韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2001, 11. 제 40권, 제 2호, 291-315.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2001, Vol. 40, No. 2, 291-315.

중학교 수학에서 증명을 위한 공리 취급에 관한 연구[1)]

김 홍 기 (단국대학교)

Ⅰ. 서 론

수학은 가능한 한 정확한 바탕으로부터 시작하여 모순이 없이 논리적으로 내용이 전개되기 때문에 여러 학문 중에서 가장 정확한 학문이라고 한다. 이와 같은 논리적인 취급의 하나로 증명을 다루게 되며 우리 나라에서는 증명이 중학교 2학년에서 처음으로 도입된다. 그런데 현행 중고등학교에서는 증명을 다루기 전에 미리 알아두어야 할 증명에 필요한 논리를 다루고 있지 않으며, 도입에 필요한 바탕들까지도 적당히 처리하고 있기 때문에 많은 문제점들이 있다.

한편, 미국의 중등학교 수학에서는 논리에 관한 내용을 다루고 공준을 도입한 후에 증명을 다루고 있으나, 우리 나라에서는 도입과 논리에 대한 아무런 언급이 없이 직관적으로 증명을 다루고 있기 때문에 이론의 연계 및 체계적인 처리가 어렵게 되어 있다.

현행 우리 나라의 교과서(제6차 교육과정 중학교 2학년 8종 교과서)에서는 증명을 도입하면서 증명이란 용어를 다음과 같이 서술하고 있다.

① 어떤 명제가 참임을 밝히는 것

② 실측이나 실험에 의하지 않고, 이미 알고 있는 옳은 사실 또는 성질들을 근거로 하여 이론적으로 어떤 명제가 참임을 밝히는 것

③ 이미 알고 있는 명제나 정의를 이용하여 어떤 명제가 참임을 밝히는 것

④ 참인 명제의 가정으로부터 기본이 되는 성질이나, 이미 옳다고 밝혀진 성질을 근거로 조리 있게 결론을 이끌어 내는 설명

⑤ 명제의 가정에서 출발하여 기본이 되는 성질이나, 이미 옳다고 밝혀진 성질을 바탕으로 조리 있게 결론을 이끌어 가는 설명

⑥ 이미 알려진 사실이나 성질 등을 이용하여 어떤 명제의 가정에서 결론을 이끌어 내는 과정을 설명하는 것

⑦ 명제의 가정으로부터 출발하여 이미 알고 있는 사실이나 확인된 옳은 성질들을 근거로 정확하게 설명하여 결론으로 이끌어 가는 일

⑧ 실험이나 경험에 따르지 않고 이미 알고 있는 옳은 사실이나 밝혀진 성질들을 이용하여 명제가 참인 이유를 설명하는 것

여기서 생각해야 할 것은 우선 증명에서 근거로 사용하는 것들은 무엇으로 어떻게 구분되는가와 다음으로 이들을 사용하여 어떻게 조리 있게 참임을 설명(또는 밝히는)하는 가인 것이다. 그런데 증명을 하기 위한 근거로 '이미 알고 있는 옳은 사실 또는 성질들, 이미 알고 있는 명제나 정의, 기본이 되는 성질이나 이미 옳다고 밝혀진 성질' 들이 어떤 것들인가에 대한 명확한 제시가 없다. 따라서 주어진 명제에 대한 증명을 시작하려고 할 때에 그 증명에 필요한 근거들을 선택해야 하는데 어떤 것들을 증명 없이 받아들여야 하는지 명확하게 판단이 서지 않는 막막한 상태가 되어 한 발도 나아갈 수 없게 되기도 한다. 이러한 이유로 증명을 처음 다룰 때에 다시 한 번 더 수학이 어려운 과목으로 부상하여 당황하게 된다.

따라서, 여기서는 증명을 하기 위하여 우선 필요로 하는 근거로 사용해야 할 '이미 알려져 있는 옳은 사실 또는 성질, 기본이 되는 성질'들을 어떻게 처리해야만 하는가에 대하여 알아보고 바람직한 방안을 제시하여 수학교육의 발전을 도모하려고 한다.

1) 이 연구는 2000학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음.
* 2001년 9월 투고, 2001년 11월 심사 완료.
* 주제어 : 공준, 공리, 증명, 정리.

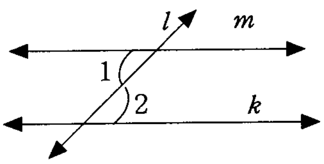
II. 교과서 분석

1. 우리 나라의 교과서

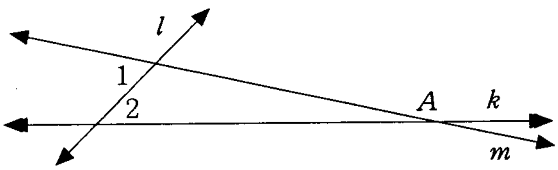
(1) 구광조 외 1인(1996)의 교과서에서는 증명에 대하여 VII 도형의 성질, 1. 삼각형의 성질, §1. 명제에서 「명제의 증명이란 무엇인가?」라는 소항목을 설정하였는데, 이 교과서에서는 우선 증명이 왜 필요한가에 대한 도입 및 예시문제가 없어 중학교 1학년에서 실측이나 실험에 의하여 밝힌 것들과 '이와 같이 어떤 명제가 참임을 밝히는 것을 증명이라고 한다.' 에서의 증명의 차이를 쉽게 구별할 수 없는 문제점이 있을 수 있다. 실제로 1학년에서 평행선의 성질은 실측 및 실험에 의해 밝힌 것인데 이것을 이곳에서 증명된 정리로 취급하고 있으므로 문제가 있을 수 있다.

위의 평행선에 대한 정리를 증명한 미국 교과서 HBJ Geometry(Ulrich, 1987)를 살펴보면 다음과 같다. 이 교과서에서는 평행선을 한 평면에서 서로 만나지 않는 직선이라 하였고, 우리 나라의 경우와는 다르게 다음 사항을 공준으로 제시한 후, 이를 이용하여 증명하고 있다.

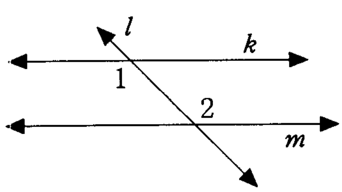
(Postulate 15 : Through a point not on a given line, there is exactly one line parallel to the given line)



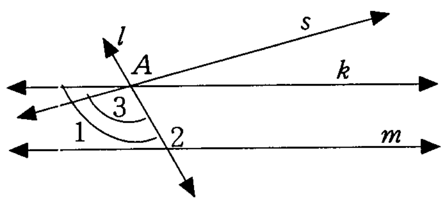
(정리) 위의 그림과 같이 직선 m, k 와 직선 l 이 만나서 $\angle 1 \cong \angle 2$ 이면 $k \parallel m$ 이다.



(증명) 직선 k가 직선 m과 평행하지 않다고 가정하자. k 와 m이 평행하지 않으면 두 직선은 한 점 A에서 만난다. $\angle 1$ 이 직선 k, m, l로 만들어진 삼각형의 한 외각이면 외각의 부등정리에 의하여 $m\angle 1 > m\angle 2$ 따라서, $m\angle 1 = m\angle 2$ 이고 $m\angle 1 \neq m\angle 2$ 이다. 이것은 모순이므로 직선 k가 직선 m과 평행하지 않다고 한 것은 거짓이다. $\therefore k \parallel m$



(정리) 위의 그림과 같이 $k \parallel m$ 인 직선 m, k 에 직선 l 이 만나면 $\angle 1 \cong \angle 2$ 이다.



(증명) $\angle 1 \ncong \angle 2$ 라고 가정하자. 공준 9에 의하여 다음 그림과 같이 한 점 A 를 지나는 직선 l, s 로 만들어지는 $\angle 3 \cong \angle 2$ 인 각 $\angle 3$이 존재한다. 따라서 위의 정리에 의하여 $s \parallel m$ 이다. 두 직선 s, k 는 점 A를 지나는 직선 m 에 평행하다. 이것은 공준 15 에 모순이므로 가정 $\angle 1 \ncong \angle 2$ 은 거짓이다. $\therefore \angle 1 \cong \angle 2$

참고 위의 증명 과정에서 외각부등식의 정리(Exterior Angle Inequality Theorem)는 다음과 같다.

'The measure of an exterior angle of a triangle is greater than the measure of either of its remote interior angles'

그리고 '앞의 예에서는 주어진 명제가 참인 것을 밝히기 위하여 가정에서 출발하여 이미 알고 있는 삼각형의 합동조건을 이용하여 결론으로 이끌어 가고 있다. 이와 같이 어떤 명제가 참임을 밝히는 것을 증명이라고 한다.' 고 하였다.

또, 용어 공준(공리)을 사용하고 있지 않기 때문에 방법이 없는 것이기는 하지만 우리가 알고 있는 명제 중에서 정리로 정한 것 중에 삼각형의 합동조건은 증명된 명

제로서 정리로 취급해야만 하는가 아니면 그냥 이미 알려진 옳은 사실로 취급해야만 하는가 하는 문제가 있다. 삼각형의 합동에 관한 명제를 Euclid의 원론에서와 같이 공준과 이미 증명된 명제들을 사용하여 증명을 한 것과 같이 증명을 하지 않고 직관적으로 1학년 과정에서 삼각형의 합동조건을 알아본 정도로 증명이 되었다고 하는 것은 증명을 정확히 이해하는데 문제가 있으리라 생각된다.

실제로 Todhunter(1979)가 편집한 Euclid의 원론 1권의 4번째 명제

「두 삼각형 $\triangle ABC$ 와 $\triangle A'B'C'$ 가
$AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$ 이면
$BC = B'C'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ 이다.」

는 잘 알고 있는 삼각형의 합동에 관한 SAS 판정법이다. Euclid는 원론에서 이 명제를 증명하였는데 이에 대하여 Greenberg(1974)는 다음과 같이 언급하였다. '그것은 포개어 놓음(superposition), 즉, 종이 위에 한 삼각형을 오려서 다른 삼각형 위에 포개어 놓는 두 삼각형을 그리는 경험으로부터 끌어낸 것이다. 이 방법은 기하에서 초보자들이 SAS 방법을 받아들이게 하는 좋은 방법이기는 하지만 그것은 증명은 아니고, Euclid도 마지못해 그것을 오직 한 개의 다른 정리에서만 사용하였다. Euclid가 그림들을 모양과 크기를 바꾸지 않고 그대로 옮겨놓을 수 있다는 것을 공리로 언급한 적이 없으므로 그것은 증명이 아니다.' 아예 Hilbert는 이와 가까운 명제 「한 삼각형의 두 변과 끼인각이 다른 삼각형의 두 변과 끼인각과 각각 합동일 때 두 삼각형은 합동이다.」를 공리로 택하고 있다(Greenberg, 1974).

그리고 당연한 것 같지만 등식에서의 성질에 대한 아무런 언급도 없이 p.205의 예제의 풀이에서 '가정에서 ①, ②가 같으므로 $\angle AOC = \angle BOD$' 라고 한 것은 이곳이 증명의 과정 단계를 설명하여 주는 곳이므로 증명 과정에서 등식의 성질(공리)을 사용한 것을 서술하지 않고 건너 뛴 것으로 생각된다.

(2) 김연식 외 1인(1996)의 교과서에서는 증명에 대하여 'Ⅶ 도형의 성질, 1. 명제와 증명, §2 정의와 정리'에서 「증명의 필요성과 그 뜻에 대하여 알아보자.」라는 소항목을 설정하였는데, 이 교과서에는 우선 실측이나 조사로는 모든 경우를 전부 확인할 수 없으므로 일반으로 이론적인 뒷받침을 바탕으로 한 증명을 도입하여야 하는 이유를 들어 증명의 필요성을 부각시켰다. 그러나 공준(공리)이라는 용어를 사용하지 않고 있으므로 '이제 「삼각형은 내각의 크기의 합이 180° 이다.」가 참임을 이미 알고 있는 사실들을 근거로 하여 밝혀 보자.' 고 하여 '참임을 이미 알고 있는 사실들'이 무엇을 뜻하는 것인지 막연한 표현을 하고 있다.

한편 '위의 방법은 이미 알고 있는 사실, 즉, 평각의 크기, 평행선의 성질, 각의 크기의 합, 등식에서의 대입 등을 이용하여 모양과 크기에 관계없이 삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 가 됨을 밝힌 것이며, 이 과정을 그림으로 나타내면 다음과 같다.' 의 내용 중에 '평각의 크기, 평행선의 성질, 각의 크기의 합, 등식에서의 대입' 등은 어떤 종류, 즉, 당연한 사실인지 또는 다시 확인이 필요한 알고 있는 사실인지에 대한 구별이 없다. 실제로 이와 같은 표현은 학생들이 증명을 하기 위하여 어떤 사실들을 어디서부터 어떻게 사용하여 증명 과정을 이끌어 나가야할지 당혹스럽게 하며, 따라서 증명의 시작부터 손을 대지 못하는 경우가 많다. 그리고 위의 내용들을 종합하여 '이와 같이 실측이나 실험에 의하지 않고, 이미 알고 있는 옳은 사실 또는 성질들을 근거로 하여 이론적으로 어떤 명제가 참임을 밝히는 것을 증명이라고 한다.' 고 하였다. 그러나, 앞에서 언급하였듯이 '이미 알고 있는 사실 또는 성질들'이 어떤 것인지 공리(공준)를 다루지 않았으므로 구체적으로 알려 줄 수 없기 때문에 그 활용에 어려움이 있을 수밖에 없고, 또, '이론적으로 어떤 명제가 참임을 밝히는 것' 은 논리를 취급하지 않았기 때문에 어떤 방법으로 하여 밝히는 것이 이론적인 것인지 납득하기 어려운 문제점이 있다. 이들 문제점을 현 교육과정에 제시된 내용 안에서 모두 극복한다는 것은 어려운 일이지만 그래도 주어진 범위 또는 가능한 한에서의 확장을 통하여 어느 정도 해소할 수 있다면 이것은 수학교육의 발전에 큰 기여를 할 수 있을 것이다. 많은 학생들이 증명이 시작되면서 특히 수학을 어렵게 생각하고 수학에서 멀어지고 있는데 그 이유 중의 하나는 위에서 언급한 것과 같이 수학에서 가장 중요한 것 중의 하나인 엄밀한 증명을 다루면서 그 시작이 너무 허술하여 오히려 혼란을 일으키는 것이 아닌 가도 생각된다.

(3) 김응태 외 3인(1996)의 교과서에서는 증명에 대하여 'V. 도형의 성질, 1. 삼각형의 성질, §1명제와 정리'에서 「정리와 증명」이라는 소항목을 설정하였는데, 이 교과서에서는 증명의 도입을 위한 예비 사항, 즉, 중학교 1학년에서 다룬 실측이나 실험에 의한 밝힌 결과들은 그 처리에 한계가 있으므로 이를 극복하여 내용의 일반화를 하기 위하여 이론적으로 참임을 밝혀야 함, 즉, 증명의 필요성을 제시하지 않았다.

특히, 공준(공리)라는 용어를 사용할 수 없으므로 용어 증명을 설명(정의)하기 위하여 '이미 알고 있는 명제'로 하여 사용하였는데 이 말은 약간 애매 모호한 감이 있다. 또, '다른 명제를 증명하는데 이용되는 참인 명제를 정리라고 한다.'고 하였고 그 보기로 1학년에서 배운 내용들을 열거하였는데 실제로 이들 중 평행선의 성질은 옳게 증명된 것이고, 그리고 제시한 것 모두가 정리들인가 하는 문제점이 있다.

'도형에 관한 정리를 증명하려면, 주어진 가정과 증명해야 할 결론이 무엇인가를 알아보고 가정과 용어의 정의, 알고 있는 정리를 이용하여 결론을 이끌어 내면 된다.'고 하였는데 '알고 있는 정리만' 이용하는 것인지 의문이 된다.

예제의 증명 과정에서 각 단계에 대한 근거를 제시하였는데 실제로 왜 그러한 과정에 의하면 증명이 된 것인지에 대한 논리적인 해명, 즉, 증명 방법에 대한 해명이 없는데(우리 나라에서는 논리를 다루지 않으므로 가능한 일이 아니다.) 이와 같은 상황은 결국 학생들로 하여금 증명을 더 어렵게 여기게 만드는 것이 아닌가 생각된다.

(4) 김호우 외 3인(1996)의 교과서에서는 증명에 대하여 'Ⅶ. 도형의 성질, 1. 삼각형의 성질, §1.이등변 삼각형의 성질'에서 다루었다. 이 교과서에서는 시작부분에서 증명의 필요성을 도입하려고 '앞에서 $\angle C$ 는 $\angle B$ 에 꼭 맞게 포개어 지므로 다음 명제가 참임을 알 수 있다. 「이등변삼각형의 밑각의 크기는 같다.」 위의 명제가 참인 이유를 설명하여 보자.'와 같이 하였는데, 이와 같이 실측에 의하여 참임을 밝힌 것으로 하고 다시 이것이 또 참인 이유를 밝혀 보자고 하여 흐름이 매끄럽지 않은 감이 있다. 그리고 앞의 교과서에서 지적한 사항과 같은 경우로 '이와 같이 어떤 참인 명제의 가정으로부터 기본이 되는 성질이나, 이미 옳다고 밝혀진 성질을 근거로 조리 있게 결론을 이끌어 내는 설명을 증명이라고 한다.'에서 우선 '기본이 되는 성질이나 이미 옳다고 밝혀진 성질'이 무엇인지 제시되지 않았고, '조리 있게 결론을 이끌어 내는 설명'이 어떤 방법의 설명인지 해설이 없다.

(5) 박두일 외 2인(1996)의 교과서에서는 증명에 대하여 'Ⅵ. 도형의 합동, 1. 삼각형의 성질, ② 이등변 삼각형의 성질'에서 「정리와 증명에 대하여 알아보자.」라는 소항목을 설정하였다. 이 교과서에서는 '위의 [물음]과 같이 실험이나 측정으로 어떤 성질을 확인 하든가 또는 예상할 수 있지만, 그것만으로는 어떤 성질이 옳다고 단정할 수는 없다.' 고 하여 우선 실험이나 측정만으로는 어떤 성질이 옳다고 단정할 수 없다고 하여 일반으로 이론적인 뒷받침을 바탕으로 한 증명이 필요함을 제시하였다.

따라서 어떤 명제가 참임을 증명하려면, '어떤 명제의 가정에서 출발하여 [1] 기본이 되는 성질이나, [2] 이미 옳다고 밝혀진 성질을 바탕으로 조리 있게 결론을 이끌어 가는 설명을 증명이라고 한다.'고 하였는데 여기서도 '기본이 되는 성질이나, 이미 옳다고 밝혀진 성질' 그리고 '조리 있게 결론을 이끌어 가는 설명' 에 대한 문제는 앞의 교과서에서 지적한 것과 같다.

(6) 박배훈 외 1인(1996)의 교과서에서는 증명에 대하여 'Ⅵ. 도형의 성질 1. 명제와 증명, §2 정리와 증명'에서 「정리와 증명」이라는 소항목을 설정하였다. 이 교과서에서는 우선 준비로 주어진 문제들이 참임을 설명하는데 어떻게 할 것인가와 그것에 연관된 학습할 내용인 증명의 도입을 위한 예비 사항, 즉, 중학교 1학년에서 다룬 실측이나 실험에 의해 밝힌 결과들은 그 처리에 한계가 있으므로 이를 극복하여 내용의 일반화를 하기 위하여 이론적으로 참임을 밝혀야 함을 제시함이 없이, 단지 1학년에서 배웠던 명제 '삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180°이다.' 에 대하여 이 명제의 가정에서 결론을 이끌어내는 과정을 설명하는 것을 제시하였다. 그리고 '이와 같이 이미 알려진 사실이나 성질 등을 이용하여 어떤 명제의 가정에서 결론을 이끌어 내는 과정을 설명하는 것을 증명' 이라고 하여 앞의 교과서에서 지적한 것과 같은 문제점을 내포하고 있다. 그리고 공리(공준)을

사용하지 않기 때문이기도 하겠지만 앞의 일부 교과서에서와 같이 '세 변의 길이가 각각 같은 삼각형은 서로 합동이다.'를 정리로 취급하고 있다.

(7) 오병승(1996)의 교과서에서는 증명에 대하여 'Ⅵ. 도형의 성질 1. 삼각형의 성질, §2 정의와 증명'에서 「❷ 증명과 정리」 라는 소항목을 설정하였다. 이 교과서는 실측이나 실험에 의해 밝힌 결과들은 그 처리에 한계가 있으므로 이를 극복하기 위하여 이론적으로 참임을 밝혀야 함을 예시하지 않고, 명제를 「p 이면 q 이다.」의 모양, 즉, $\triangle ABC$ 에서 「$\overline{AB} = \overline{AC}$ 이면 $\angle B = \angle C$ 이다.」에서 '(가정) $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ (결론) $\angle B = \angle C$ '임을 설명하고, '이 설명은 어떤 이등변삼각형에 대하여도 알맞은 것이 되므로, 명제 「이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.」라는 것은 참이다.' 라고 하였다.

그리고 '어떤 명제가 참이라는 것을, 그 명제의 가정으로부터 출발하여 이미 알고 있는 사실이나 확인된 옳은 성질들을 근거로 정확하게 설명하여 결론으로 이끌어 가는 일을 증명이라고 하고, 증명된 명제 중에서 기본이 되는 중요한 것을 정리라고 한다.' 고 하였는데 이 부분의 내용은 앞의 교과서에서 제시한 것과 같은 문제점을 내포하고 있다. 예제의 설명에서는 그 근거가 보다 명확하게 제시되었으면 도움이 되지 않았을까 생각된다.

(8) 최용준 외 1인(1996)의 교과서에서는 증명에 대하여 'Ⅶ. 도형의 합동 1. 삼각형의 성질, §2 명제와 증명'에서 「정리와 증명의 뜻을 알아보자.」라는 소항목을 설정하였다.

이 교과서는 우선 추측에 의하여 한 명제가 참임을 알아보게 하고 그 명제가 참임을 삼각형의 합동조건을

(가정)

$\overline{AM} = \overline{BM}$

$\angle AMP = \angle BMP = 90°$

↓ (옳은 사실)

$\overline{PM}$ 은 공통

↓

이용하여 밝히고 '이와 같이, 실험이나 경험에 따르지 않고 이미 알고 있는 옳은 사실이나 밝혀진 성질들을 이용하여 명제가 참인 이유를 설명하는 것을 증명이라고 한다.'고 하여 앞의 교과서에서 지적한 문제점을 그대로 내포하고 있다. 특히 여기서 '물음의 명제가 참임을 설명하는 과정을 그림으로 나타내면 다음과 같다.'고 하여 나타낸 그림에서는 앞의 그림과 같이 첫 번째 화살표는 위의 사각형의 안에 있는 내용에 의하여 두 번째 사각형의 내용이 유도되는 듯한 감을 주어 혼란스러울 수 있다.

그리고 공리(공준)을 사용하지 않기 때문이기도 하겠지만 '대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같은 두 삼각형은 합동이다.'를 정리로 취급하는 것이 바람직한 것인가? 또 참고란에 있는 내용도 어떤 것들이 기본성질인지 등 앞에서 지적한 것과 같은 문제점을 내포하고 있다.

참고로 교과서 구성의 기본이 되는 제6차 교육과정과 제7차 교육과정 및 교육과정 해설 중에서 관련된 부분을 살펴보면 다음과 같다.

제6차 교육과정(교육부, 1994)에서는 중학교 2학년 (5) 도형에서 '(가) 삼각형의 합동조건을 이용하여 간단한 도형의 성질을 증명하게 한다. (나) 두 삼각형의 닮음조건을 알아보게 하고, 이를 활용하여 도형의 성질을 증명하게 한다.'고 하였고, 4. 방법에서 '(6) 도형의 성질을 지도할 때에는 삼각형의 합동조건이나 닮음조건을 이용하여 증명 과정의 논리성에 중점을 두되, 무리하게 심화하지 않도록 한다.'고 하였으며 용어 중에는 '명제, 가정, 결론, 역, 정의, 정리, 증명'을 들었다. 그리고 제6차 교육과정 해설(교육부, 1994)에서는 증명에 관한 것을 다음과 같이 서술하고 있다.

· '수학적 추론 방법에는 귀납, 유추, 연역 등이 있으나, 여기서는 연역적 추론 방법을 학습하게 한다.'

· '수학적 추론과 관련된 용어의 뜻을 알게 하고, 증명 방법을 알게 한다. 수학적 추론의 의의와 방법을 이해시키기 위하여 먼저 명제와 역, 참, 거짓, 가정, 결론, 용어의 정의, 정리와 증명 등의 뜻을 이해하게 한다. 또, 어떤 명제가 참인 이유를 설명하는 방법을 알게 한다. 그러나 중학교에서의 증명은 엄격한 논리 전개보다는 이유를 조리 있게 설명하는 정도로 한다는 것에 유의하여 지

도한다. 어떤 정리를 증명할 때에, 가정, 결론에 대한 진술은 증명의 방향을 명백히 하기 위한 방법이므로, 증명 순서에 가정, 결론, 증명의 순으로 진술하되, 가정, 결론, 증명의 의미가 명확해지면 가정과 결론의 진술은 생략해도 무방하다. 증명을 할 때에는 다음 사항에 유의하게 한다. 즉, 가정에 제시된 내용을 모두 활용하고 있는가? 옳지 않은 성질을 쓰고 있지는 않는가? 그림의 모양만으로 어떤 결정을 내리고 있지는 않는가? 또 추론 과정을 정확하고 간결하게 표현하는 능력을 양성하는 것은 매우 중요하나, 이런 능력은 단시일 내에 달성될 수 있는 것은 아니므로, 처음에는 간단한 추론에 의하여 증명할 수 있는 것부터 기호를 이용하여 표현해 보도록 지도한다.'

제7차 교육과정(교육부,1997)에서는 <8-나 단계>의 (나) 도형에서 '① 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형에 관한 간단한 성질을 증명한다.' '① 평행선 선분 사이에 있는 선분의 길이의 비에 대한 성질을 증명하고, 이를 활용할 수 있다. ② 삼각형의 중점연결 정리를 증명하고, 이를 활용할 수 있다.'고 하였고, 교수·학습 방법에 대하여는 아. (2)에서 '… 추론은 간단한 소재로부터 복합적인 소재로 발전시켜 연역적 추론이 통합적으로 완성되도록 유의한다.'고 하였으며 용어 중에는 제6차 교육과정에서와 같이 '명제, 가정, 결론, 역, 정의, 정리, 증명'을 들었다. 그리고 제7차 교육과정 해설(교육부, 1999)에서는 6차의 경우와 같이 서술하였다.

'수학적 추론과 관련된 용어의 뜻을 알게 하고, 증명 방법을 알게 한다. 수학적 추론의 의의와 방법을 이해시키기 위하여 먼저 명제와 역, 참, 거짓, 가정, 결론, 용어의 정의, 정리와 증명 등의 뜻을 이해하게 한다. 또, 어떤 명제가 참인 이유를 설명하는 방법을 알게 한다. 그러나 중학교에서의 증명은 엄격한 논리 전개보다는 이유를 조리 있게 설명하는 정도로 한다는 것에 유의하여 지도한다. 추론 과정을 정확하고 간결하게 표현하는 능력을 양성하는 것은 매우 중요하나, 이런 능력은 단시일 내에 달성될 수 있는 것은 아니므로, 처음에는 간단한 추론에 의하여 증명할 수 있는 것부터 기호를 사용하여 표현해 보도록 지도한다.'

이들 내용을 살펴보면 증명 부분에 대한 제6차와 제7차의 경우가 차이가 없음을 알 수 있다. 그런데 논리를 조금도 취급하지 않는 교육과정에서 위에서 언급한 다음의 밑줄을 그은 부분을 교과서에서 처리하기는 쉽지가 않고 오히려 연계가 어려운 혼란을 일으킬 문제점을 내포하고 있다.

·'<u>증명 과정의 논리성에 중점을 두되</u>, 무리하게 심화하지 않도록 한다.'

·'수학적 추론과 관련된 용어의 뜻을 알게 하고, <u>증명 방법</u>을 알게 한다.'

·'중학교에서의 증명은 엄격한 논리 전개보다는 이유를 <u>조리 있게 설명</u>하는 정도로 한다는 것에 유의하여 지도한다. <u>추론 과정을 정확하고 간결하게 표현하는 능력</u>을 양성하는 것은 매우 중요하나, 이런 능력은 단시일 내에 달성될 수 있는 것은 아니므로, 처음에는 간단한 추론에 의하여 증명할 수 있는 것부터 기호를 사용하여 표현해 보도록 지도한다.'

증명과 관련하여 위의 교육과정에 따른 앞에서 살펴본 우리 나라의 현행 교과서들의 문제점들을 종합하여 분석 정리하면 다음과 같다.

증명은 실측이나 실험에 의해 밝힌 것으로부터 벗어나 이론적으로 밝혀야 함을 언급하면서도 그 관계를 예시하지 않은 교과서들이 일부 있는데, 증명이 처음 도입되는 곳에서 증명이 왜 필요한가에 대한 보다 명확한 과정을 제시하는 입장에서 이들은 보완되었으면 한다.

증명을 하기 위한 근거로 '이미 알고 있는 옳은 사실 또는 성질들, 이미 알고 있는 명제나 정의, 기본이 되는 성질이나 이미 옳다고 밝혀진 성질, 이미 알려진 사실이나 성질, 이미 알고 있는 사실이나 확인된 옳은 성질, 이미 알고 있는 옳은 사실이나 밝혀진 성질'을 들고 있는데 여기서 우선 생각해야 할 것은 증명을 하기 위하여 사용해야 할 위와 같이 서술한 근거는 어떤 것들인가에 대한 명확한 제시가 없다. 따라서 주어진 명제에 대한 증명을 시작하려고 하면 그 증명에 필요한 근거들을 선택하는데 막막한 상태가 되어 한 발도 나아갈 수 없는 상태가 되기도 한다.

그리고 위의 근거에는 공준과 정리가 구분이 되지 않고 적당히 혼합되어 있다.

중학교 1학년에서 다룬 평행선의 성질, 즉, '평행인 두 직선이 한 직선과 만나서 생기는 동위각, 엇각의 크기는 각각 같다.'는 실측(실험)에 의하여 보인 것으로 용어 정

리의 정의, 즉,
·'증명된 명제 중에서 활용이 많이 되고 기본이 되는 것을 특히 정리라 한다.'
·'증명된 명제 중에서 기본이 되는 것을 정리라 한다.'
·'증명에 의하여 옳다고 확인된 명제 중에서 기본이 되는 것이나, 앞으로 여러 가지 성질을 증명할 때 활용되는 중요한 것을 정리라 한다.'
·'증명된 명제 중에서 기본이 되는 중요한 명제를 정리라 한다.'
라는 정리의 정의에 맞지 않으며 삼각형의 합동조건도 마찬가지이다. 특히 한 교과서에서는
·'다른 명제를 증명하는데 이용되는 참인 명제를 정리라 한다.'
고 하였는데 이 경우에는 아예 공준과 정리를 구분하지 않고 사용한 문제점이 있다. 그리고 중학교 1학년에서 평행선의 성질을 사용하여 밝힌 '삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이다.' 도 그 당시에는 증명을 다루지 않았으므로 그 사정을 밝혀 정리로 사용하는 것이 바람직할 것이다.

오히려 평행선의 성질, 평행선의 성질을 이용하여 밝힌 삼각형의 내각의 합과 같이 증명에 직접 관계되는 내용들은 증명을 취급하는 곳으로 이동하는 것이 혼란을 피할 수 있어 보다 바람직할 것이고, 이와 같은 상황은 제6차 교육과정과 차이가 없는 제7차 교육과정에 의하여 집필된 <7-나 단계> 교과서 모두가 같은 경우에 해당된다.

또, Healy & Hoyles(2000)가 언급한 것과 같이 증명에서 형식적인 방법까지 다룬 후에 각 분야에서 증명을 다룬다면 증명의 본래의 목적에 맞게 다루어지겠지만 현행 교과서에서는 '증명방법', '조리 있는 설명'에 대하여 아무런 제시가 없어 많은 문제가 있으므로 이에 대한 연구도 필요한 것으로 생각된다.

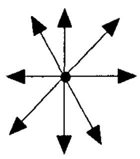
2. 미국의 교과서

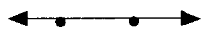
(1) Dressler & Keenam(1990)의 제9학년 교과서 Integrated Mathematics Course I 에서는 5장에서는 논리를 다루고 11장 기하에서 다음과 같은 내용들을 다루고 있다.

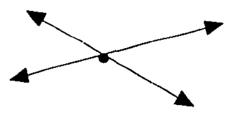
우리는 보통 어떤 단어를 그 보다 더 단순한 용어를 사용하여 정의한다. 그리고 이 더 단순한 용어는 그 보다 더 단순한 한 개 또는 그 이상의 용어들을 사용하여 정의될 수 있다. 그런데 이러한 과정은 끝없이 계속 될 수는 없고, 정의는 그 뜻이 모든 사람들에게 명백하게 받아들여지는 용어를 사용하여야만 할 때가 오게 된다. 그 뜻은 정의 없이 받아들여지므로 그와 같은 용어를 무정의 용어(undefined term)라고 한다. 기하에서 점, 선 면과 같은 용어들이 이에 해당된다.

증명 없이 참으로 받아들이는 명제를 공리(axiom) 또는 공준(postulate)라고 한다. 직선에 관한 다음의 세 명제는 공준의 보기들인데 관련된 그림들을 보면 이들 명제들을 공준으로 받아들이는 것이 타당함을 알 수 있을 것이다.

1. 한 평면 위에서 한 점을 지나는 직선은 무수히 많이 그릴 수 있다.
2. 주어진 두 점을 품는 직선은 오직 한 개만 그릴 수 있다.
3. 서로 다른 두 직선은 오직 한 점에서만 만날 수 있다.


<그림 1>


<그림 2>


<그림 3>

이 교과서에서는 앞의 5장 논리(pp.119-184)에서 '1. 문장, 명제, 진리값 2. 부정과 기호, 3. 합접, 4. 이접, 5. 조건문, 6. 합성명제와 진리값, 7. 합성명제와 진리표, 8. 쌍조건문, 9. 항진명제, 10. 역, 이, 대우' 등을 다루었지만 증명은 다루고 있지 않다. 그리고 이 교과서에서는 평행선의 성질을 다음과 같이 공준으로 받아들이고 있다.

'We will accept, without proof, the following postulate:

■ *If two parallel lines are cut by a transversal, then the alternate interior angles that are formed have equal measures, that is, they are congruent.*"

(2) Dressler & Keenam(1990)의 교과서 Integrated Mathematics Course Ⅱ에서는 2 장에서는 '논리'를 다루고, '3장 기하에서의 명제의 증명'에서 공리를 다음과 같이 정의하고 24개의 공리를 예로 들어가면서 소개하였으며, 다음 단원부터는 증명의 취급에서 공리의 사용을 밝혔다.

' 추론에 있어서 참인 결론에 이르기 위하여는 전제가 참인 명제를 취해야 한다. 때로는 무정의 용어도 정의도 아닌 명제로 참으로 알려져 있는 명제들이 있다. 기하에서 참인 명제는 두 가지 형태가 있다. 하나는 공리(또는 공준), 다른 하나는 정리라고 한다. 공리(또는 공준)는 아무런 증명 없이 참으로 받아들이는 명제이다. 이때 증명 없이 참임을 받아들이는 일반적인 명제를 공리, 기하학적인 명제를 공준이라고 하는 사람도 있다. 이 책에서는 이들 두 가지 형태(공리, 공준)를 함께 공리라 하여 사용한다.

〈정의〉 공리는 그것이 참임을 증명 없이 받아들이는 명제이다.

공리 체계에서 무정의 용어, 정의된 용어, 공리는 이들에 따르는 학문의 전개의 기본 바탕이다. 공리들은 추론의 법칙과 함께 정리라고 하는 새로운 명제의 참을 증명하는 수단이 되었다.

〈정의〉 정리란 연역적 추론에 의해 증명되는 명제이다.

공리적인 사고는 기하에서 연역을 하는데 사용되는 도구로서 다음과 같은 이유로 강력한 기교이다.

1. 공리적인 사고는 관측과 측정이 실제적이거나 가능하지 않은 상황에서 결론에 도달할 수 있도록 한다.

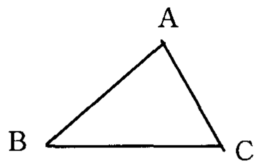
2. 관측과 측정은 어떠한 사실을 발견하는데 도움을 줄 수는 있지만 결코 그 사실의 참에 대한 이유를 설명하지 못한다. 공리적 사고는 결론에 도달하는데 사용된 추론이 왜 타당 한지 또는 타당하지 않은지를 설명한다.

3. 공리적 체계에서 기하로 알려진 전 지식(학문)은 새로운 정리들을 계속하여 증명함으로써 발견되고 설명되어질 수 있다. 이들 정리들은 무정의 용어와 참이라고 알려진 이를테면 정의, 공준, 이미 증명된 정리들과 같은 명제들에 추론 법칙을 사용하여 증명된다.

그리고 다음 절에서는 공준들과 그들을 사용한 결론의 증명의 보기를 들었는데 일부를 살 펴보면 다음과 같다.

상등의 반사성 : $a = a$

공준1 : 한 양은 자기 자신과 같다.



예: $\triangle ABC$에서

1.선분의 길이는 그 자신과 같다.

$AB = AB \quad BC = BC \quad AC = AC$

2. 각의 크기는 그 자신과 같다.

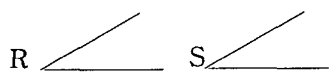
$m\angle A = m\angle A \quad m\angle B = m\angle B \quad m\angle C = m\angle C$

상등의 대칭성 : $a = b$ 이면 $b = a$ 이다

공준 2 : 상등은 어떤 순서로 나타내어도 된다.

예 : $AB = CD$ 이면 $CD = AB$ 이다.

$m\angle R = m\angle S$ 이면 $m\angle S = m\angle R$ 이다.



상등의 추이성 : $a = b$ 이고 $b = c$ 이면 $a = c$ 이다

공준 3 : 한 같은 양에 같은 양들은 서로 같다.

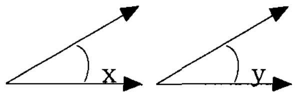
위의 공준을 사용하여 명제의 증명에 대한 보기를 들었

고 또 계속 공준들을 도입하며 그들을 사용한 증명을 다루었는데 처음의 보기를 보이면 다음과 같다.

보기 1

가정 : $m\angle x = 40$

$m\angle y = 40$



결론 : $m\angle x = m\angle y$

명제	논거
1. $m\angle x = 40$	1. 주어진 명제
2. $m\angle y = 40$	2. 주어진 명제
3. $40 = m\angle y$	3. 공준 2(상등의 대칭성)
4. $m\angle x = m\angle y$	4. 공준 3(상등의 추이성)

이 교과서에서는 앞의 2장 논리(pp.34-pp.97)에서 '1. 논리의 필요, 2. 문장, 명제, 진리값, 3. 논리에서 연결사, 4. 진리표, 항진명제, 논리적으로 동치인 명제, 5. 분리법칙, 6. 대우법칙, 논리에서 증명, 7. 부정식 법칙, 8. 유효하지 않은 논증, 9. 연쇄법칙. 10. 이접 추론의 밥칙, 11. 부정과 드 몰간의 법칙, 12. 간략, 합접, 이접합의 법칙, 13. 논리적 증명의 연습' 등을 다룬 후에 증명을 다루면서 공준을 사용하므로 그 내용의 전개에 문제가 없이 잘 구성되어 있다.

그리고 이후에 Integrated Mathematics Course I 에서 공준으로 받아들였던 평행선의 성질을 증명하였다.

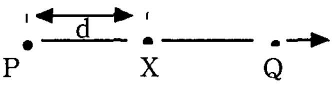
(3) Rising 외 4인(1985)의 교과서 Unified Mathematics 2에서는 '1장 실수의 성질'에서 '이 장에서 성질은 공준(증명 없이 참으로 받아드린 명제) 또는 정리(증명될 수 있는 명제)들이다.' 라고 시작 부문에서 공준이라는 용어를 사용하였으며 '3장 기하와 증명'의 '2절 공준과 정리'에서 다음과 같이 다루고 있다.

공준(postulate) 또는 공리(axiom)란 증명 없이 받아들이는 명제이다. 공준에 대한 가장 주요한 요구는 다른 공준과 모순이 되지 않는 것이다. 당연히 공준으로 모든 명백히 참인 것을 말할 수 있지만, 그렇게 하면 아무 것도 배우지 못하게 된다. 대신에 공준으로 단지 의심의 여지가 없는 것들로 하면 그 이외의 것들은 증명을 한다. 이러한 관점에서 정확한 증명을 할 수 없는 내용들을 최소화한다.

이제 다음의 공준 체계의 전개로 시작한다.

공준 1. 두 점을 지나는 직선은 오직 하나이다(두 점은 한 직선을 결정한다).

공준 2. 사선의 끝점으로부터 주어진 거리만큼 그 사선 위에 있는 점은 오직 하나이다.



공준 2 는 주어진 $\overrightarrow{PQ}$ 와 $d > 0$ 에 대하여 $\overrightarrow{PQ}$ 위에 $PX = d$이 점 X가 오직 하나 존재함을 말한 것이다.

정리란 공준, 성질, 정의, 이미 증명된 정리들을 사용하여 증명될 수 있는 명제들이다.

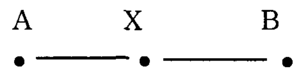
정리 3-1 두 직선이 만난다면 오직 한 점에서 만난다.

증명 : 간접 증명 방법을 사용하여 증명하자. 우선 두 직선이 두 점 P, Q에서 만난다고 가정하자. 그러면 점 P, Q를 지나는 직선이 두 개가 있다. 이것은 공준 1에 모순이다. 그러므로 두 직선이 두 점에서 만난다는 처음의 가정은 거짓이고, 두 직선은 오직 한 점에서만 만난다.

다음 정리를 들기 전에 선분의 중점을 정의한다.

점 P 가 A 와 B 사이에 있고 $PA = PB$ 일 때 점 P 는 $\overline{AB}$ 의 중점이라고 한다.

정리 3-2 중점은 선분을 두 선분으로 나누며 각각은 주어진 선분의 길이의 반이다.



전제 : X 는 $\overline{AB}$ 의 중점이다.

증명 : $AX = \frac{1}{2}AB$; $BX = \frac{1}{2}AB$

명제	논거
1. X는 $\overline{AB}$의 중점이다.	1. 가정
2. $AX = XB$	2. 중점의 정의
3. $AX + XB = AB$	3. 사이 점의 성질
4. $AX + AX = AB$ 또는 $2AX = AB$	4. 치환의 성질
5. $AX = \frac{1}{2}AB$	5. 등식의 곱의 성질

이 교과서의 앞의 학년용인 Unified Mathematics 1의 2장 논리(pp.35-72)에서 '1. 논리의 도입, 2. 부정, 3. 합접, 4. 이접, 5. 조건명제, 6. 진리표 작성, 7. 관련된 조건명제, 8. 쌍조건명제, 9. 유효한 논증(Argument)'을 다루었지만 증명은 다루고 있지 않으며 공준이라는 용어도 도입하지 않았다. 따라서 평행선의 성질도 어느 경우에나 참인 성질이라고 제시하는 방법으로 도입하였다.

그러나 Unified Mathematics 2의 '2장 논리(pp.47-98)'에서 '1. 명제와 부정, 2. 합접과 이접, 3. 조건문, 4. 열린 문장, 5. 관련된 조건문, 6. 추론의 법칙, 7. 추리의 연쇄, 8. 직접 증명, 9. 간접 증명'을 다룬 후에 위에서와 같이 공준과 증명을 다루었기 때문에 그 내용 전개에 문제점이 없이 잘 구성되어있다.

(4) ULRICH(1987)의 교과서 HBJ GEOMETRY에서는 '1단원 증명과 합동. 1장 기하의 도입, 3절 공준과 정리'에서 다음과 같이 다루고 있다.

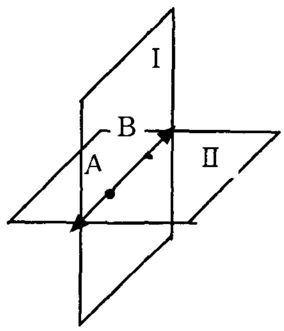
기하학에서 어떤 용어는 정의 없이 받아들이는 것과 같이 기하에서의 어떤 명제는 증명 없이 받아들인다. 이들 명제들을 공준이라고 한다.

공준 1. 모든 직선은 적어도 서로 다른 두 점을 품는다.
공준 2. 모든 평면은 한 직선 위에 있지 않은 적어도 세 개의 서로 다른 점을 품는다.
공준 3. 공간은 한 평면 위에 있지 않은 적어도 네 개의 점을 품는다.
공준 1, 2, 3 은 직선 평면 공간에 대한 최소한의 점의 개수를 제정한다. 분명히 직선, 평면, 공간에 점의 개수는 무수히 많다.

공준 4. 임의의 서로 다른 두 점에 대하여 그들을 품는 직선은 오직 하나뿐이다.
공준 5. 임의의 서로 다른 한 직선 위에 있지 않은 세 점에 대하여 그들을 품는 평면은 오직 하나뿐이다.

공준 4, 5 는 다음과 같이 언급되기도 한다.
두 점은 한 직선을 결정한다. ⟵ 공준 4
한 직선 위에 있지 않은 세 점은 한 평면을 결정한다. ⟵ 공준 5

공준 6. 임의의 서로 다른 두 점이 한 평면 위에 있으면 이들 점을 품는 직선은 그 평면 위에 있다.
공준 7. 서로 다른 두 평면이 한 점을 공유하면 그들은 적어도 두 점을 공유한다.



보기: 위의 그림에서 평면 I 과 평면 II 는 점 A 를 공유하고 있다. 공준을 사용하여 평면이 만나는 부분이 왜 직선인가를 설명하여라.

해 :
제 2의 공통점이 있다. 그것을 B라고 하자 ⟵ 공준 7
A 와 B 는 $\overleftrightarrow{AB}$ 를 결정한다. ⟵ 공준 4
$\overleftrightarrow{AB}$ 는 평면 I 위에 있다. ⟵ 공준 6
$\overleftrightarrow{AB}$ 는 평면 II 위에 있다. ⟵ 공준 6
$\overleftrightarrow{AB}$ 는 양 평면 위에 있기 때문에 그 공통 부분은 직선이다.

특히, 이 교과서에서는 22개의 공준을 들었으며 이들을 뒤의 부록에 다시 열거하였다. 그리고 '2장 증명의 도

입'에서 '대수적 성질과 증명, 조건적이고 연역적 추론, 연역적 추론과 증명'을 다루면서 학습내용 전개가 논리적인 비약이 없이 잘 구성되어 있다.

(5) Coxford & Payne(1987)의 교과서 HBJ ALGEBRA 1에서는 '1단원 1장 8절 실수에 대한 공준'에서 다음과 같이 다루고 있다.

다음 표는 임의의 실수 와 b 에 대하여 참인 4 개의 공준을 예로 든 것이다. 공준은 참으로 받아들이는 명제이다.

이 름	기 호	보 기
덧셈에 대한 가환 공준	$a+b=b+a$	$\frac{6}{7}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{6}{7}$
곱셈에 대한 가환 공준	$a\cdot b=b\cdot a$	$\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}$
덧셈에 대한 항등원 공준	$a+0=0+a=a$	$3.5+0=0+3.5=3.5$
곱셈에 대한 항등원 공준	$a\cdot 1=1\cdot a=a$	$1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$

보기 1 위의 표에 있는 공준을 사용하여 다음의 각 방정식을 참이 되게 하는 변수의 값을 구하여라. 답에 이유를 설명하는 공준을 말하여라.

a. $172\cdot\frac{9}{7}=\frac{9}{7}\cdot x$ b. $15+0.3=t+15$

c. $\frac{3}{2}\cdot s=\frac{3}{2}$ d. $3+z=3$

방정식	해	이유
a. $172\cdot\frac{9}{7}=\frac{9}{7}\cdot x$	$x=172$	곱셈에 대한 가환 공준
b. $15+0.3=t+15$	$t=0.3$	덧셈에 대한 가환 공준
c. $\frac{3}{2}\cdot s=\frac{3}{2}$	$s=1$	곱셈에 대한 항등원 공준
d. $3+z=3$	$z=0$	덧셈에 대한 항등원 공준

덧셈과 곱셈에 대한 결합 공준은 수들을 재편성 할 수 있게 한다. 여기서 a, b, c는 실수이다.

이 름	기호	보기
덧셈에 대한 결합 공준	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$7+(5+8.1)=(7+5)+8.1$
곱셈에 대한 결합 공준	$a(bc)=(ab)c$	$7(5\cdot 8.1)=(7\cdot 5)8.1$

분배 공준(덧셈 위의 곱셈)은 곱을 합으로 쓰는 방법을 보여준다.

이름	기호	보기
분배 공준	$a(b+c)=ab+ac$	$9(3+\frac{2}{3})=9\cdot 3+9\cdot\frac{2}{3}$

이 절에서 끝으로 닫힘의 공준을 들고 있다.

이름	기호	보기
덧셈에 대한 닫힘 공준	$(a+b)\in R$	$0.05+1.65=1.70$ $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$
곱셈에 대한 닫힘 공준	$(a\cdot b)\in R$	$0.05\cdot 1.65=0.0825$ $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{10}=\frac{3}{50}$

그리고 '2장 수의 연산'에서 '역원에 대한 공준'을 들었다. 즉,

덧셈의 역원 공준

임의의 실수 a에 대하여 다음과 같은 실수 $-a$가 단 하나 존재한다

$$a+(-a)=0$$

곱셈의 역원 공준

임의의 실수 a, $a\neq 0$에 대하여 $a\cdot\frac{1}{a}=1$을 만족하는 실수 $\frac{1}{a}$이 오직 하나 존재한다.

공준 14-1 일어날 수 없는 결과에 대한 확률은 0 이다.

공준 14-2 일어나는 것이 확실한 사건의 확률은 1 이다.

공준 14-3 둘 또는 그 이상의 결과가 동시에 일어날 수 없다면, 일어나는 한 이들 결과의 확률은 각각이 일어날 확률의 합이다.

이 교과서는 대수 분야의 교과서인데도 내용전개 과정에서 필요한 공준들을 제시하여 논리적인 비약이나 적당히 넘어가는 문제점을 줄이면서 효과적인 수학교육이

이루어지도록 구성이 되어 있다.

(6) JACOBS(1990)의 교과서 GEOMETRY에서는 '제1장 연역적 추론의 본성, 9절 연역적 체계'에서 다음과 같이 다루고 있다.

기원전에 Wiley의 사전에서 생태학의 뜻을 배우려고 하는 경우의 어려움은 순환론 없이 모든 것을 정의하기가 불가능하다는 사실이다. 또한 순환론 없이 모든 것을 증명하는 것도 불가능하다. 결국에는 시작했던 곳으로 다시 되돌아오는 것을 피하기 위하여 정의를 하지 않은 약간의 용어와 증명을 하지 않은 몇 개의 명제를 남겨야만 한다. 무정의 용어라고 하는 정의를 하지 않은 용어들은 다른 용어를 정의하는데 기초로 사용될 수 있으며, 공준이라 불리는 증명 없이 남겨진 명제들은 다른 명제들을 증명하는데 기초로 사용된다. 공준이란 증명 없이 참이라고 가정되는 명제이다.

무정의 용어를 사용하여 다른 용어들을 정의할 수 있고, 공준과 정의를 사용하여 정리라고 하는 명제의 직접 또는 간접 증명을 할 수 있다. 이러한 방법의 논리로 만들어진 구축물을 연역적 체계라고 한다.

연역적 체계는 게임과 같다. 게임을 어떤 방법으로 하는 것인가를 배우기 위해서는 게임에서 사용되는 용어들의 뜻(정의)을 배워야만 한다. 예를 들어, 훌륭한 축구 선수가 되기 위해서는 많은 용어와 규칙들에 익숙해 있어야만 한다. 더욱이 게임을 실행하기 위해서는 규칙들이 게임에 충분하고 모순이 없어야 하는 것이 중요하다. '충분하다'는 것은 모든 가능한 상황에서 할 수 있는 것들을 말하는 것을 뜻하는 것이고 '모순이 없다'는 것은 서로 모순을 일으키거나 모순으로 이끌고 가지 않는 것을 뜻한다. 연역적 체계에서 공준은 바뀌어질 수 있는 게임의 규칙들과도 같은 것이다. 오늘날의 축구 경기는 축구 경기가 고안된 이후에 변해 온 몇몇의 규칙들 때문에 본래의 게임과는 약간 다르다. 이와 같이 연역적 체계도 그곳에서 사용되는 공준에 의존한다.

그리고 이 후에 이 교과서에서는 공준으로 16 개의 명제를 사용하였다. 이 교과서는 추론에 대하여 간단히 다룬 후에 증명의 구성으로 공준을 사용하여 논리적인 비약 없이 내용 구성을 하려고 하였다.

(7) Henderson 외 2인(1962)의 교과서 Modern Geometry에서는 다음과 같이 다루고 있다.

일찍이 힌두교도들은 지구는 거대한 네 마리의 코끼리 등에 받쳐 있는 큰 원반이라고 믿었다. 그때 한 사람이 대단히 중요한 질문을 하였다. '코끼리들은 무엇을 딛고 서 있을까?' 이 질문의 답으로 그 당시의 학자가 코끼리들은 거대한 거북이의 등을 딛고 서있다고 하였다. 그러면 거북이들은 무엇을 딛고 서 있는가? 학자는 거북이는 끝없는 대양을 헤엄치고 있다고 하였다. 이제 또 '무엇이 바다를 쳐들고 있을까? 출발점과 같게 됨이 틀림없다.' 고 말 할 수 있다.

수학에서 참임을 증명하는데도 첫 출발점을 찾아야만 한다. 그렇지 않으면 결코 증명을 수립할 수 없다.

어떤 명제(A라고 하자.)가 참임을 증명하기 위하여 그 증명은 다른 참인 명제(B라고 하자.)를 바탕으로 두어야만 한다. 또 B가 참인 명제임을 증명하기 위하여 그것은 다른 참인 명제 C를 바탕으로 한 것임을 보여야만 한다. 또 다시, C는 다른 참인 명제 D를 바탕으로 하여야만 한다. 알다시피 이 상황은 힌두교도들이 직면했던 것과 비슷하다. 즉 항상 다음과 같은 질문을 할 수 있다 '코끼리들은 무엇을 딛고 서 있는가? 무엇이 거북이들을 받치고 있는가? 무엇이 대양을 받치고 있는가?' 이들과 비슷한 질문이 출발점이 찾아지지 않는다면 수학에서도 끝없이 일어날 수 있다. 무언가 증명을 하기 위하여 출발점은 증명 없이 받아들이는 어떤 명제들에 의하여 세워져야만 한다. 그러면 그들은 다른 명제의 증명에 바탕이 될 수 있는 근거의 역할을 한다. 수학에서 이들 근거로 되는 명제들을 첫 원리(first principles), 공리(axioms), 공준(postulates), 가정(assumption) 등 여러 가지 이름으로 불렀다.

<u>정의</u> : 증명 없이 참으로 받아들여진 명제를 공준이라고 한다.

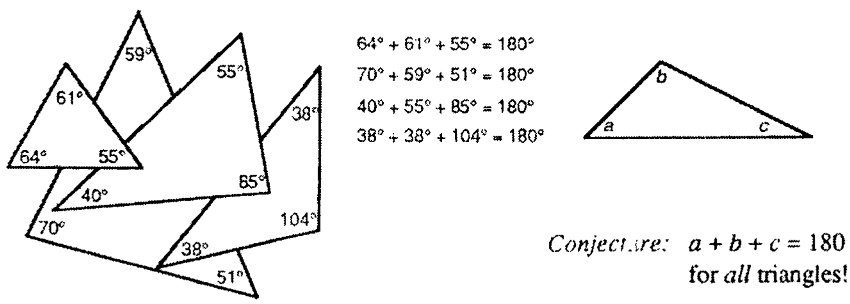
이 교과서는 '3장 수학에서 논리적 추론'을 다룬 후에 '4장 정리 증명'에서 공준을 사용하여 증명을 논리적인

비약이 없이 잘 구성하였다.

(7) Serra(1993)의 교과서 Discovering Geometry에서는 '14장 기하의 증명, 14.1 기하의 서언'에서 다음과 같이 제시하고 있다.

기하는 바빌로니아인과 이집트인에 의하여 수 천년동안 발달된 경험 법칙들로 시작되었다. 몇몇 법칙들은 간단한 넓이나 부피를 계산하는데 사용되었고, 홍수가 난 후에 땅의 경계를 다시 설정하기 위한 측정에 사용되었다. 그들은 수 세기동안의 시행착오에 의한 결과들이었다. 그러나 기원전 600년경에 새로운 발전이 있었다. 그리스의 수학자 탈레스는 그 이전의 수학자들과 같이 약간의 기하학적 추측을 만들었다. 그러나 보다 중요 것은 탈레스는 그의 발견을 논리적인 추론으로 뒷받침하였다. 그 후 300년 이상 논리적인 논증(Argument)으로 수학의 추측을 뒷받침하는 과정이 더욱 더 정제되었다. 다른 그리스 수학자들은 분리된 논리적 추론의 연쇄가 함께 연결되어질 수 있음을 보이기 시작하였다. 유클리드는 기하와 수론에 대한 그의 유명한 업적 'The Elements'에서 모든 기하에 대하여 연역적 논증의 한 단일 연쇄를 확립하였다. 유클리드는 그가 자명하게 참이라고 본 명제(공준)들로부터 출발하였다. 그리고 잇따라 기하의 발견이 그의 공준과 이미 밝혀진 추측(정리)들로부터 논리적으로 따라오는 것을 보일 수 있음을 체계적으로 제시하였다. 이렇게 하는 데에 유클리드는 연역적 체계를 창조하였다. 연역적 체계는 전제들(Premises)과 논리법칙들로 이루어져 있다.

이제까지 우리는 기하를 귀납적으로 배워왔는데 그것은 옛날 문명사회에서 기하를 배웠던 방법이다. 우리는 기하도형을 관찰하였고 그들에 대하여 추측을 하였다. 예를 들어 모든 삼각형의 세 각의 크기의 합은 180° 임을 발견하였다. 그러나 모든 삼각형의 세 각의 크기를 측정하지는 않았다. 대신에 그 추측이 참이라는 것을 확인하기 위하여 많은 삼각형들을 조사하였다.



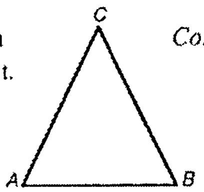
이 장에서는 기하를 유클리드가 다루었던 방법으로 살펴 볼 것이다. 즉 유클리드가 하였던 것과 같이 전제들을 기반으로 하여 연역적 체계를 만들어 나간다. 이들 전제들은 정의와 무정의 용어 연산의 성질, 상등성, 합동, 공준을 포함하며, 이들 전제로부터 앞에서의 몇몇 추측들을 증명한다. 증명된 추측들은 정리가 되고, 그 정리로부터 또 다른 추측들을 증명한다. 기하의 증명에 대한 과정은 여기서는 다른 형태의 전제들이 있다는 것을 제외하고는 논리 증명들에서와 같다.

Deductive Reasoning Process

Facts Accepted as True ⟶ **Logical Consequences**

Fact: If a triangle is isosceles, then the base angles are congruent.

Fact: ΔABC is isosceles.



Conclusion: The base angles of ΔABC are congruent.

기하의 논증에 대한 전제
1. 정의와 무정의 용어
2. 연산의 성질, 상등성, 합동
3. 기하의 공준
4. 이미 받아들여진, 또는 증명된 기하의 추측(정리)

위의 표에서 첫 번째 형태의 전제들, 즉, 무정의 용어(점, 선, 평면)와 정의는 이미 익숙하게 알고 있다.

두 번째의 전제들 즉 연산의 성질, 상등성, 합동에 대하여 살펴보자.

연산의 성질

연산에는 세 가지의 중요한 성질이 있다.

덧셈에서의 가환성 : $a+b=b+a$

곱셈에서의 가환성 : $ab=ba$

덧셈에서의 결합성 : $(a+b)+c=a+(b+c)$

곱셈에서의 결합성 : $(ab)c=a(bc)$

분배성 : $a(b+c)=ab+ac$

상등성 : 이름에는 익숙해있든지 없든지 간에 우리는 이미 상등성을 사용하였다.

상등의 반사성 :

$a=a$, 즉 임의의 수는 그 자신과 같다(항등성이라고도 한다.).

상등의 추이성 :

$a=b$ 이고 $b=c$ 이면, $a=c$ 이다. 이 성질은 대수식에서 $a=b$이면 a를 b로 바꾸어 놓아도 됨을 말하는 치환성의 형태로 취하기도 한다.

상등의 대칭성 :

$a=b$ 이면 $b=a$ 이다.

상등의 덧셈성질

$a=b$ 이면 $a+c=b+c$ 이다(또한, $a=b$ 이고 $c=d$ 이면 $a+c=b+d$ 이다.)

상등의 뺄셈성질 :

$a=b$ 이면 $a-c=b-c$ 이다(또한, $a=b$ 이고 $c=d$ 이면 $a-c=b-d$ 이다.).

상등의 곱셈성질 :

$a=b$ 이면 $ac=bc$ 이다(또한, $a=b$ 이고 $c=d$ 이면 $ac=bd$ 이다.).

상등의 나눗셈 성질

$a=b$ 이면 $a/c=b/c$ $(c\neq 0)$ 이다 (또한, $a=b$ 이고 $c=d$ 이면 $a/c=b/d(c\neq 0, d\neq 0)$ 이다.).

이제 방정식을 풀기 위하여 연산의 성질과 상등성을 이용한다. 방정식의 풀이는 바로 한 대수적인 증명이다. 각 단계마다 앞에 있는 성질들로 뒷받침되는데, 이를테면 상등의 덧셈 성질은 방정식의 양변에 같은 수를 더하여 동치인 다른 방정식을 구할 수 있게 한다.

보기 A

방정식 : $5x-12=3(x+2)$

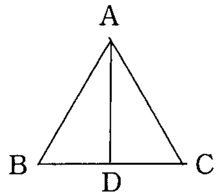
풀이 :	$5x-12=3(x+2)$	주어진 방정식
	$5x-12=3x+6$	분배성
	$5x=3x+18$	상등의 덧셈성질
	$2x=18$	상등의 뺄셈성질
	$x=9$	상등의 나눗셈성질

연산의 성질과 상등성이 기하에서 왜 중요한가? 선분의 길이 각의 크기는 수를 포함하고 있기 때문에 기하의 증명에서 이들 성질들을 자주 사용하기 때문이다.

합동의 정의와 합동의 성질
수들 사이의 관계를 나타내기 위하여 등호를 사용하지만 기하도형의 관계를 나타내기 위하여 합동을 사용한다. 선분과 각의 합동 정의로부터 $AB = CD$ 이면 $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $m\angle A = m\angle B$ 이면 $\angle A \cong \angle B$이다. 합동의 성질들은 앞의 상등의 세 성질 반사성, 추이성, 대칭성을 합동 관계로 확장함으로써 나온다.

합동의 반사성은 기하의 논증에서 자주 사용되는 합동의 성질이다.

합동의 반사성은 도형 A ≅ 도형 A 를 말한다. 즉 임의의 도형은 그 자신과 합동이다.
보기



가정: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ 인 이등변삼각형
ABC 와 각의 이등분선 $\overline{AD}$

합동의 반사성에서 $\overline{AD} \cong \overline{AD}$ 이므로
$\triangle ADB$ 의 $\overline{AD}$ 는 $\triangle ABC$ 의 $\overline{AD}$ 와 합동이다.

합동에서 추이성도 기하의 논증에서 유용한 것이다.

합동의 추이성은 도형 A ≅ 도형 B 이고 도형 B ≅ 도형 C 이면, 도형 A ≅ 도형 C 임을 말한다. 합동에서 대칭성은 대단치 않은 것 같이 보이지만 깨닫지 않고 늘 사용하는 것이다.

합동의 대칭성은 도형 A ≅ 도형 B 이면 도형 B ≅ 도형 A 임을 말한다.

등식의 대칭성을 사용하여 $3 = x$ 를 $x = 3$ 으로 바꾸어 쓰듯이 합동의 대칭성을 사용하여 합동기호의 우변과 좌변의 표현을 관련짓는다. 즉, $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ 를 $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ 로 바꾸어 나타낼 수 있다.

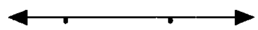
그리고 14. 2 기하의 공준(Postulates of Geometry)에서 다음과 같이 전개하고 있다.

연역적 체계에서 명제들은 이미 받아들여졌거나 증명된 논리적인 결과물들이다. 추론의 연쇄는 어딘가에서 시작을 하여야만 하므로, 증명 없이 받아들인 명제로부터 시작을 하여야만 한다. 기하에서의 이들 성질들을 기하 체계의 공준이라고 한다.

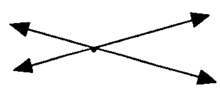
이미 만들어진 추측들 중 일부는 공준과 참이라고 받아들여진 것들이 될 것이고, 다른 것들은 연역 체계를 사용하여 이끌어 낸 것들로 이들은 정리가 된다.

유클리드 기하의 공준은 컴파스와 자를 가지고 가능한 기하작도에 기반을 두고 있다. 이 책에 제시된 기하의 첫 번째 공준들도 기하 작도에 기반을 두었다. 기본적인 기하작도를 어떻게 하는 가를 발견하면 이들 중 일부는 자명한 참임을 가정하게 된다. 그들은 무엇일까?

P-1 임의의 두 점을 지나는 오직 한 직선을 작도할 수 있다. (직선 공리)



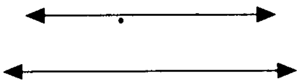
P-2 두 직선의 교점은 오직 한 점이다.(직선 교점 공준)



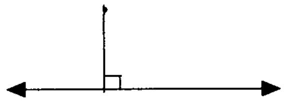
P-3 임의의 선분에 오직 한 개의 중점을 작도 할 수 있다.(중점 공준)

P-4 임의의 각에 오직 한 개의 각의 이등분선을 작도 할 수 있다.(각의 이등분선 공준)

P-5 주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나서 그 직선에 평행한 오직 한 직선을 작도 할 수 있다.(평행의 공준)

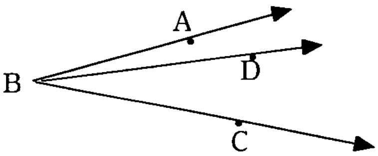


P-6 주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나서 그 직선에 수직인 오직 한 직선을 작도 할 수 있다.(수직의 공리)



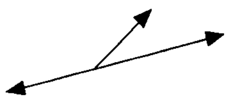
P-7 B 가 $\overline{AC}$ 위의 A 와 C 사이에 있으면 $AB + BC = AC$ 이다.(선분 덧셈 공준)

P-8 점 D 가 $\angle ABC$ 에 있으면
$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$이다.
(각 덧셈 공준)

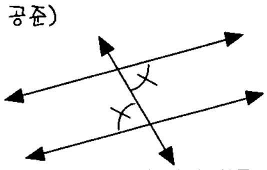


이 책에 제시한 기하에서 두 번째의 공준들은 가장 기본적이고 기하의 추측에서 유용한 것들에 기반을 두었다. 그들은 무엇일까?

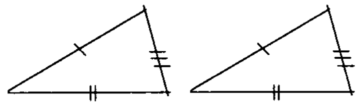
P-9 두 각이 직선을 이루는 쌍이면 그들은 서로 보각이다. (직선을 이루는 쌍의 공준)



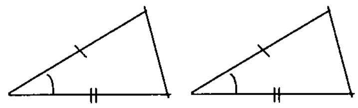
P-10 두 평행선이 한 직선과 만나면 엇각은 합동이다. 역으로 두 직선이 한 직선과 만나서 이루는 엇각이 같으면 두 직선은 평행이다.(AIA 공준)



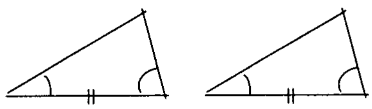
P-11 한 삼각형의 세 변이 다른 삼각형의 세 변과 합동이면 두 삼각형은 합동이다.(SSS 합동 공준)



P-12 한 삼각형의 두 변과 그 끼인각이 다른 삼각형의 두 변과 그 끼인각과 합동이면 두 삼각형은 합동이다.(SAS 합동 공준)



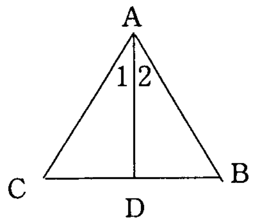
P-13 한 삼각형의 두 각과 그 사이의 변이 다른 삼각형의 두 각과 그 사이의 변과 합동이면 두 삼각형은 합동이다. (ASA 합동 공준)



위와 같은 준비를 바탕으로 하여 '14.3 기하의 증명'에서 다음과 같이 내용을 전개하였다.

기하에서의 증명은 각각이 주어진 전제들로부터 시작을 하여 타당한 결론에 도달하는 논거에 의하여 뒷받침된 명제들의 나열로 구성된다. 각각의 명제들은 하나 또는 그 이상의 명제들로부터 잇따른다. 한 명제에 대한 논거는 주어진 전제들이나 또는 다른 4가지의 형태의 전제 '정의; 공준; 연산, 상등, 합동의 성질; 이미 증명된 정리들' 중의 하나로부터 나올 수 있다. 기하의 증명은 논리의 증명에서와 같은 방법으로 제시할 수 있다.

보기A



추측 : 이등변 삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변의 중선이다.

전제 : $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ 이고 $\overline{CD}$ 가 꼭지각 C 의 각 이등분선인 $\triangle ABC$

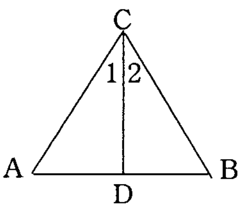
증명 : $\overline{CD}$ 는 밑변의 중선

두 열로의 증명:

1. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ 1. 전제
2. $\overline{CD}$ 는 $\angle C$ 의 각 이등분선 2. 전제
3. $\overline{CD}$ 가 $\angle C$ 의 각 이등분선이면, $\angle 1 \cong \angle 2$ 3. 각 이등분선의 정의
4. $\angle 1 \cong \angle 2$ 4. 위의 2. 3에 삼단논법 긍정식사용
5. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ 5. 합동의 반사성
6. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ 이면 $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ 이다. 6. SAS 합동 공준
7. $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ 7. 위의 1, 4, 5, 6에 삼단논법 긍정식사용
8. $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ 이면, $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ 이다. 8. 합동삼각형의 정의
9. $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ 9. 위의 7, 8에 삼단논법 긍정식 사용
10. $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ 이면 D 는 $\overline{AB}$ 의 중점이다. 10. 중점의 정의
11. D 는 $\overline{AB}$ 의 중점이다. 11. 위의 9, 10에 삼단논법 긍정식 사용
12. D 가 중점이면 $\overline{CD}$ 는 중선이다. 12. 중선의 정의
13. 따라서, $\overline{CD}$ 는 중선이다. 13. 위의 11, 12에 삼단논법 긍정식 사용

기하의 증명은 논리의 증명보다 보통 더 길고 많은 전제들을 포함하고 있기 때문에 그들을 간단한 형태로 쓰는 것이 보통이다. 이를테면, 삼단논법의 긍정식은 더 이상 직접 언급하지 않는다. 위의 보기를 다시 간단한 형태로 제시하면 다음과 같다.

보기 B



추측 : 이등변 삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변의 중선이다.

전제 : $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ 이고 $\overline{CD}$ 가 꼭지각 C 의 각 이등분선인 $\triangle ABC$

증명 : $\overline{CD}$ 는 밑변의 중선

두 열로의 증명:

1. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ 1. 전제
2. $\overline{CD}$ 는 $\angle C$ 의 각 이등분선 2. 전제
3. $\angle 1 \cong \angle 2$ 3. 각 이등분선의 정의
4. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ 4. 합동의 반사성
5. $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ 5. SAS 합동 공준
6. $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ 6. 합동삼각형의 정의
7. D 는 $\overline{AB}$ 의 중점이다. 7. 중점의 정의
8. 따라서, $\overline{CD}$ 는 중선이다. 8. 중선의 정의

일단 증명이 되었으므로 위의 추측을 정리라고 부를 수 있다. 정리로서 그것은 다른 추측을 증명하기 위하여 사용할 수 있는 기하의 논증을 위한 한 전제가 된다.

이 교과서는 '1장 귀납적 추론', '14장 연역적 추론'을 다룬 후에 14장에서 위에서와 같이 공준을 도입하여 증명을 논리적인 비약이나 적당히 처리함이 없이 잘 구성하였다.

이상에서 살펴본 미국에서 사용하는 교과서들은 증명을 도입하면서 모두 공준을 제시하여 증명 과정에서 논리적인 처리를 정확하게 하고 있다. 우리 나라와 달리 증명을 도입하기 전에 논리를 배우기 때문에 적당히 학습 내용을 넘어가는 일은 가능한 한 줄일 수 있고, 따라서 수학에서 그래도 다른 학과보다는 엄밀하고 정확한 논리적인 사고를 할 수 있는 수학 교육을 할 수 있도록 하고 있다.

3. 일본의 교과서

(1) 一松 信 외 30인(平成 10年)의 교과서 中學校 數學 1은 '평면도형, 평면도형의 기초'에서는 '직선, 반직선, 선분, 각, 각의 정점, 각의 변, 두 직선의 교점, 수직,

수선, 평행, 두점 사이의 거리, 점과 직선과의 거리, 평행한 두 직선 사이의 거리'를 정의하였고, '작도와 이동'에서는 '원, 호, 현'의 뜻을 알고, '수직이등분선과 그 작도, 수선의 작도, 각의 이등분선과 그 작도, 도형의 이동에서는 도형의 이동, 평행이동, 회전이동, 대칭이동'을 간단하게 다루었다. '공간도형, 공간도형의 기초'에서는 '공간도형, 입체, 다면체, 정다면체의 뜻'을 알아보고, '평면의 결정, 직선·평면의 위치관계'를 간단하게 알아보았고, '공간도형의 구성'에서는 '회전체, 모선, 입체의 절단, 투영도와 전개도'를 간단히 다루었다.

교과서 中學校 數學 2는 '5장 도형의 성질과 증명, 1. 평행선과 다각형'에서는 '평행선과 각, 다각형의 각, 평행선과 넓이'를 다루고 '2 삼각형'에서 '합동인 도형, 삼각형의 합동조건'을 다루면서 자와 컴퍼스를 사용하여 각의 이등분선을 작도하게 한 후에 작도한 선이 주어진 각을 이등분함을 삼각형의 합동조건을 이용하여 밝힌 후에 다음과 같이 서술하였다.

위의 설명에서는 삼각형의 합동조건을 설명의 근거로 하고 있다. 이와 같이 어떤 사항이 옳다는 것을 이미 옳다고 인정된 사항들을 근거로 하여 전후의 분명한 관계를 세워서 확인하는 것을 증명이라고 한다.

그리고 가정과 결론을 알게 한 후에 가정으로부터 결론을 유도하는 예제를 든 후에 '도형의 기본 성질과 정리'라는 소항목을 만들어 도형의 기본 성질로 '평행선과 동위각 엇각, 삼각형의 합동조건'을 서술하였고, 또 '다각형의 내각 외각의 합, 합동인 도형의 성질' 등도 증명에서 근거로 사용하면 좋다고 하고 이중에서 특히 자주 증명에 사용되는 것을 정리라고 한다고 하였다. 그리고 이제까지 배운 것 중에서 정리로 '맞꼭지각의 성질, 삼각형의 각(내각, 외각)의 성질'을 들었다.

(2) 澤田利夫 외 21명(平成 10年)의 교과서 中學數學1은 '평면도형, 평면도형의 기본'에서는 '직선, 선분, 두 점 사이의 거리, 각, 두 직선의 평행과 그 표현, 교점, 수선, 점과 직선과의 거리, 평행한 두 직선 사이의 거리, 이동, 평행이동, 회전이동, 대칭이동, 회전의 중심, 대칭의 축의 뜻'을 알게 하고 '점의 집합과 작도'에서는 '원, 호, 현, 선분의 수직이등분선과 그 작도, 수선의 작도, 각의 이등분선과 그 작도'를 간단하게 다루었다. '공간도형, 공간도형의 기본'에서는 '평면의 결정과 직선과 직선의 위치관계, 직선과 평면의 위치관계, 직선과 평면의 수직, 점과 평면 사이의 거리, 직선과 평면의 평행, 평면과 평면의 위치관계, 평면과 평면의 수직, 평면과 평면의 평행의 뜻'에 대하여 알아보았고, '공간도형의 보는 법과 나타내는 법'에서는 '정삼각기둥, 정사각기둥, 정삼각추, 정사각추, 회전체 회전의 축, 모선, 다면체, 정다면체, 겨냥도와 전개도, 투영도, 입면도, 평면도, 입체의 단면'에 대하여 간단히 알아보았다.

中學數學 2의 '5장 평행과 합동, 평행선과 각'에서는 '여러 가지 각, 평행선과 각, 삼각형의 각, 다각형의 각'을 알아보고, '합동'에서는 '합동인 도형, 삼각형의 합동조건을 다룬 후에 합동과 증명에서 오목다각형의 각의 크기를 측정하게 한 후에 다각형의 각의 성질을 이용하여 이론적으로 밝힌 후, 그것은 「삼각형의 외각은 그와 이웃하지 않은 두 내각의 합과 같다.」를 근거로 하여 전후의 분명한 관계를 세워서 설명하였다.'고 하고 '이와 같이 어떤 사항이 옳다는 것을 전후의 분명한 관계를 세워서 설명하는 것을 증명이라고 한다.'고 하였다.

그리고 가정과 결론을 알게 한 후에 가정으로부터 결론을 유도하는 도표를 제시한 후에 증명을 하는데 근거로 사용되는 것들로 '맞꼭지각의 성질, 평행선의 성질, 평행선이 되기 위한 조건, 삼각형의 내각과 외각, 합동인 도형의 성질, 삼각형의 합동조건'을 제시하였다. 그리고 수량에 대한 성질로 다음을 들었다.

- $a = b$, $b = c$ 이면 $a = c$ 이다.
- $a = b$ 이면 $a + c = b + c$ 이다.

그리고 한참 뒤에서 '이등변 삼각형의 두 밑각이 같다.'는 것을 증명한 후에 이 증명된 성질은 이후로 도형의 성질을 증명할 때에 근거로 자주 사용된다고 하였고, '이와 같이 증명된 것 중에서 자주 사용되는 것을 정리라고 한다.'고 하였다.

(3) 赤 攝也 외 20인(平成 10年)의 교과서 新版 中學校數學 1은 '평면도형, 도형의 기초'에서는 '선과 선의 교점, 반직선, 선분, 선분의 연장, 두 점 사이의 거리, 원, 호, 현, 평행선의 표현, 수선, 점과 직선의 거리, 평행선

사이의 거리, 도형의 이동에서는 평행이동, 회전이동, 대칭이동의 뜻'을 알게 하고, '도형과 작도'에서는 '수직이등분선과 그 작도, 선분의 중점, 각의 이등분선과 그 작도, 수선의 작도'에 대하여 간단하게 다루었다. '공간도형, 공간도형의 기초'에서는 '공간도형, 평면의 결정, 직선 평면의 위치관계, 직선과 평면의 교점, 직선과 평면의 평행, 평면과 평면의 교선, 평면과 평면의 평행, 공간에서 수직과 거리에서는 직선과 평면의 수직, 수선, 점과 평면과의 거리, 평행한 두 평면의 거리 평면과 평면의 수직', '입체와 그 조사방법'에서는 '다면체와 전개도, 다면체, 정각주, 정다면체, 회전체, 회전의 축, 모선, 입체의 절단과 단면, 입체의 투영, 입면도, 평면도, 투영도'에 대하여 간단히 다루고 있다.

교과서 新版 中學校數學 2의 '5장 평행과 합동의 각과 평행선'에서는 '여러 가지 각, 평행선과 각, 삼각형의 각, 다각형의 각, 도형의 성질의 조사 방법'을 다루었는데, 특히, 이 교과서에서는 실험, 실측에 의해 추정하게 하고 그 추정된 성질을 이론적으로 밝혀 보였다. '도형의 합동'에서는 '합동인 도형, 삼각형의 합동조건'을 다룬 후에 삼각형의 합동조건의 사용방법에서 '두 선분 AB, CD가 각각 중점 O에서 만날 때 $AC=BD$임'과, '각의 이등분선 작도에 의한 이등분선은 이론적으로 각을 이등분함'을 이론적으로 설명한 후에 '이들 〈설명〉 과 같이 이미 옳다고 확인된 사항들을 근거로 하여 어떤 사항이 옳다는 이유를 전후의 분명한 관계를 세워서 진술하는 것을 증명이라고 한다.'고 하였다.

그리고 가정과 결론을 알게 한 후에 가정으로부터 결론을 유도하는 도표를 제시한 후 증명을 하는데 근거로 사용되는 것들로 '맞꼭지각의 성질, 평행선의 성질, 평행선이 되기 위한 조건, 삼각형의 내각과 외각의 성질, 합동인 도형의 성질, 삼각형의 합동조건'을 제시하였다. 한참 뒤에서 이등변 삼각형의 두 밑각이 같다는 것을 증명한 후에 '이미 증명된 것들 중에서 여러 성질을 증명할 때에 근거로 하여 자주 사용되는 것을 정리라고 한다.'고 하였다.

(4) 藤田 宏 외 33인(平成 10年)의 교과서 新編 新しい數學 1은 '평면도형, 기본도형'에서는 '직선, 선분, 반직선, 수선, 호, 현, 수선의 작도, 점과 직선의 거리, 수직이등분선과 그 작도, 각의 이등분선과 그 작도'에 대하여 알아보았고, '도형의 이동'에서는 '평행이동, 회전이동, 대칭이동'에 대하여 간단히 다루었다. '공간도형, 평행과 수직'에서는 '직선과 평면의 평행·수직', '입체의 다양한 보는 법'에서는 '회전체, 모선, 평면과 평면의 수직, 입체의 평면 위의 표현 방법, 입체의 단면, 다면체, 정다면체' 등에 대하여 간단히 다루었다.

교과서 新編 新しい數學 2의 '5장 평행과 합동, 평행선과 각'에서는 '다각형의 내각과 외각'을 다룬 후에 '평행선과 각'의 부분에 '증명'이라는 소항목을 만들어 우선 삼각형의 내각의 합이 180°임을 삼각형의 세 각을 잘라내어 한 꼭지점에 모으면 일 직선을 이룸을 보이는 실측 또는 실험에 의하여 초등학교에서 배웠음을 알려주고 다시 평행선의 성질을 이용하여 이론적으로 설명하였다. 그리고 다음과 같이 언급하였다.

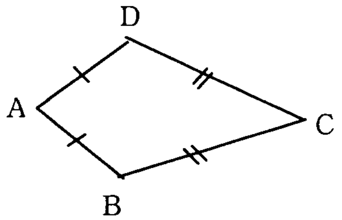
> 이 설명에서는 평행선의 성질을 기본으로 하여 삼각형의 내각의 합이 180°가 됨을 유도한 것이다. 이와 같이 어떤 사항이 성립하는 이유의 설명을 이미 학습한 성질을 근거로 하여 나타내는 것을 증명이라고 한다.

그리고 가정과 결론을 알게 한 후에 가정으로부터 결론을 유도하는 증명 과정에서 근거들을 제시하여 보인 후에 증명을 하는데 근거로 사용되는 것들로 '맞꼭지각의 성질, 평행선과 각의 관계, 삼각형의 내각과 외각의 성질, 합동인 도형의 성질, 삼각형의 합동조건'을 제시하였다. 그리고 첨부하여 '등식의 성질, 넓이 또는 체적의 공식, 다각형의 내각의 합의 공식' 등도 사용한다고 하였다. 그리고 한참 뒤에서 이등변 삼각형의 두 밑각이 같다는 것을 증명한 후에 '「이등변삼각형의 밑각은 같다.」, 「삼각형의 내각의 합은 180°이다.」등의 성질은 도형의 성질을 증명할 때 근거로 자주 사용된다. 이와 같이 증명된 것들 중에서 중요한 것을 정리라고 한다.'고 하였다.

(5) 飯島康男 외 32인(平成 9年)의 교과서 新訂數學 1年은 '평면도형, 도형의 기초'에서는 '직선과 각, 선분, 반직선, 두 점 사이의 거리, 수직과 평행, 수직, 수선, 점과 직선과의 거리, 평행한 두 직선의 거리, 도형의 이동, 평

행이동, 회전이동, 회전의 중심, 대칭이동, 대칭축', '점의 집합과 작도'에서는 '점의 집합과 직선·원, 호, 현, 중심각, 한 직선으로부터 일정한 거리에 있는 점의 집합, 수직이등분선과 그 작도, 각의 이등분선과 그 작도, 수선의 작도'를 다루었다. '공간도형'에서는 '평면, 직선의 위치 관계, 두 평면의 위치 관계, 수직, 평면과 직선의 위치 관계, 수직, 수선, 점과 평면과의 거리, 두 직선의 위치 관계, 꼬인 위치, 면을 평행이동하기, 면을 회전이동하기, 회전체, 모선, 입체의 절단, 입체의 투영도와 전개도, 투영도, 다면체와 전개도, 다면체, 정다면체' 등에 대하여 간단히 다루었다.

교과서 新訂數學 2年의 '5 도형의 조사방법, 1장 도형의 조사 방법'에서 '평행선과 각, 삼각형의 각, 삼각형의 합동'을 다룬 후에 증명을 다음과 같이 도입하였다.



위의 사각형 $ABCD$에서 $AB = AD$, $BC = DC$일 때 $\angle ABC = \angle ADC$ 라고 할 수 있는가 라는 문제를 제시하고 삼각형의 합동조건을 이용하여 이론적으로 설명하였다. 그리고 위의 설명과 같이 어떤 사항이 성립하는 것을 전후의 분명한 관계를 세워서 밝히는 것을 증명이라고 한다.

그리고 가정과 결론을 알게 한 후에 가정으로부터 결론을 유도하는 도표를 제시한 후에 증명을 하는데 근거로 사용되는 것들로 '맞꼭지각의 성질, 평행선에 대한 성질과 조건, 삼각형의 내각·외각의 성질, 합동인 도형의 성질과 삼각형의 합동조건'을 제시하였다
그 외에 수량에 대한 성질로

- $a = b$, $b = c$ 이면 $a = c$ 이다.
- $a = b$ 이면 $a + c = b + c$, $a - c = b - c$ 이다.

와 이제까지 증명된 것으로

- $l /\!/ m$, $m /\!/ n$ 이면 $l /\!/ n$ 이다.
- n 각형의 내각의 합은 $180° \times (n-2)$이다.
- n 각형의 외각의 합은 $360°$ 이다.

등도 증명의 근거로 사용된다고 하였다.

그리고 한참 뒤에서 이등변 삼각형의 두 밑각이 같다는 것을 증명한 후에 이 성질은 이후 도형의 성질을 증명할 때 근거로 자주 사용된다고 하고, '이와 같이 증명된 것들 중에서 기본이 되는 것을 정리라고 한다.'고 하였다.

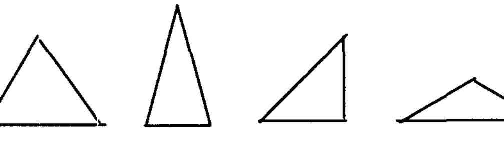
이상에서 살펴본 일본의 교과서들의 내용은 우리 나라의 교과서들과 거의 비슷하다. 그러나 일본의 교과서에서는 평행선의 성질, 삼각형의 합동조건 등을 정리라고 언급하지는 않고 있다.

Ⅲ. 제언 및 결론

1. 제 언

중학교 2학년에서 처음으로 증명을 다루면서 증명을 하기 위하여 사용해야 할 이미 알려져 있는 옳은 사실, 기본 성질들은 무엇이고 그 한계를 명확하게 판별할 수 있도록 하여 증명의 도입에서 필요한 것들, 즉, 공준을 명확하게 판별하여 사용한다면 막연한 상태에서의 출발보다는 보다 자연스럽고 효과적인 학습이 이루어질 수 있을 것이다.

이제 그 도입 방법의 한 모델을 다음과 같이 제시한다.



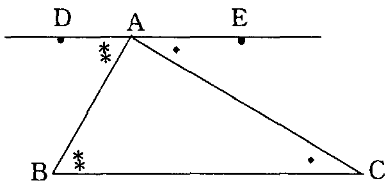
[물음] 1. 앞의 그림의 삼각형의 세 내각의 크기를 측정하여 그합이 $180°$인가 확인하여 보아라.

2. 앞의 그림의 이등변삼각형의 밑각의 크기를 측정하여 그 크기가 각각 같은지 확인하여 보아라.

앞의 1의 경우 모든 삼각형에 대하여, 2.의 경우 모든 이등변삼각형에 대하여 확인할 수 있는가?

앞의 물음의 확인을 모든 삼각형에 대하여 전부 할 수는 없다. 따라서 이와 같이 실측이나 실험에 의하여 어떤 도형의 성질을 알아보는 것은 그 성질을 추측하거나 이해하는 데에는 좋은 방법이 될 수 있지만 이것만으로 그 성질이 항상 옳다고는 할 수 없다.

이제 실험이나 실측이 아닌 이론적으로 위의 물음 1을 확인하여 보자.



우선, 위의 그림과 같이 $\triangle ABC$의 꼭지점 A를 지나며 변 BC에 평행한 직선 DE를 그으면,

$\angle DAE = 180°$(평각)이므로,

$\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$

한편, $\overleftrightarrow{BC} /\!/ \overleftrightarrow{DE}$ 에서

$\angle DAB = \angle B$(엇각), $\angle CAE = \angle C$(엇각)

그런데 $\angle BAC = \angle A$ 이므로,

$\angle A + \angle B + \angle C = \angle BAC + \angle DAB + \angle CAE = 180°$

앞의 방법은 이미 알고 있는 사실, 즉, 평각의 크기, 평행선의 성질, 각의 크기의 합, 치환의 성질 등을 이용하여 모양과 크기에 관계없이 삼각형의 내각의 크기의 합은 $180°$가 됨을 밝힌 것이다. 이와 같이 실측이나 실험에 의하지 않고, 이미 알고 있는 옳은 사실 또는 성질들을 근거로 하여 이론적으로 어떤 명제가 참임을 밝히는 것을 증명이라고 한다.

여기서 이미 알고 있는 옳은 사실 또는 성질 중에는 다시 그들이 참이라는 것을 밝혀야만 하고, 이 때 이것을 밝히기 위하여 또 전 단계의 이미 알고 있는 옳은 사실 또는 성질들을 사용해야 하는 것들이 있다. 여기서 이 과정이 계속되다 보면 이미 알고 있는 옳은 사실 또는 성질은 더 이상 전 단계로 계속 갈 수 없는 곳에 도달하게 되고 그 곳에서 이들은 증명 없이 참인 명제로 받아들일 수밖에 없게 된다.

이 때의 증명 없이 참이라고 받아들이는 명제를 공준이라 하고, 이것은 다른 명제들을 증명하는데 근거로 사용된다. 예를 들면, 앞에서 학습한 명제들 중에서 공준인 것들 일부를 열거하면 다음과 같다.

1) $a = a$
2) $a = b$ 이면 $b = a$ 이다.
3) $a = b$ 이면 a 는 b 로 b 는 a 로 바꿔 놓을 수 있다.
4) 서로 다른 두 점을 지나는 오직 한 직선을 작도할 수 있다.
5) 두 직선의 교점은 오직 한 점이다.
6) 두 점을 끝으로 하는 선은 무수히 많이 있지만 그 중에서 길이가 가장 짧은 것은 선분이다.
7) 임의의 선분에 오직 한 개의 중점을 작도할 수 있다.
8) 임의의 각에 오직 한 개의 각의 이등분선을 작도할 수 있다.
9) 주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나서 그 직선에 평행한 오직 한 직선을 작도 할 수 있다.
10) 주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나서 그 직선에 수직인 오직 한 직선을 작도 할 수 있다.
11) B 가 $\overline{AC}$ 위의 A 와 C 사이에 있으면 $AB + BC = AC$ 이다.
12) 점 D 가 $\angle ABC$ 에 있으면

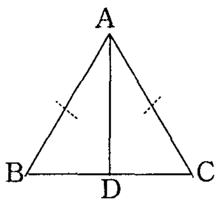
$$\angle ABD + \angle DBC = \angle ABC$$

이다.
13) 두 각이 직선을 이루는 쌍이면 그들은 서로 보각이다.
14) 두 평행선이 한 직선과 만나면 엇각은 합동이다. 역으로 두 직선이 한 직선과 만나서 이루는 엇각이 같으면 두 직선은 평행이다.
15) 두 삼각형은 대응하는 세 변의 길이가 각각 같을 때 합동이다.
16) 두 삼각형은 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고 그 끼인각의 크기가 같을 때 합동이다.
17) 두 삼각형은 대응하는 한 변의 길이가 같고 그 양 끝의 각의 크기가 각각 같을 때 합동이다.

앞의 물음 1의 증명에서 근거로 사용된 공준을 제시하면 다음과 같다.

명 제	근 거
$\angle DAE = 180°$(평각)	… 정의
이므로,	
$\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$	… 공준 12
한편, $\overleftrightarrow{BC} /\!/ \overleftrightarrow{DE}$ 에서 $\angle DAB = \angle B$(엇각),	
$\angle CAE = \angle C$(엇각)	… 공준 13
그런데 $\angle BAC = \angle A$ 이므로,	
$\angle A + \angle B + \angle C = \angle BAC + \angle DAB + \angle CAE = 180°$	… 공준 3

참고: 위의 과정에서 $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$, $\angle A + \angle B + \angle C = \angle BAC + \angle DAB + \angle CAE = 180°$ 에는 공준 $(a+b)+c = a+(b+c)$이 사용되었으며 다음에 제시한 공준들에 포함되어 있다.



이제 물음 2, 즉, 「 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이면, $\angle B = \angle C$ 이다.」를 사용된 공준을 근거로 제시하면서 증명하여 보자.

앞의 그림에서 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 와의 교점을 D 라고 하자. … 공준 8

$\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 에서

$\overline{AB} = \overline{AC}$	… 정의(이등변삼각형)
$\overline{AD} = \overline{AD}$	… 공준 1
$\angle BAD = \angle CAD$	… 공준 8
$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$	… 공준 16
$\therefore\ \angle B = \angle C$	… 정의(도형의 합동)

공준을 명확하게 구별하여 알고 활용할 수 있도록 하는 것은 증명의 출발에서 대단히 중요한 것이므로 현행 중학교 교과서에서 공준처럼 사용되는 다음 명제들은 부록에 공준으로 제시하여 증명에 활용할 수 있도록 할 것을 제언한다.

1) 1은 모든 자연수의 약수이다.
2) a는 자기 자신 a의 약수이고 배수이다.
3) 자연수를 소인수분해한 결과는 소인수들의 순서를 생각하지 않으면 오직 한 가지 뿐이다.
4) 양수는 0보다 크고 음수는 0보다 작다.
5) 양수는 절대값이 클수록 크다.
6) 음수는 절대값이 클수록 작다.
7) 등식의 양변에 같은 수를 더하여도 등식은 그대로 성립한다.
8) 등식의 양변에 같은 수를 빼어도 등식은 그대로 성립한다.
9) 등식의 양변에 같은 수를 곱하여도 등식은 그대로 성립한다
10) 등식의 양변을 0이 아닌 같은 수로 나누어도 등식은 그대로 성립한다
11) $a = a$
12) $a = b$이면 $b = a$이다.
13) $a = b$이면 a는 b로 b는 a로 바꾸어 놓을 수 있다.
14) $a + b = b + a$
15) $(a+b)+c = a+(b+c)$
16) $a \times b = b \times a$
17) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
18) $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$
19) $a < b$ 이면 $a+c < b+c$, $a-c < b-c$ 이다.
20) $a < b$, $c > 0$ 이면 $ac < bc$, $a/c < b/c$ 이다.
21) $a < b$, $c < 0$ 이면 $ac > bc$, $a/c > b/c$ 이다
22) 절대로 일어날 수 없는 사건의 확률은 0이다.
23) 반드시 일어나는 사건의 확률은 1이다.
24) 서로 다른 두 점을 지나는 오직 한 직선을 작도할 수 있다.
25) 두 직선의 교점은 오직 한 점이다.
26) 두 점을 끝으로 하는 선은 무수히 많이 있지만 그 중에서 길이가 가장 짧은 것은 선분이다.

27) 임의의 선분에 오직 한 개의 중점을 작도할 수 있다.
28) 임의의 각에 오직 한 개의 각의 이등분선을 작도할 수 있다.
29) 주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나서 그 직선에 평행한 오직 한 직선을 작도할 수 있다.
30) 주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나서 그 직선에 수직인 오직 한 직선을 작도할 수 있다.
31) B가 $\overline{AC}$ 위의 A와 C사이에 있으면 $AB + BC = AC$이다.
32) 점 D가 $\angle ABC$의 내부에 있으면
$\angle ABD + \angle DBC = \angle ABC$
이다.
33) 두 각이 직선을 이루는 쌍이면 그들은 서로 보각이다.
34) 두 평행선이 한 직선과 만나면 엇각은 합동이다. 거꾸로 두 직선이 한 직선과 만나서 이루는 엇각이 같으면 두 직선은 평행이다.
35) 한 평면이 두 점 A, B를 포함할 때 A, B를 포함하는 직선 AB는 그 평면에 포함된다.
36) 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C 를 포함하는 평면은 오직 하나이다.
37) 직선 AB를 품고 그 직선 위에 있지 않은 점 C를 지나는 평면은 오직 하나 뿐이다.
38) 두 삼각형은 대응하는 세 변의 길이가 각각 같을 때 합동이다.
39) 두 삼각형은 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고 그 끼인각의 크기가 같을 때 합동이다.
40) 두 삼각형은 대응하는 한 변의 길이가 같고 그 양 끝의 각의 크기가 각각 같을 때 합동이다.
41) 두 삼각형은 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같을 때 서로 닮은꼴이다.
42) 두 삼각형은 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고 그 끼인각의 크기가 같을 때 서로 닮은꼴이다
43) 두 삼각형은 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 같을 때 서로 닮은꼴이다
44) 수직선 위의 점 전체의 집합과 실수 전체의 집합 사이에는 일대일 대응이 이루어진다.

2. 결 론

바람직한 수학교육, 특히, 증명의 학습에서는 논리를 도입하여 논리에서 증명과 그 방법까지 엄밀하게 다룬 후에 각 분야에서 증명을 다룬다면 증명의 본래의 목적에 맞게 전체적으로 엄밀하게 다루어지겠지만 현 교육과정에서는 이와 같은 큰 변환은 가능하지 않다. 그러나 약간의 개선과 보강을 한다면 큰 효과를 걷을 수 있으리라 생각되므로 바람직한 개선 및 보강이 이루어져야만 한다.

그러기 위하여 우선 중학교 2학년에서 처음으로 증명을 다루면서 증명을 하기 위하여 사용해야 할 이미 알려져 있는 옳은 사실, 기본 성질들은 무엇이고 그 한계를 명확하게 판별할 수 있도록 하여 증명의 도입에서 필요한 것들, 즉, 공준을 명확하게 판별하여 막연한 상태에서의 출발보다는 보다 자연스럽고 효과적인 학습이 이루어질 수 있도록 하여야 한다.

실제로 1학년에서 증명을 다루고 있지 않으면서도 '밝혀라'라는 방법으로 평행선의 성질을 이용하여 「삼각형의 내각의 합은 180°이다.」를 증명을 하고 있으며, 평행선의 성질은 그림으로 직관적으로만 다루면서도 2학년에서는 증명을 한 것으로 취급하고 정리라 하여 그에 따른 내용의 전개를 하고 있는 것은 재고되어 바람직한 방향으로 개선되어야 한다.

또, 교과서 중에는 증명의 정의에서 공준과 정리의 이용이 혼동되어 있다. 이를테면 삼각형의 합동 조건을 정리, 성질, 알려져 있는 사실 등으로 서술되어 있는데 용어 공준을 도입하여 명확히 판별하여 사용하는 것이 바람직할 것이다.

무엇보다도 증명을 어렵게 생각하고 회피하는 것을 막기 위하여 충분한 쪽수의 사용으로 증명의 도입에서 공준의 필요성과 그 활용에 대한 제시를 하여 수학 교육의 가장 중요한 목적 중의 하나인 논리적인 사고력을 키우도록 해야만 한다.

참 고 문 헌

1. 우리 나라 교과서
강옥기 외 2인 (2001). <u>중학교 수학 7-나</u>, (주)두산
강행고 외 9인 (2001). <u>중학교 수학 7-나</u>, (주)중앙교육진흥연구소
고성은 외 5인 (2001). <u>중학교 수학 7-나</u>, (주)블랙박스.

구광조 외 1인 (1997). 중학교 수학 1, 2, 지학사.
금종해 외 3인 (2001). 중학교 수학 7-나, (주)고려출판.
김연식 외 1인 (1997). 중학교 수학 1, 2, 두산동아.
김웅태 외 3인 (1997). 중학교 수학 1, 2, 한샘 출판사(주).
김호우 외 3인 (1999). 중학교 수학 1, 2, (주) 지학사.
박규홍 외 7인 (2001). 중학교 수학 7-나, 두레교육(주).
박두일 외 2인 (1999). 중학교 수학 1, 2, 교학사.
박배훈 외 1인 (1998). 중학교 수학 1, 2, (주) 교학사.
박윤범 외 3인 (2001). 중학교 수학 7-나, 대한교과서.
배종수 외 7인 (2001). 중학교 수학 7-나, 한성교육연구소.
신항균 (2001). 중학교 수학 7-나, 형설출판사.
양승갑 외 6인 (2001). 중학교 수학 7-나, (주)금성출판사.
오병승 (1997). 중학교 수학 1, 2, 바른 교육사.
이영하 외 3인 (2001). 중학교 수학 7-나, (주)교문사.
이준열 외 4인 (2001). 중학교 수학 7-나, (주)도서출판디딤돌.
조태근 외 4인 (2001). 중학교 수학 7-나, (주)금성출판사.
최용준 외 1인 (1999). 중학교 수학 1, 2, (주) 천재교육.
황석근 외 1인 (2001). 중학교 수학 7-나, 한서출판사.

2. 교육부 발행 관련 도서

교육부 (1994). 제6차 중학교 교육과정, 교육부.
_____ (1994). 제6차 중학교 수학 교육과정 해설, 교육부.
_____ (1997). 제7차 중학교 수학과 교육과정, 교육부.
_____ (1999). 중학교 교육과정 해설(Ⅲ)(제7차 교육 과정), 교육부.

3. 미국 교과서

Coxford, F. & Payne, J. N. (1987). *HBJ ALGEBRA 1*, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers,
Dressler & Keenam, E. P. (1990). *Integrated Mathematics Course I, II*, Amsco School Pub.,
Henderson K. B. 외 2인 (1962). *Modern Geometry*, McGRAW-HILL BOOK COMPANY
JACOBS, R. (1990), *GEOMETRY*, Freeman
Rising, G. R. 외 4인 (1985). *Unified Mathematics 1, 2*, HOUGHTON MIFFLIN COMPANY/BOSTON
Serra, M. (1993). *Discovering Geometry*, Key Curriculum Press,
ULRICH, J. F. (1987). *HBJ GEOMETRY*, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers

4. 일본 교과서

一松 信 외 30인 (平成 10年). 中學校 數學1, 學敎図書株式會社.
澤田利夫 외 21명 (平成 10年). 中學數學1, 教育出版.
赤 攝也 외 20인 (平成 10年). 新版 中學校數學1, 大日本図書.
藤田 宏 외 33인 (平成 10年). 新編 新しい數學 1, 東京書籍.
飯島康男 외 32인 (平成 9年). 新訂數學1年, 啓林館.

5. 기타

Greenberg, M. J. (1974). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, W.H. Freeman and Company
Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra, *Journal Research Mathematics Education* (NCTM)
Lowland, T. (2000). *The pragmatics of mathematics education*, Falmer Press.
Solow, D. (1990). *How to read and do proofs*, John Wiley & Sons
Todhunter, I. (1979). *Euclid Elements Book I-VI, XI and XII*. Everyman's Library
Velleman, D. J. (1994). *How to prove it, Cambridge* University Press

A Note on Treatment of Axioms for Proof in Middle School Mathematics

Kim, Heung Ki
Department of Mathematics Education, Dankook University
Seoul, 140-714, Korea; E-mail: hkkim@dankook.ac.kr

There are some problems in the introduction of proof in middle school mathematics. Among the problems, one is the use of postulates and the another is the methods of proof how to connect a statement with others. The first case has been treated mainly in this note.

Since proof means to state the reason logically why the statement is true on the basis of others which have already been known as true and basic properties, in order to prove logically, it is necessary to take the basic properties and the statement known already as true. But the students don't know well what are the basic properties and the statement known already as true for proving.

No use of the term postulation(or axiom) cause the confusion to distinguish postulation and theorem. So they don't know which statements are accepted without proof or not accepted without proof. To solve this problems, it is necessary to use the term postulate in middle school mathematics.

In middle school mathematics, we present some model of the introduction of proof which are used the postulates needed for the proof.