수 · 공박

*** 정회원 : 인덕대학 메카트로닉스과 교수 · 공박

접수일자 : 2001년 9월 13일

1차심사일 : 2001년 9월 17일

심사완료일 : 2001년 11월 2일

실제 시스템을 모델링하는 경우에는, 시스템 특성을 나타내는 상태 변수가 두 개 이상의 독립 변수로 구성되어 물리적 현상이 편미분 방정식으로 기술되는 분포정수계가 된다[1-2]. 본 연구에서는 직교 함

수의 특성을 이용하여 선형 편미분 방정식으로 표현되는 분포정수계의 두 변수에 대하여 연속적으로 적분을 취하여 적분 방정식으로 변환하고, 확장된 블록 펠스 연산 행렬[3]을 도입하여 적분 방정식을 간단한 대수 방정식으로 변환하는 방법을 제시하였으며, 최소자승오차법을 이용하여 분포정수계의 파라미터들을 추정하는 알고리즘을 제안하였다.

2. 2차원 블록 펠스 함수

2차원 블록 펠스 함수 $\psi_{i,j}(z, t)$ (단, $i=1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$)는 구간 $t=[0, T]$ 과 $z=[0, Z]$ 에서 다음의 식(2.1)처럼 정의된다[4].

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}(z, t) &= \psi_i(t)\psi_j(z) \\ &= \begin{cases} 1, & (i-1)T/m \leq t < iT/m \\ (j-1)Z/m \leq z < jZ/m \\ 0, & \text{그외구간} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

구간 $t=[0, T]$ 과 $z=[0, Z]$ 에서 적분 가능한 임의의 함수 $f(z, t)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} f(z, t) &\cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{i,j} \psi_{i,j}(z, t) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{i,j} \psi_i(t) \psi_j(z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\Psi_{(m)}(t) = [\psi_1(t) \ \psi_2(t) \ \dots \ \psi_m(t)]^T \quad (2.3-1)$$

$$\Psi_{(n)}(z) = [\psi_1(z) \ \psi_2(z) \ \dots \ \psi_n(z)]^T \quad (2.3-2)$$

단, T 는 최종 시간, T 는 전치 행렬을 의미함

이고, 여기서 f 는 함수 $f(z, t)$ 의 2차원 블록 펠스 계수 행렬이며, 다음의 식(2.4)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f &= [f_{i,j}]_{m \times n} \\ f_{i,j} &= \frac{TZ}{mn} \int_{(j-1)Z/n}^{jZ/n} \int_{(i-1)T/m}^{iT/m} f(z, t) dt dz \\ &\cong \frac{TZ}{mn} \{ f[(i-1)T/m, (j-1)Z/n] \\ &\quad + f[iT/m, (j-1)Z/n] \\ &\quad + f[(i-1)T/m, jZ/n] \\ &\quad + f[iT/m, jZ/n] \} \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. 확장된 블록 펠스 적분 연산 행렬

다음과 같이 시변 요소를 갖는 형태로 주어진 적분을 고려해본다.

$$\int_0^t \cdots \int_0^t t^j f(t) dt \cdots dt \quad (3.1)$$

(단, $i, j = 0, 1, 2, \dots$)

이러한 형태를 갖는 적분들의 블록 펠스 급수 전개는 선형 시변 시스템들의 문제를 풀 때 유용하다. 이러한 형태의 적분은 $r(t) = t^j$ 로 치환한 다음 블록 펠스 적분 연산 행렬인 P 를 써서

$$\int_0^t \cdots \int_0^t t^j f(t) dt \cdots dt \doteq E^T D_f D_r P^i \Psi_{(m)}(t) \quad (i)$$

단, $E = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$, $r^T = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_m]$ 는 $r(t)$ 의 블록 펠스 급수 계수벡터, $f^T = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_m]$ 는 $f(t)$ 의 블록 펠스 급수 계수벡터, $\Psi_{(m)}(t)$ 는 블록 펠스 함수 벡터, $D_f = \text{diag}(f_1 \ f_2 \ \dots \ f_m)$, $D_r = \text{diag}(r_1 \ r_2 \ \dots \ r_m)$

로 풀 수 있다. 그러나 위 두 식에서는 함수들의 곱과 적분이 분리되어 블록 펠스 급수로 근사화된다. 이러한 분리된 계산으로 인하여 계산량이 많아지고 더 많은 계산상의 오차가 발생하게 된다. 하지만 확장된 블록 펠스 적분 연산 행렬[3]을 사용하게 되면 이러한 단점을 피하여서 식(3.1)을 한 단계만에 블록 펠스 급수로 전개할 수 있게 된다. 먼저 식(3.1)에서, $f(t)$ 가 블록 펠스 함수 $\psi_k(t)$ 로 표시되는 특별한 경우($f(t) = \psi_k(t)$)를 생각해 본다(단, $k = 1, 2, \dots, m$).

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t t^j \psi_k(t) dt \cdots dt}_{i 번} \quad (3.2)$$

블록 펠스 함수는 자연을 갖는 단위 계단함수로 표현할 수 있으므로 다음처럼 나타낼 수 있다(단, $h = T/m$ 이다).

확장된 블록 펠스 연산 행렬을 이용한 분포정수계의 시불변 파라미터 추정

$$\begin{aligned} t^i \psi_k(t) &= t^i u(t - (k-1)h) - t^i u(t - kh) \\ &= ((t - (k-1)h) + (k-1)h)^i u(t - (k-1)h) \\ &\quad - ((t - kh) + kh)^i u(t - kh) \quad (3.3) \end{aligned}$$

식(3.3)에 이항 정리(binomial theorem)를 적용하면

$$\begin{aligned} t^i \psi_k(t) &= \sum_{q=0}^i \binom{j}{q} ((k-1)h)^{j-q} \\ &\quad \times (t - (k-1)h)^q u(t - (k-1)h) \\ &\quad - \sum_{q=0}^i \binom{j}{q} (kh)^{j-q} (t - kh)^q u(t - kh) \quad (3.4) \end{aligned}$$

이 되고, 다시 이 식에 라플라스 변환을 행하면

$$\begin{aligned} L\{t^i \psi_k(t)\} &= \sum_{q=0}^i \binom{j}{q} ((k-1)h)^{j-q} \\ &\quad \times \frac{q!}{s^{q+1}} \exp\{- (k-1)hs\} \\ &\quad - \sum_{q=0}^i \binom{j}{q} (kh)^{j-q} \frac{q!}{s^{q+1}} \exp\{- khs\} \quad (3.5) \end{aligned}$$

과 같이 된다. 위 식은 라플라스 변환의 적분 특성에 의하여

$$\begin{aligned} L\left\{\int_0^t \cdots \int_0^t t^i \psi_k(t) dt \cdots dt\right\} \\ = \sum_{q=0}^i \binom{j}{q} ((k-1)h)^{j-q} \frac{1}{s^{i+q+1}} \exp\{- (k-1)hs\} \\ - \sum_{q=0}^i \binom{j}{q} (kh)^{j-q} \frac{1}{s^{i+q+1}} \exp\{- khs\} \quad (3.6) \end{aligned}$$

와 같이 표현될 수 있다. 식(3.6)에 다시 라플라스 역 변환을 행하면

$$\begin{aligned} \int_0^t \cdots \int_0^t t^i \psi_k(t) dt \cdots dt \\ = \sum_{q=0}^i \binom{j}{q} ((k-1)h)^{j-q} \\ \frac{q!}{(i+q)!} (t - (k-1)h)^{i+q} u(t - (k-1)h) \\ - \sum_{q=0}^i \binom{j}{q} (kh)^{j-q} \frac{q!}{(i+q)!} (t - kh)^{i+q} u(t - kh) \\ = [c_{i,j,k,1} \ c_{i,j,k,2} \ \cdots \ c_{i,j,k,m}]^T \Psi_{(m)}(t) \quad (3.7) \end{aligned}$$

으로 나타낼 수 있다. 이때, 행렬의 원소 $c_{i,j,k,l}$ (단, $l = 1, 2, \dots, m$)은 다음 식으로부터 계산할 수 있다.

$$c_{i,j,k,l} = \frac{1}{h} \int_0^t \cdots \int_0^t t^i \psi_k(t) dt \cdots dt \quad ((l-1)h \leq t \leq lh) \\ = \begin{cases} \frac{(i+q)!}{q!} \sum_{q=0}^i \binom{j}{q} \frac{q!}{(i+q+1)!} (k-1)^{j-q}, & l < k \\ \frac{(i+q)!}{q!} \sum_{q=0}^i \binom{j}{q} \frac{q!}{(i+q+1)!} ((k-1)^{j-q} [(l-k+1)^{i+q+1} \\ - (l-k)^{i+q+1}] - k^{i-q} [(l-k)^{j+q+1} - (l-k-1)^{j+q+1}]), & l \geq k \end{cases} \quad (3.8)$$

식 (3.7)을 이용하여, m 개의 블록 펠스 함수 적분의 블록 펠스 급수를 다음처럼 하나의 행렬 $\mathbf{P}_{i,j}$ 로 표현할 수 있다.

$$\int_0^t \cdots \int_0^t t^i \psi_k(t) dt \cdots dt = \mathbf{P}_{i,j} \Psi_{(m)}(t) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{P}_{i,j} = \frac{j! h^{i+j}}{(i+j+1)!} \begin{pmatrix} p_{i,j,1,1} & p_{i,j,1,2} & p_{i,j,1,3} & \cdots & p_{i,j,1,m} \\ 0 & p_{i,j,2,2} & p_{i,j,2,3} & \cdots & p_{i,j,2,m} \\ 0 & 0 & p_{i,j,3,3} & \cdots & p_{i,j,3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{i,j,m,m} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$p_{i,j,k,l} = \begin{cases} 0, & l < k \\ \sum_{q=0}^i \frac{(i+q+1)!}{(j-q)!(i+q+1)!} (k-1)^{j-q}, & l = k \\ \sum_{q=0}^i \frac{(i+q+1)!}{(j-q)!(i+q+1)!} ((k-1)^{j-q} [(l-k+1)^{i+q+1} \\ - (l-k)^{i+q+1}] - k^{i-q} [(l-k)^{j+q+1} - (l-k-1)^{j+q+1}]), & l \geq k \end{cases}$$

식(3.10)의 행렬 $\mathbf{P}_{i,j}$ 는 피적분항에 t^i 항을 가진 함수의 i번 적분과 관련된 블록 펠스 적분 연산 행렬, 즉 t^i 와 관련된 i번째 확장된 적분 연산 행렬로 정의된다. 일반적으로 사용하는 블록 펠스 적분 연산 행렬(CBPO : Conventional Block Pulse Operational Matrices)은 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{1,0}$ 가 됨을 알 수 있으며, 지금까지의 결과로부터 식(3.1)의 블록 펠스 급수 전개는 다음 식처럼 한 단계로 얻어질 수 있다.

$$\int_0^t \cdots \int_0^t t^i f(t) dt \cdots dt = \mathbf{f}^T \mathbf{P}_{i,j} \Psi_{(m)}(t) \quad (ii)$$

앞의 식 (i)과 (ii)으로부터 확장된 블록 펠스 적분 연산 행렬을 사용했을 때의 장점을 다음처럼 요약할 수 있다.

[장점 1] 시변 요소인 t 를 따로 계산하지 않아도 되므로 연산량이 감소하게 된다(식 (i)과 (ii)의 비교로 알 수 있다).

[장점 2] 다중 적분을 행할 때 연산 행렬의 곱을 피할 수 있게 되므로 오차의 누적을 줄일 수 있다.

위에서 기술한 것을 다음의 예제를 통해 확인할 수 있다.

〈예제〉 구간이 $t \in [0,5]$ 이고 전개 항수가 $m=10$ 일 때, 다음의 식(3.11)로 주어진 적분

$$g(t) = \int_0^t \int_0^t t^2 e^{-t} dt dt \quad (3.11)$$

의 블록 펠스 급수를 일반적인 블록 펠스 적분 연산 행렬과 확장된 블록 펠스 적분 연산 행렬로 각각 구해본다.

(1) 일반적인 블록 펠스 연산 행렬을 이용한 방법 먼저 $f(t) = \exp(-t)$, $r(t) = t^2$ 로 놓고, 각각의 블록 펠스 급수벡터인 f 와 r 을 구한다. 그 다음 f 와 r 를 이용하여 행렬 D_f 와 D_r 을 구하여 곱하고, 행렬 P 를 제곱하여 다음 연산을 행한다.

$$\begin{aligned} g(t) &\doteq E^T D_f D_r P^2 \Psi_{(m)}(t) \\ &\doteq [0.0063 \ 0.0441 \ 0.1563 \ 0.3826 \ 0.7437 \ 1.2408 \\ &\quad 1.8620 \ 2.5895 \ 3.4029 \ 4.2837] \Psi_{(m)}(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

(2) 확장된 블록 펠스 연산 행렬을 이용한 방법 이 방법을 쓰면 앞에서 행하였던 연산 과정들이 다음처럼 한 단계로 간단해 질 수 있다.

$$\begin{aligned} g(t) &\doteq f^T P_{2,2} \Psi_{(m)}(t) \\ &\doteq [0.0008 \ 0.0207 \ 0.1084 \ 0.3096 \ 0.6466 \ 1.1210 \\ &\quad 1.7205 \ 2.4267 \ 3.2192 \ 4.0792] \Psi_{(m)}(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

이때, 주어진 함수의 실제 적분값은

$$\begin{aligned} g(t) &\doteq -6 + 2t + (6 + 4t + t^2)e^{-t} \\ &\doteq [0.0019 \ 0.0253 \ 0.1131 \ 0.3078 \ 0.6312 \ 1.0853 \\ &\quad 1.6591 \ 2.3349 \ 3.0938 \ 3.9176] \Psi_{(m)}(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

과 같이 되고, 각 경우의 결과를 비교해 보면 $P_{i,j}$ 를 사용함으로써 연산 과정이 줄어들고 정확성이 향상됨을 알 수 있다. 다음 그림 3.1은 각각의 경우의 결과를 도시하여 비교한 것이다.

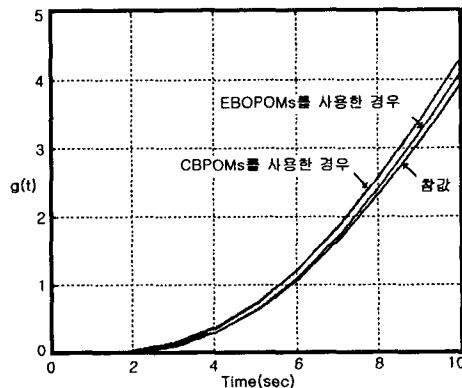


그림 3.1 예제의 결과
Fig. 3.1 The result of example

4. 분포정수계의 파라미터 추정

다음의 2차 편미분 방정식으로 표현되는 분포정수계를 고려한다[5].

$$a_6 \frac{\partial^2 v^{p_i}(z, t)}{\partial z^2} + a_5 \frac{\partial^2 v^{p_i}(z, t)}{\partial z \partial t} + a_4 \frac{\partial^2 v^{p_i}(z, t)}{\partial t^2} + a_3 \frac{\partial v^{p_i}(z, t)}{\partial z} + a_2 \frac{\partial v^{p_i}(z, t)}{\partial t} + a_1 v^{p_i}(z, t) = u^{p_i}(z, t) \quad (4.5)$$

단, $p_i(i=1, 2, \dots, 7)$ 는 정수, $a_i(i=1, 2, \dots, 6)$ 는 미지의 파라미터

이때 측정가능한 입출력 신호와, 이미 알고 있는 초기값과 경계 조건으로부터 미지의 파라미터를 추정할 수 있다.

식 (4.5)의 양변을 각각 t 와 z 에 대하여 두 번 적분하면 다음의 식(4.6)을 얻을 수가 있게 된다.

식 (4.6)의 각 함수들을 2차원 블록 펠스 급수 전개하면 다음의 식(4.7)부터 식(4.14)까지에서 보는 것과 같이 된다. 또, 다음의 식(4.15)과 식(4.16)의 관계가 성립하므로 식(4.7)부터 식(4.16)까지를 식 (4.6)에 대입하여 정리하면 식(4.17)을 얻을 수가 있다.

확장된 블록 펠스 연산 행렬을 이용한 분포정수계의 시불변 파라미터 추정

$$\begin{aligned}
& a_6 \int_0^t \int_0^t y^{b_1}(z, t) dt dt + a_5 \int_0^t \int_0^t y^{b_2}(z, t) dt dz \\
& + a_4 \int_0^t \int_0^t y^{b_3}(z, t) dz dz + a_3 \int_0^t \int_0^t \int_0^t y^{b_4}(z, t) dt dt dz \\
& + a_2 \int_0^t \int_0^t \int_0^t y^{b_5}(z, t) dt dz dz + a_1 \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t y^{b_6}(z, t) dt dt dz \\
& + \int_0^t \int_0^t e(z) dt dz dz + \int_0^t \int_0^t f(t) dt dt dz \\
& + \int_0^t \int_0^t g(z) dt dz dz - a_6 \int_0^t y^{b_1}(0, t) dt dt \\
& - a_5 \int_0^t \int_0^t y^{b_2}(0, t) dt dz - a_4 \int_0^t \int_0^t y^{b_3}(z, 0) dz dz \\
& = \int_0^t \int_0^t \int_0^t u^{b_1}(z, t) dt dt dz
\end{aligned} \tag{4.6}$$

단,

$$\begin{aligned}
e(z) &= -a_4 \left[\frac{\partial y^{b_1}(z, t)}{\partial z} \right]_{t=0} - a_2 y^{b_2}(z, 0) \\
f(t) &= -a_6 \left[\frac{\partial y^{b_2}(z, t)}{\partial z} \right]_{z=0} - a_3 y^{b_3}(0, t) \\
g(z) &= -a_5 \left[\frac{\partial y^{b_3}(z, t)}{\partial z} \right]_{t=0}
\end{aligned}$$

$$y(z, t) \cong \Psi_{(m)}^T(t) Y \Psi_{(n)}^T(z) \quad (\text{단, } Y = [y_{i,j}]_{m \times n}) \tag{4.7}$$

$$u(z, t) \cong \Psi_{(m)}^T(t) U \Psi_{(n)}^T(z) \quad (\text{단, } U = [u_{i,j}]_{m \times n}) \tag{4.8}$$

$$e(z) \cong \sum_{j=1}^n e_j \psi_j(z) = \Psi_{(m)}^T(t) \sum_{j=1}^n e_j E_{.j} \Psi_{(n)}(z) \tag{4.9}$$

$$f(t) \cong \sum_{j=1}^m f_j \psi_j(z) = \Psi_{(m)}^T(t) \sum_{j=1}^m f_j E_{i.j} \Psi_{(n)}(z) \tag{4.10}$$

$$g(z) \cong \sum_{j=1}^n g_j \psi_j(z) = \Psi_{(m)}^T(t) \sum_{j=1}^n g_j E_{.j} \Psi_{(n)}(z) \tag{4.11}$$

$$y^{b_k}(0, t) \cong \sum_{j=1}^m h_j \psi_j(z) = \Psi_{(m)}^T(t) \sum_{j=1}^m h_j E_{i.j} \Psi_{(n)}(z) \tag{4.12}$$

$$y^{b_k}(0, t) \cong \sum_{j=1}^m r_j \psi_j(z) = \Psi_{(m)}^T(t) \sum_{j=1}^m r_j E_{i.j} \Psi_{(n)}(z) \tag{4.13}$$

$$y^{b_k}(z, 0) \cong \sum_{j=1}^n s_j \psi_j(z) = \Psi_{(m)}^T(t) \sum_{j=1}^n s_j E_{.j} \Psi_{(n)}(z) \tag{4.14}$$

(단, $E_{.j}$ 와 $E_{i.j}$ 은 $m \times n$ 행렬이고, 각각 j번째 행과 i번째 열의 원소들만 1이 있고 나머지는 0인 행렬)

$$y^{b_k}(z, t) \cong \Psi_{(m)}^T(t) L_k \Psi_{(n)}(z), \quad k=1, 2, \dots, 6 \tag{4.15}$$

$$(단, \quad L_k = [l_{kij}]_{m \times n}, \quad l_{kij} = y^{b_k}_{ij})$$

$$u^{b_k}(z, t) \cong \Psi_{(m)}^T(t) L_7 \Psi_{(n)}(z) \tag{4.16}$$

$$(단, \quad L_7 = [l_{7ij}]_{m \times n}, \quad l_{7ij} = y^{b_k}_{ij})$$

$$\Psi_{(m)}^T(t) (\ P_{(m),2,0})^T L_7 (\ P_{(n),2,0}) \Psi_{(n)}(z)$$

$$\begin{aligned}
& = \Psi_{(m)}^T(t) [a_6 (\ P_{(m),2,0})^T L_6 \\
& + a_5 (\ P_{(m),1,0})^T L_5 (\ P_{(n),1,0}) \\
& + a_4 (\ P_{(n),2,0}) + a_3 (\ P_{(m),2,0})^T L_3 (\ P_{(n),1,0}) \\
& + a_2 (\ P_{(m),1,0})^T L_2 (\ P_{(n),2,0}) \\
& + a_1 (\ P_{(m),2,0})^T L_1 (\ P_{(n),2,0}) \\
& + (\ P_{(m),1,0})^T \sum_{j=1}^n e_j E_{.j} (\ P_{(n),2,0}) \\
& + (\ P_{(m),2,0})^T \sum_{i=1}^m f_i E_{i.} (\ P_{(n),1,0}) \\
& + (\ P_{(m),1,0})^T \sum_{j=1}^n g_j E_{.j} (\ P_{(n),2,0}) \\
& - a_6 (\ P_{(m),2,0})^T \sum_{i=1}^m h_i E_{i.} \\
& - a_5 (\ P_{(m),1,0})^T \sum_{i=1}^m r_i E_{i.} (\ P_{(n),1,0}) \\
& - a_4 \sum_{j=1}^n s_j E_{.j} (\ P_{(n),2,0})] \Psi_{(n)}(z) \tag{4.17}
\end{aligned}$$

식 (4.17)을 간단하게 쓰면 다음 식 (4.18)과 같고,

$$\begin{aligned}
D_6 &= a_6 D_6 + a_5 D_5 + a_4 D_4 + a_3 D_3 + a_2 D_2 + a_1 D_1 \\
& + \sum_{j=1}^n e_j D_{ej} + \sum_{i=1}^m f_i D_{fi} + \sum_{j=1}^n g_j D_{sj} + \sum_{i=1}^m h_i D_{hi} \\
& + \sum_{i=1}^m r_i D_{ri} + \sum_{j=1}^n s_j D_{sj} \tag{4.18} \\
(\text{단, } D_6 &= (\ P_{(m),2,0})^T L_6 = [d_{61} : d_{62} : \dots : d_{6m}] \\
D_5 &= (\ P_{(m),1,0})^T L_5 (\ P_{(n),1,0}) = [d_{51} : d_{52} : \dots : d_{5m}] \\
D_4 &= L_4 (\ P_{(n),2,0}) = [d_{41} : d_{42} : \dots : d_{4m}] \\
D_3 &= (\ P_{(m),2,0})^T L_3 (\ P_{(n),1,0}) = [d_{31} : d_{32} : \dots : d_{3m}] \\
D_2 &= (\ P_{(m),1,0})^T L_2 (\ P_{(n),2,0}) = [d_{21} : d_{22} : \dots : d_{2m}] \\
D_1 &= (\ P_{(m),2,0})^T L_1 (\ P_{(n),2,0}) = [d_{11} : d_{12} : \dots : d_{1m}] \\
D_{ej} &= (\ P_{(m),1,0})^T E_{.j} (\ P_{(n),2,0}) = [d_{ej1} : d_{ej2} : \dots : d_{ejm}] \\
D_{fi} &= (\ P_{(m),2,0})^T E_{i.} (\ P_{(n),1,0}) = [d_{fi1} : d_{fi2} : \dots : d_{fim}] \\
D_{sj} &= (\ P_{(m),1,0})^T E_{.j} (\ P_{(n),2,0}) = [d_{sj1} : d_{sj2} : \dots : d_{sjm}] \\
D_{hi} &= (\ P_{(m),2,0})^T E_{i.} = [d_{hi1} : d_{hi2} : \dots : d_{him}] \\
D_{ri} &= (\ P_{(m),1,0})^T E_{.j} (\ P_{(n),1,0}) = [d_{ri1} : d_{ri2} : \dots : d_{rim}] \\
D_{sj} &= E_{.j} (\ P_{(n),2,0}) = [d_{sj1} : d_{sj2} : \dots : d_{sjm}] \\
D_u &= (\ P_{(m),2,0})^T L_7 (\ P_{(n),2,0}) = [d_{u1} : d_{u2} : \dots : d_{um}] \\
\hat{h}_i &= -a_6 h_i, \quad \hat{r}_i = -a_5 r_i, \quad \hat{s}_j = -a_4 s_j, \\
i &= 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

식 (4.18)은 다시 다음 식(4.19)처럼 쓸 수 있다.

$$\Gamma = H \Theta \quad (4.19)$$

$H =$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} & \cdots & d_{n1} & \cdots & d_{nn} \\ d_{1m} & \cdots & d_{2m} & \cdots & d_{nm} & \cdots & d_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\theta = [a_1 \cdots a_n e_1 \cdots e_n f_1 \cdots f_m g_1 \cdots g_n \\ \widehat{h}_1 \cdots \widehat{h}_m \widehat{r}_1 \cdots \widehat{r}_m \widehat{s}_1 \cdots \widehat{s}_n]^T$$

$$\Gamma = [d_{11}^T : d_{12}^T : \cdots : d_{1m}^T]$$

식 (4.19)로부터 H 이 역변환 가능할 때 θ 는 다음 식으로 구할 수 있다[5].

$$\theta = (H^T H)^{-1} H^T \Gamma \quad (4.20)$$

5. 시뮬레이션

다음과 같이 2계 편미분 방정식으로 모델링되는 분포정수계를 고려한다.

$$a_1 \frac{\partial X(z, t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial z^2} + a_3 X(z, t) + U(z, t) \quad (5.1)$$

$$X(z, 0) = 0, X(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial X(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = t \cdot \exp(-t)$$

$$U(z, t) = (1 - 2t) \exp(-t) \sin(z) + z(1 - t) \sin(z) - 4t \cos(z)$$

$$X(z, t) = t(\exp(-t) + z) \sin(z)$$

입출력 데이터를 이용하여 미지의 파라미터를 추정하는 문제를 생각해 보면, 식(5.1)은 2계 편미분 방정식으로 적분 방정식으로 변환할 때 z 에 대하여 두 번, 그리고 t 에 대하여 한 번 적분을 취하여야 한다.

$$a_1 \int^z \int^t (X(z, t) - X(z, 0)) dz dt \\ = a_2 \int^t \left(X(z, t) - \int^z \frac{\partial X(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} dz - X(0, t) \right) dt \\ + a_3 \int^z \int^t X(z, t) dt dz + \int^z \int^t U(z, t) dt dz \quad (5.2)$$

식(5.2)에 있는 함수들을 2차원 블록 펄스 급수 전개하고 적분 연산 행렬을 도입하여 표시하면 되는데,

만일 본 연구에서 제안한 방법이 아닌 기존의 방법을 사용하는 경우라면 다음과 같은 결과식을 얻게 될 것이다.

$$a_1 (\mathbf{P}_{(m)}^T)^2 \mathbf{X}_{m,n} \\ = a_2 \left(\mathbf{P}_{(m)}^T \mathbf{X}_{m,n} \mathbf{P}_{(n)} - \sum_{i=1}^m f_i \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{P}_{(n)} \right) \\ + a_3 (\mathbf{P}_{(m)}^T)^2 \mathbf{X}_{m,n} \mathbf{P}_{(n)} + (\mathbf{P}_{(m)}^T)^2 \mathbf{U}_{m,n} \mathbf{P}_{(n)} \quad (5.3)$$

단, \mathbf{E}_i 는 $m \times n$ 행렬이면서 i 번째 열의 원소들만 1이고 나머지는 0인 행렬이며, $\mathbf{X}_{m,n}$ 와 $\mathbf{U}_{m,n}$ 은 2차원 블록 펄스 전개 급수이다.

식(5.3)에서 볼 수 있는 것과 같이 여기에는 다중 적분이 포함되게 되고, 이로 인하여 적분 연산 행렬인 \mathbf{P} 의 곱셈이 수행되어야 한다. 그런데, 이 적분 연산 행렬은 원래가 근사값이므로, 여러 번 적분이 될 수록 오차가 누적되는 특성을 가지고 있다. 예를 들어서 8항 전개한 일반적인 적분 연산 행렬을 네 번 곱한 경우를 보면,

$$\mathbf{P}^4 = \\ \begin{matrix} 0 & 0.0001 & 0.0005 & 0.0013 & 0.0029 & 0.0055 & 0.0093 & 0.0145 \\ 0 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0005 & 0.0013 & 0.0029 & 0.0055 & 0.0093 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0005 & 0.0013 & 0.0029 & 0.0055 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0005 & 0.0013 & 0.0029 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0005 & 0.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0005 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

과 같으며, 본 연구에서 제안하는 방식을 사용한 적분 연산 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{P}_4 = \\ \begin{matrix} 0 & 0.0001 & 0.0004 & 0.0012 & 0.0027 & 0.0052 & 0.0089 & 0.0141 \\ 0 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0004 & 0.0012 & 0.0027 & 0.0052 & 0.0089 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0004 & 0.0012 & 0.0027 & 0.0052 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0004 & 0.0012 & 0.0027 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0004 & 0.0012 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0004 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

확장된 블록 펠스 연산 행렬을 이용한 분포정수계의 시불변 파라미터 추정

식(5.3)을 본 연구에서 제안하는 확장된 적분 연산 행렬을 이용하여 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & a_1 P_{(m),2,0}^T X_{m,n} \\ &= a_2 \left(P_{(m),1,0}^T X_{m,n} P_{(n),1,0} - \sum_{i=1}^m f_i E_i \cdot P_{(n),1,0} \right) \\ &+ a_3 P_{(m),2,0}^T X_{m,n} P_{(n),1,0} + P_{(m),2,0}^T U_{m,n} P_{(n),1,0} \end{aligned} \quad (5.4)$$

이제 식(5.4)에 식(4.17)부터 식(4.20)까지의 관계를 적용하면 미지의 파라미터 a_1, a_2, a_3 를 구할 수 있다.

표 5.1 적용예에 대한 파라미터 추정값
Table 5.1 Estimated parameters of example

실제값 전개항수		a_1	a_2	a_3
		1	2	3
M=8	N=8	1.063031	1.898573	3.364763
M=8	N=16	1.034175	1.950145	3.189218
M=16	N=8	1.033914	1.958377	3.188687
M=16	N=16	1.015152	1.984621	3.095421

6. 결 론

본 연구에서는 공간 위치와 시간 영역에 고루 분포되어 있는 분포정수계의 파라미터를 추정하기 위하여 블록 펠스 함수를 적용하였으며, 입출력의 관계로부터 시스템의 구조, 즉 미지의 파라미터를 실제값에 가까운 것으로 추정하기 위하여 확장된 블록 펠스 연산 행렬을 도입하였다.

만일 일반적인 블록 펠스 연산 행렬을 사용하는 경우라면 분포정수계에 내포된 다중 적분으로 인하여 연산 행렬들이 계속 곱해질 것이고, 이로 인하여 오차의 누적이 발생하게 될 것이다. 하지만 본 연구에서 제안하는 확장된 블록 펠스 연산 행렬을 사용하면 그러한 문제를 해결할 수 있다.

따라서 분포정수계의 해석이나 설계 등에 본 연구에서 제안한 알고리즘을 사용하면 보다 정확한 실제 시스템에 가까운 모델을 추정할 수 있을 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

- [1] P. R. Clement, "Laguerre Functions in System Analysis and Parameter Identification", J. Fran. Inst., Vol. 133, pp. 85, 1982.
- [2] Paraskevopoulos, "Legendre Series Approach to Identification and Analysis of Linear Systems", IEEE Trans. Auto. Cont., Vol. 30, pp. 585, 1985.
- [3] 김태훈, 김진태, 이승, 이명규, 안두수, "확장된 블록 펠스 연산 행렬을 이용한 쌍일차계의 시변 파라미터 추정", 대한전기학회 논문지, 제50권 8호(D권), 2001.
- [4] 안두수, "직교함수와 응용", 복우출판사, 1997.
- [5] G. Strang, Linear Algebra and Its Applications, 2nd ed., Academic Press, pp. 103, 1980.

◇ 저자소개 ◇

김 태훈(金泰勳)

1971년 2월 1일 생. 1995년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1997년 성균관대학교 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 2001년 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 박사 과정 수료. 2000~현재 프라임테크 선임연구원.

이 승(李勝)

1963년 5월 12일 생. 1988년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1990년 성균관대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 2000년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1993~현재 대림대학교 자동화시스템공학과 공학부 부교수.

김 종부(金鍾夫)

1962년 5월 5일 생. 1985년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1988년 성균관대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1993년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1991년~현재 인덕대학 메카트로닉스과 교수.