

# 3. 전기,전자,제어,계측 정보통신 특집기사

## 웨이브릿 변환과 그 응용 Wavelet Transformation and Its Application



이준탁  
J-T Lee

- 동아대학교 전기전자컴퓨터공학부 교수
- (사)한국박용기관학회 편집·회원이사
- 부산광역시 지방건설기술심의위원회 위원
- 울산광역시 지방건설기술심의위원회 위원
- 경상남도 지방건설기술심의위원회 위원
- E-mail : jtlee@mail.donga.ac.kr

### 1. 서 론

자연현상, 사회현상 및 공업기기에서 계측되는 여러 가지 량의 시간적 공간적인 변동은 일반적으로 신호로서 취급될 수 있다. 음성 및 전기회로의 전류는 전형적인 1차 신호의 예이며, 화상은 전형적인 2차 신호이다, 일반적으로 신호는 잘 알려져 있는 수학 함수를 사용해서, 간단히 표현할 수는 없다. 따라서, 그 성질을 정량적으로 파악하는 것이 어렵고, 여러 가지를 연구해서 신호의 성질을 조사하거나 신호를 해석하거나 신호를 처리할 필요가 있다.

컴퓨터가 보급된 현재, 신호는 이산적인 수치 데이터로 주로 취급된다. 따라서, 대량의 데이터를 신속하게 처리해서 필요한 정보를 효율 좋게 추출할 수 있게 된 듯하지만, 그 기초로 되는 것은 역시 신호처리이다. 웨이브릿 변환은 이같은 신호처리의 새로운 수법으로 최근 주목받고 있는 것이다. 주파수 영역에서 신호를 표현하는 푸리에 해석의 특징을 비롯하여 변동의 시간적 또는 공간적 추이도 동시에 취할 수 있는 즉, 시간 주파수 해석이 가능하다. 웨이브릿 변환에 관한 많은 연구가 진행되고 있다. 웨이브릿 변환은 이미 1930년대부터 알려진 개념이다. 1982년 프랑스의 석유 탐사 기사

Morlet가 실제로 응용을 행하면서부터, 그 실용성이 인정되었다. 이론물리학자인 Alex Grossmann과 협동 연구를 수행함으로써 당시 양자역학의 관점에서 웨이브릿 변환을 폭넓게 정의하게 하였다. 이로부터 물리학적인 직관에 기초한 웨이브릿의 이해가 가속화되었으나, 웨이브릿 변환 이론에 앞선 수학적 이론은 훨씬 이전으로 거슬러 올라간다. 즉 1807년 Joseph Fourier는 사인파와 정현파를 중첩시켜 다른 함수로 표현할 수 있는 Fourier 해석을 창안하였으며, 1807년 이후, 1909년의 Harr의 학위논문 부록에서 제시된 웨이브릿이 처음으로 수학적 과제로 언급되었다. Harr 웨이브릿은 유한한 구간 밖에서는 완전히 소멸되는 특성을 갖고 있었다. Harr 웨이브릿은 연속 미분 가능한 함수가 아니었으므로 그 응용이 제한되었다. 이후 수학자들은 주파수 해석의 개념으로부터, 스케일이 변화하는 수학적 구조를 생성하기 위한 스케일 해석으로 이행하여 갔다. 신호의 근사가 필요한 경우, 조금씩 추이시키며 스케일을 변화시켜 가면 어떠한 함수를 생성시킬 수가 있다. 이 같은 구조는 함수를 근사화시키는 데 사용될 수 있다. 각 단계마다 함수의 새로운 근사가 얻어 질 수 있다. 이런 류의 스케일 해석은 다른 스케일에서의 신호의 평균 섭동을 측정하기 때문에 노이즈에 덜 민감하다.

1930년대 여러 연구자들은 웨이브릿 이론에 근거가 될만한 가변 스케일 기저 함수부분에 크게 기여하였다.

1985년 Stephan Mallat는 필터에 기초한 신호 응축법과 직교 웨이브릿 기저와의 관계를 규명하였다. 이 작업은 Yves Meyer를 고무시켜 연속 미분가능한 웨이브릿의 구성을 가능하게 하였다. 이후 Meyer는 Grossmann 및 Daubechies와 협력하여 웨이브릿 프레임에 이용되는 연속 웨이브릿 변환의 이산공식을 발견해내게 하였다. Meyer는 실수의 직교함수를 구성할 수 없으므로, 정규 웨이브릿으로부터 직교 기저를 발견하게 되었다. 이후 Daubechies는 compact support를 갖는 직교 웨이브릿을 구성하게 되었다. 그 후 1989년경에 이르러, Grossmann, Meyer, Mallat 등에 의해서, 수학적 기초가 구축되었다. 특히, 다중해상도 해석이라고 하는 개념이 확립되고, 1988년 Daubechies에 의한 직교 웨이브릿이 발표되면서부터, 일반화되기 시작하였다. 이처럼, 웨이브릿 해석은 지구 물리학분야 즉, 열대의 대류현상(Weng and Lau 1994)이나 엘니뇨현상(Gu and Philander 1995, C. Torrence and G.P. Compo 1997)등에도 응용되고 있다. 웨이브릿의 응용 범위는 지극히 넓어서 신호의 특정 부분의 주파수를 조사할 수도 있고, 노이즈를 포함한 신호를 평활화하거나, 신호와 노이즈의 경계를 검출할 수도 있으며, 신호의 압축, 제어 시스템의 해석 등에도 응용될 수 있다.

따라서, 본 논문에서는 독자들이 웨이브릿 변환 이론을 이해하는 데 기본이 될만한 기본적인 정의와 웨이브릿 변환과 기존의 푸리에 변환과의 차이점을 중심으로 웨이브릿 변환 이론의 발전 과정을 고찰해보고, 기본 웨이브릿 함수들의 생성과정 및 웨이브릿 변환 몇 가지 응용 사례를 기술하는 것으로 한다.

## 2. 웨이브릿에 관한 기본 정의

웨이브릿이란 'wave(파)+let(작은)'의 합성어로서 그림 1과 같이 스케일에 따라 국재하는 작은 파를 나타내는 함수를 의미한다.

이처럼 웨이브릿은 삼각함수나 대수함수 같은 특

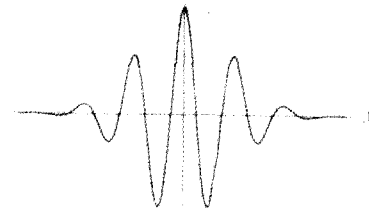


그림 1 웨이브릿의 예

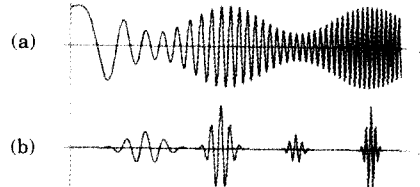


그림 2 신호와 추출된 신호

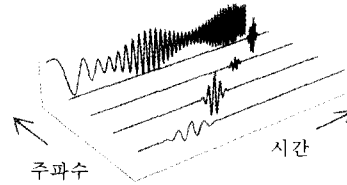


그림 3 시간-주파수 평면상의 신호

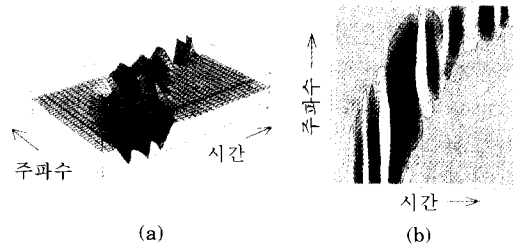


그림 4 시간-주파수 해석

정의 함수가 아니라 국재하는 파를 나타내는 다양한 종류의 함수를 총체적으로 일컫는 말이다. 그림 2(a)와 같은 시간축  $x$ 에 대한 신호  $f(x)$ 는 진폭과 주파수가 시간에 따라 변화 되고 있다. 그림 2(b)는 시간축 상에서 적의하게 조절된 스케일  $a$ 와 천이  $b$ 를 갖는 그림 1의 웨이브릿 함수  $\Psi(x-b)/a$ 를 확대 및 축소하면서 신호의 진폭과 주파수를 추출한 것이다.

또한 몇 개 시점의 시각에 대해서만 추출한 그림 3과는 달리 연속 시간값에 대해 시간-주파수 평면에 투시하면 그림 4와 같아진다. 이 그림은 시간에 따른 진폭과 주파수의 변화를 쉽게 이해할 수

있다. 그림 4(a)는 신호의 크기를 신호 평면상에 입체적으로 투시한 것이고, 그림 4(b)는 이를 등고선 형태로 도시한 것이다. 검은 부분은 음의 값을 가지며, 흰 부분은 양의 값을 의미한다. 시간이 증가함에 따라 국소적인 주파수가 점차 증가하고 있음을 쉽게 고찰할 수 있다.

다음은 이같은 웨이브릿 해석에 가장 기본적으로 필수적인 몇가지 사항을 정의한다.

정의 1 스케일 함수

주어진 수열  $\{p_k\}$ 에 대해 2 스케일 관계로 불리워지는

$$f(t) = \sum_k p_k \phi(2t-k) \quad (1)$$

를 만족하는 함수  $\phi(t)$ 를 스케일함수라 한다.

정의 2 기본 웨이브릿 함수

시간 및 주파수 영역에서 국재하고

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2)$$

와 같은 허용조건(admissible condition)을 만족하는 함수를 기본 웨이브릿함수(기본)이라고 하며, 스케일 함수로부터 임의 수열  $\{q_k\}$ 에 대해

$$\psi(t) = \sum_k q_k \phi(2t-k) \quad (3)$$

로 구성된다.

정의 3 연속 웨이브릿 변환

기본 웨이브릿 함수를 배 스케일하고 만큼 천이시킨 함수

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (4)$$

$\psi(a, b)$ 를 이용하여, 해석할 함수  $f(t)$ 와의 관계가 내적과 같은

$$W(a,b) = \langle \psi(a, b) | f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}^*(t) f(t) dt \quad (5)$$

로 되는 관계를 가지며, 그림 5와 같이 전 해석 함수 영역에 걸쳐 연속적으로 천이되는 웨이브릿에 의한 변환을 연속 웨이브릿 변환이라고 한다. 첨자 \*는 복소공액을 의미한다.

따라서, 그림 6와 같이, 스케일  $a$ 가 커지면 웨이

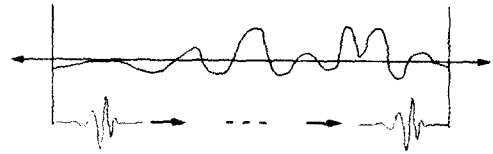


그림 5 연속 웨이브릿 변환의 모습

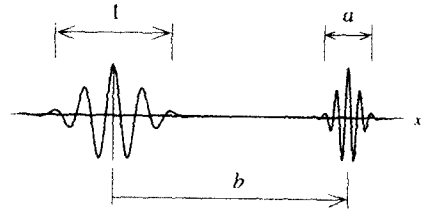


그림 6 기본 웨이브릿의 스케일와 천이

브릿은 팽창되어 주파수는 낮아지고,  $a$ 가 작아지면 웨이브릿은 압축되어 고주파수로 된다. 또한  $b$ 는 시간축 상에서의 천이를 나타낸다.

정의 4 연속역 웨이브릿 변환

웨이브릿 변환으로부터 원래의 신호를 복원하고자 할 때 웨이브릿 변환 신호  $W(a, b)$ 와 웨이브릿 함수  $\psi$ 의 연속 합성적분으로 표현된 공식

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{1}{a^2} da db \quad (6)$$

을 역 웨이브릿 변환이라고 한다. 여기서  $C$ 는  $\psi$ 의 푸리에 변환인  $\Psi$ 에 대해

$$C = \int_0^{\infty} \frac{\Psi(\omega), (\omega)}{\omega} d\omega < \infty \quad (7)$$

를 의미한다.

정의 5 이산 웨이브릿 변환

연속 웨이브릿 변환에서는 모든 스케일에서 웨

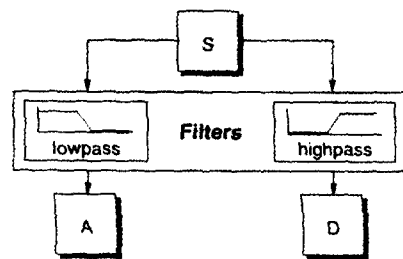


그림 7 두 개의 필터를 거친 두 개의 신호

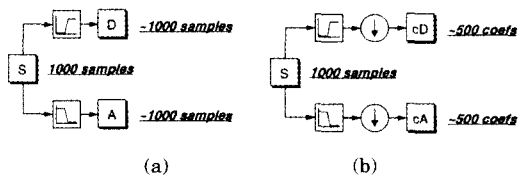


그림 8 두 배로 증가된 데이터 수를 줄이기 위한 Downsampling 수행

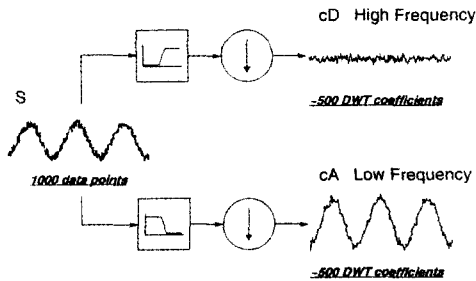


그림 9 노이즈가 함유된 점현신호의 이산 웨이브릿 변환

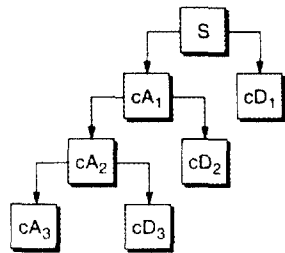


그림 10 다단 분해

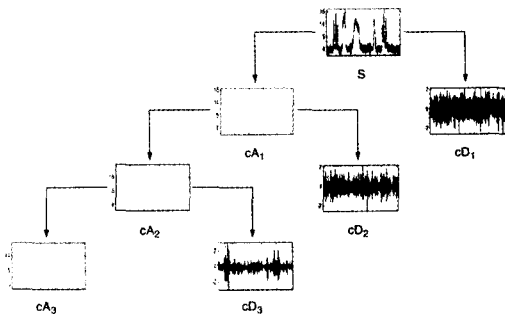


그림 11 신호의 복원

이브릿 계수를 구하게 되는 데 많은 시간과 데이터의 양이 방대해지게 된다. 따라서, 1988년 Mallat에 의해 개발된 2의 멱승에 기초한 스케일과 천이를 사용한다면 데이터의 양과 계산 시간을 상당히

줄일 수 있게 된다. 이 알고리즘은 처리될 신호가 고주파수 및 저주파수 성분을 갖고 있음에 착안하여 일종의 필터 기술을 활용하는 것이다. 신호 S는 그림 7과 같은 두 개의 필터를 거쳐 두 개의 신호 즉, 저역 통과 필터에서는 A(approximation)와 고역 통과 필터에서는 D(details) 신호가 출력된다. 대부분의 경우 저주파수 부분의 A 성분이 의미를 가진다. 그러나, 이 경우, 데이터의 수가 그림 8(a)와 같이 두 배로 증가하게 되므로, 데이터의 개수를 줄이기 위해 그림 8(b)와 같이 Downsampling을 수행한다. 이산 웨이브릿 변환에 대한 실례는 그림 9와 같다.

그림 9는 1단인 경우이지만, A에 대하여 다시 웨이브릿 변환하면 그림 10과 같이 다단 분해도 가능하다. 그리고 A와 D를 이용하여와 같이 신호를 복원하는 경우는 그림 11과 같다.

### 3. 웨이브릿 변환의 역사적 개관

수학의 역사에 있어서, 웨이브릿 해석은 그 기원이 다양하다. 대부분의 연구는 1930년대에 행해졌다고 볼 수 있다.

#### 3.1 1930년 이전

웨이브릿 변환에 앞선 주된 수학 분야는 1807년 주파수 해석에 대한 이론을 주장한 Joseph Fourier와 함께 시작된 푸리에 급수 변환으로 볼 수 있다. 그는 임의의  $2\pi$ 주기 함수  $f(x)$ 는

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (8)$$

와 같이 푸리에 급수의 합으로 표현할 수 있음을 제안하였다. 푸리에의 주장은 그간 수학자들이 가지고 있었던 함수에 관한 관념을 전진시키는 데 큰 역할을 담당하였다. 1807년 이후, 함수와 푸리에 급수의 수렴, 직교 시스템의 의미들에 대한 연구를 진행하여, 진부한 주파수 해석의 개념으로부터 스케일 해석의 관념으로 진전하게 되었다. 어떻게 함수를 구성하고 지정된 양만큼 추이시키고 스케일을 변화시키느냐가 관건이었다. 웨이브릿 변환은 1907년 A.Harr(1907)의 학위 논문 부록에서 처음으로 언급되어졌다. Harr 웨이브릿의 기본적인 특징은 유한 구간 밖에서 0으로 되는 compact sup-

port를 갖는다는 것이다. 그러나, 불운하게도 Harr 웨이브릿은 연속 미분이 불가능하여 응용분야가 제한되었다.

### 3.2 1930년대

이 시대에는 기타의 많은 독립적인 연구 그룹들이 가변 스케일 기저 함수들에 대하여 연구를 진행하였다. 기저 함수의 개념과 가변 스케일 함수를 이해하는 것이 웨이브릿 변환을 이해하는 주요 요소로 인식되었으며, 1930년대의 물리학자 Paul Levy는 Harr 기저 함수로 불리우는 가변 스케일 기저 함수를 사용하여, 랜덤 신호의 일종인 Brown 운동을 연구하였다. 그는 복잡한 Brown 운동을 설명하는 데 있어 Harr 기저 함수가 푸리에 기저함수보다 우수함을 발견하였다. 1930년대에서의 또 다른 연구는 Littlewood, Paley 및 Stein에 의하여 함수의 에너지를

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \tag{9}$$

로 계산할 수 있음이 제안되었다. 이로부터 에너지가 몇몇 점들에 집중되어 있는가 또는 광범위하게 분포되어 있는가에 대해 각기 다른 결과를 유추해 낼 수 있게 하였다. 이러한 연구 결과는 1980년대 초반 David Marr의 웨이브릿 변환을 사용한 수치적 영상 처리시 매우 유효한 알고리즘으로 활용되었다.

### 3.3 1960-1980년대

1960-1980년대의 수학자 Guido Weiss 및 Ronald R.Coifman는 통상의 함수로 원자를 발견하고, 이들 원자를 사용해서 함수 공간에 놓인 모든 원자들을 재구성할 수 있는 조합규칙을 발견할 목적으로 원자로 명명한 함수 공간의 가장 간단한 원소들에 대해 연구한 바 있다. 1980년, 물리학자 Grossmann과 공학자 Morlet는 양자물리학과 관련지어 웨이브릿을 폭넓게 정의하였으며, 물리학적 직관에 기초해서 웨이브릿을 고찰할 수 있게 하였다.

### 3.4 1980년대 후기

1985년 Stephan Mallat는 디지털 신호 처리에

대한 연구를 통하여 웨이브릿을 획기적으로 발전시켰다. 그는 횡축 mirror 필터, 그리고 피라미드 알고리즘 및 직교 웨이브릿 기저 간의 관계를 규명하였다. Y. Meyer는 이들의 연구 결과에 고무되어 최초로 웨이브릿을 구성하였다. Harr 웨이브릿와는 달리, Meyer 웨이브릿은 연속적으로 미분 가능하나, compact support를 갖지 못했다. 2년 뒤, Ingrid Daubeiches는 Mallat의 업적을 사용한 일련의 직교 웨이브릿 함수 기저를 구성하는 데 성공함으로써, 웨이브릿 응용을 가속화시키게 된다.

## 4. 푸리에 해석

함수를 사인과 코사인의 중첩으로 표현한 푸리에 해석은 미방의 해석적인 해 및 수치적인 해를 구하거나, 통신 신호의 해석하고 취급하는 경우 등에 매우 폭넓게 이용되는 도구가 되었다.

### 4.1 푸리에 변환

푸리에 변환은

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \tag{10}$$

로 정의되어지며, 여기서 신호  $f(t)$ 의 푸리에 변환은 기저함수로 투영된 것과 같은 의미를 갖는다. 이 경우의 기저함수는 복소 지수함수  $e^{-j\omega t}$ 로 표현된 사인 및 코사인 함수로 볼 수 있다. 이 변환의 유용성은 시간 영역에서 주어진 신호를 주파수 성분에 대해 해석할 수 있다는 장점이 있다. 해석을 위해 시간 영역의 함수를 주파수 영역의 함수로 변환시키는 것이 선행되어야 한다. 따라서, 신호는 변환된 함수의 푸리에 계수가 각 주파수마다의 사인 성분과 코사인 성분으로 표현되므로, 각각의 주파수 성분에 대해 해석하는 것이 가능하다. 그리고, 역 푸리에 변환은 주어진 데이터를 주파수 영역에서 다시 시간 영역으로 변환시키는 데 사용된다.

### 4.2 이산 푸리에 변환

DFT는 샘플링된 유한한 샘플 데이터의 함수를 푸리에 변환하는 경우이다. 샘플링된 각 데이터들은 여타의 다른 시간 영역에서도 유사한 특성을 갖는다고 가정한다. DFT는 연속 푸리에 변환과 유

사하게 대칭특성이 있으며, 이산 역 푸리에 변환에 대한 공식은 푸리에 변환과 거의 동일하다. 즉 이산화된 어떤 신호에 대한 이산 푸리에 변환은 N개의 샘플링 데이터에 대해

$$F_N(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{j2\pi n \omega / N} \quad (11)$$

로 정의된다.

### 4.3 윈도우 푸리에 변환

푸리에 변환의 시간 주파수 분해능을 향상시키기 위하여,

$$STFT(s, \omega) = \int f(t)g(t-s)e^{-j\omega t} dt \quad (12)$$

와 같은 단시간 푸리에 변환(Short Time Fourier Transform) 또는 Gabor 변환으로 일컬어지는 기법이 사용된다. 이는 유한 길이의 윈도우  $g(t)$ 를 사용해서 신호를 따라 s만큼씩 연속적으로 이동시켜가며, 신호  $f(t)e^{-j\omega t}$ 와 가우스 함수 형태의 함수  $g(t)$ 를 합성적분한 것과 같다. 즉, 신호는 사인 및 코사인 함수를 윈도우로 표현한 기저 함수에 의해 분해되고, 이들 각각의 오버 랩된 윈도우에 푸리에 변환을 수행하면, 시간 영역에서 전력 스펙트럼 형식의 시간 주파수 그래프를 얻을 수 있다. 그림 12와 같이 아래 부위의 기저 함수는 저주파수 성분이며, 그림의 상부에 위치한 부분은 고주파수 성분을 갖는다. 시간 주파수 그래프는 종종 신호 스펙트럼으로 일컬어지기도 한다. 그러나, 변환할 신호  $f(t)$ 가 비주기적이면 주기적인 신호인 사인과 코사인 함수의 합으로 정확하게 표현되지 못한다. 한편, 신호를 인공적으로 주기적인 함수로 만들 수 있으나, 각 단부들에서의 연속성들이 추가적으로 가정되어야 한다. 윈도우 푸리에 변환은 비주기적인 신호를

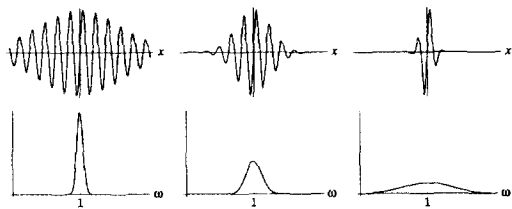


그림 12 단시간 푸리에 변환에 의한 시간 주파수 해석의 단위

보다 잘 표현할 수 있는 한 방법으로서, 시간 영역과 주파수 영역의 정보를 동시에 표현할 수 있다.

### 4.4 고속 푸리에 변환

푸리에 변환은  $n$ 개의 샘플링 데이터에 대해  $nn$ 의 행렬에 대해  $n^2$ 의 산술적인 연산을 요구하므로, 샘플링 데이터의 수가 커질수록 연산은 복잡해지게 된다. 그러나, 등간격으로 샘플링되어진다면 푸리에 행렬은 소수의 sparse 행렬과의 곱으로 분해될 수 있으며, 결과적으로 인수들은  $n \log n$ 회의 산술을 요하는 벡터로 수정될 수 있다. 이를 일컬어 Fast Fourier Transform이라고 한다.

## 5. 웨이브릿 변환과 푸리에 변환

fft와 dft는 선형연산으로 된다. 이들 변환에 포함되는 행렬의 수학적 특성은 유사하다. 결과적으로 두 변환은 다른 sdud역의 함수 공간으로 회전시킨 것과 같은 것으로 인식될 수 있다. fft의 경우, 새로운 영역은 사인과 코사인의 기저함수를 포함한다. 웨이브릿의 경우는 웨이브릿 및 기본 웨이브릿 또는 해석 웨이브릿라 불리는 다소 복잡한 기저함수를 사용한다. 두 변환은 상사성을 갖고 있다. 전력 스펙트럼(어떤 주파수 구간에서 어느 정도의 전력을 갖는가?)이나 특정 주파수를 발체해내고 전력 분포를 계산하는데 유용한 scalegram(후술됨)과 같은 수학적 도구를 이용해서 기저함수들은 주파수로 국재화될 수 있다.

### 5.1 푸리에 변환과 웨이브릿 변환과의 차이점

두 변환이 갖는 주된 차이점은 개개의 웨이브릿 함수가 공간상에서 국재화된다는 것이다. 푸리에 사인 및 코사인 함수는 그렇지 않다. 이같은 국재화 특성은 주파수의 웨이브릿 국재화로 나타나는데, 웨이브릿을 사용한 많은 함수와 연산자를 웨이브릿을 사용해서 웨이브릿 영역으로 변환할 때, sparse하게 만든다. 이러한 스파스한 특성은 데이터 압축시, 영상의 특징 추출 및 시계열에서 발생되는 노이즈의 제거 등에 매우 유용하게 활용된다. ft와 웨이브릿 변환간에 또다른 특징의 하나는 시

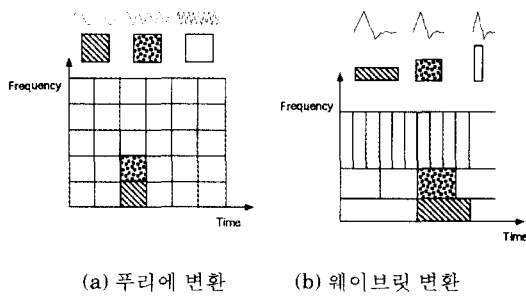


그림 13 기저함수, 시간 주파수 타일과 시간 주파수 평면의 수렴

간 주파수 분해능의 차이를 확인할 수 있는 한가지 방법은 시간 주파수 평면으로 기저함수가 수렴한다는 것이다. 그림 1은 윈도우 푸리에 변환을 도식한 것이다. 윈도우는 구형과이다. 구형과 윈도우는 특수한 대역의 윈도우에 fitting시키기 위해 사인 및 코사인 함수를 절삭하게 된다. 하나의 윈도우가 윈도우 푸리에 변환의 모든 주파수들에 대해 사용되므로 해석의 분해능은 시간 주파수 평면의 모든 공간에서 동일하다.

웨이브릿 변환의 이점은 윈도우가 가변된다는 것이다. 신호의 불연속성을 추출하려면, 매우 짧은 기저 함수를 사용한다. 동시에 세부적인 주파수 해석을 얻으려면, 매우 긴 기저함수를 사용해야 한다. 이를 얻으려면 매우 짧은 고주파 기저함수와 매우 긴 저주파수 함수를 사용한다. 그림 13(b)는 하나의 웨이브릿 함수인 Daubechies 웨이브릿을 사용하여 시간 주파수 평면으로 수렴되는 모습을 보이고 있다. 한가지 염두에 두어야 할 것은 웨이브릿 변환은 사인함수와 코사인 함수만을 이용하는 푸리에 변환과는 달리 하나의 기저함수를 갖지 않고, 무한개의 기저함수를 가질 수 있다는 것이다. 따라서, 웨이브릿 해석은 푸리에 해석과 달리 시간-주파수 해석법으로 애매해질 수 있는 정보들에 직접 접근 할 수 있다는 것이다.

5.2 웨이브릿 함수의 종류

웨이브릿 변환은 무한 집합으로 볼 수 있다. 사용하는 웨이브릿 군에 따라 공간 상에서 얼마나 완벽하게 국재화되며, 얼마나 매끈할 것인지에 따라 달라지게 된다. 몇 종류의 웨이브릿 기저함수는 프

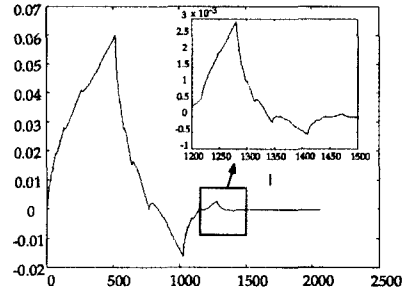


그림 14 Daubechies 웨이브릿 군을 사용한 수렴패턴

랙탈 구조를 갖는다.

Daubechies 웨이브릿 군은 그림 14과 같다.

각 웨이브릿군은 계수의 수나 반복 정도에 따라 달라지게 된다. 웨이브릿은 0으로 되는 순간의 수로 종종 분류되기도 한다. 이것은 만족되어야 할 계수들 간의 수학적 관계를 나타내며, 계수들의 수에 직접 관계된다.

웨이브릿 해석시 해석 웨이브릿 또는 기본 웨이브릿이라고 하는 웨이브릿 기본 함수를 반드시 사용해야 한다. 순시 해석은 기본 웨이브릿이 압축된 고주파부분으로도 수행되지만, 주파수 해석은 웨이브릿이 확대된 저주파 부분으로 표현된다. 함수의 본래 신호가 웨이브릿 확장으로 표현될 수 있으므로, 데이터의 연산은 상응하는 웨이브릿 계수만을 사용해서 수행될 수 있다. 이제 웨이브릿 변환 이론에 대해 고찰 해보자. 웨이브릿 변환은 사인과 코사인을 이용하는 푸리에 해석과는 달리 특수한 웨이브릿 함수를 이용한다. 그러나, 웨이브릿 해석은 웨이브릿 함수를 임의로 선택할 수 있다는 것이 문제이다. 웨이브릿 함수를 선택할 때, 고려해야 할 요소는 의외로 많다. 먼저 이들을 구분해 보면 다음과 같다. 웨이브릿 변환은 연속함수와 이산 변환으로 대별되는 데, 연속 웨이브릿 변환은 허용 조건을 만족하기만 하면 어떠한 함수도 기본 웨이브릿이 될 수 있다. 그러나 실제의 응용에서는 시간 주파수 해석에 적합한 함수만이 사용된다. 이산 웨이브릿 변환에서의 웨이브릿은 반드시 기저함수로 되어야한다, 그래서 응용상 컴팩트 서포트를 가지는(함수치가 0이 아닌 구간이 유한함) 함수가 선호된다. 이들 조건을 만족하는 웨이브릿은 그리 많지 않다. 이하에 언급되는 기본 웨이브릿은 그 많

은 웨이브릿 중의 일부에 지나지 않는다.

1) Harr 웨이브릿 :  $\Psi(x)$

Harr에 의해 1909년경에 만들어 졌으며, 정의 1에서  $p_0=p_1=1$ 인 경우에 해당되는 Harr 스케일링 함수  $\phi_H(2x)$ 와  $\phi_H(2x-1)$ 가

$$\psi_H(x) = \phi_H(2x) - \phi_H(2x-1) \quad (13)$$

와 같이 조합된 것이다. 그림 15와 같이 당초 웨이

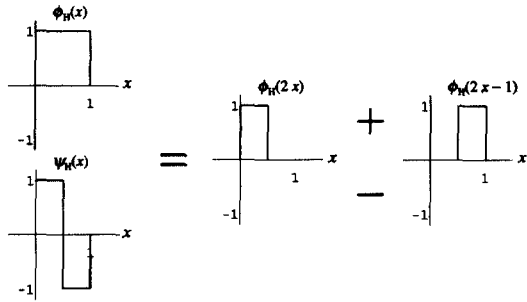


그림 15 Harr 웨이브릿

브릿이라고 불리워지지 않았으나 다중 해상도 해석에서 사용된다.

2) Gabor 웨이브릿

푸리에 변환의 기저에 사용되는 지수함수  $e^{j\omega t}$ 는 시간영역에서는 무한히 확장된다. 이로 인해 푸리에 변환은 신호의 시간적 정보를 소실하며, 이 결점을 보완하기 위해 항함수  $\omega(t)$ 를 사용하여  $\omega(t)e^{j\omega t}$ 로 국재하는 함수를 생성한다. 이것을 사용해서 수정한 푸리에 변환을 단시간 푸리에 변환이라고 한다 Gabor는 1946년에 창함수로서 가우스 함수인  $e^{-t^2}$ 를 사용하여 다음과 같은 단시간 푸리에 변환을 생각하였다.

$$F_G(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-b)^2}{\sigma^2}} e^{j\omega t} f(t) dt \quad (14)$$

여기서,  $\sigma$ 는 사전에 선택되어지고, 이것을 Gabor 변환이라고 부르며,  $F_G(\omega, b)$ 는 신호  $f(t)$ 의 신호 평면에 대한 표현이다, 그러나, Gabor 변환에서는 창 함수의 폭은 주파수에 관계없이  $\sigma$ 로 고정되며, 신호의 최소단위의 관점에서 보면 효율이 나쁘다. 이 결점을 보완하기 위해 기본 웨이브릿을

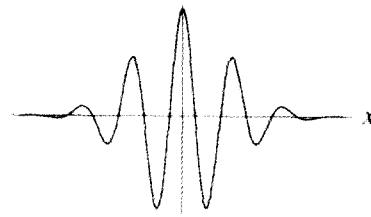


그림 16 Gabor 기본 웨이브릿의 실수부

$$\psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} e^{jx} \quad (15)$$

로 되는 웨이브릿 변환을 생각할 수가 있다. 이 함수를 Gabor의 기본 웨이브릿이라고 부른다. 그림 16는 인 경우, Gabor 기본 웨이브릿의 실수부를 도시한 것이다. 이것은 주로 연속 웨이브릿 변환에 이용되며 신호의 주파수 성분을 추출하는 데 적합하다. 그러나 기저 함수로 되지 못하므로, 이산 웨이브릿 변환에는 사용되지 않는다.

3) Malver 웨이브릿

Gabor 웨이브릿이 기저함수로 사용될 수 없으므로, 창함수  $\omega(t)$ 를 면밀히 고찰해서 1988년 Malver는 컴팩트 스포트를 갖는 매끄러운 창함수  $\omega(t)$ 에 의해 Gabor 웨이브릿의 수정판을 고안하였으며, 이를 기저함수로 할 수 있음을 나타내었다. 이것은 주파수의 분해능이 좋으므로 음성 신호의 해석에 사용되고 있다.

4) Mexican hat 웨이브릿

Gabor 웨이브릿과 근사한 것으로서 Gauss 함수의 2계 도함수를 사용할 수가 있다.

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2} \quad (16)$$

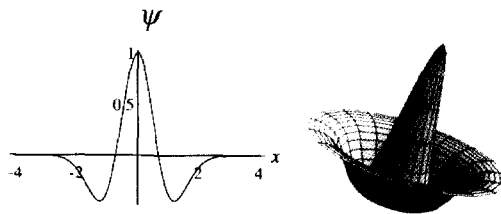


그림 18 Mexican hat 웨이브릿



이것은 그림 18에 도시한 바와 같이 Gabor 웨이브릿과 유사하다. 맥시칸 hat이라고 하는 이름은 이것을 대칭축 주위로 회전시킬 수 있는 곡면의 형태를 가지고 있기 때문에 명명된 것이다.

5) French hat

맥시칸 hat의 매끄러움을 회생시켜 전체적인 형태를 구분적으로 근사한 함수로서

$$y(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{2}, & -3 \leq x < -1 \text{ 또는 } 1 \leq x < 3 \\ 0, & \text{기타} \end{cases}$$

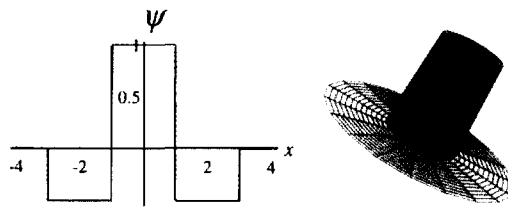


그림 19 French hat 웨이브릿

(17)

로 정의되며, 그림 19와 같이 표현된다.

6) Shannon 웨이브릿

먼저  $f(x) = \text{sinc}x$ 로 두자. 여기서,

$$\text{sinc}x = \frac{\text{sinc}\pi x}{\pi x} \tag{18}$$

는 그림 20과 같이 이의 푸리에 변환 가 Harr의 스케일 함수(정확하게는 스케일하고 이행시킨 것)

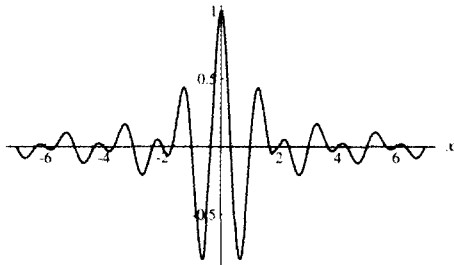


그림 20 Shannon 웨이브릿

와 같다. 이것을 기초로 다음의 기본 웨이브릿을 만들 수가 있다.

$$\psi(x) = 2f(2x) - f(x) \tag{19}$$

이것은 Shannon 웨이브릿이라고 한다,

7) Meyer 웨이브릿

Shannon 웨이브릿의 꼬리부가 길므로 푸리에 변환은 연속이 되지 않는다. 푸리에 변환의 각을 등글게 하면 ψ의 시간 축에서의 국재성은 좋아진다. 이런 아이디어에 기초해서, Meyer에 의해 구성된 것이 Meyer 웨이브릿이다. 다음과 같은 성질을 갖는 함수(ω)로 한다. 즉,  $-2\pi/3 \leq \omega \leq 2\pi/3$  일 때,  $(\omega) = 1$ ,  $|\omega| \geq 4\pi/3$  일 때,  $(\omega) = 0$  및  $2\pi/3 < |\omega| < 4\pi/3$  일때

$$|(\omega - \pi)|^2 - |(\omega - \pi)|^2 = 1 \tag{20}$$

를 만족한다. 예를 들면,

$$\phi(x) = \left(\frac{g(x)}{g(1)}\right)^{1/2}, g(x) = \int_0^x t^n(1-t)^n dt \tag{21}$$

이면 된다. 이 함수의 푸리에 역변환을

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega)e^{i\omega x} d\omega \tag{22}$$

로 두면, Meyer 웨이브릿은

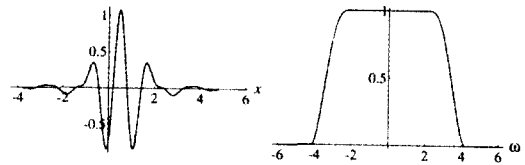


그림 21 Meyer 웨이브릿

$$y(x) = 2\phi(2x-1) - \phi(x-1/2) \tag{23}$$

로 주어진다.  $n=3$  일 때, ψ(x)와 (ω)를 그림 21에 나타낸다. 콤팩트 서포트는 아니지만 무한회 미분 가능하다.

8) Daubechies 웨이브릿

1988년경에 Daubechies에 의해 만들어진 직교

(49)

웨이브릿이며, 직교기저를 만드는 연속이며 컴팩트한 서포트를 갖는 웨이브릿이 최초로 등장한 것이다. 자연수  $N$ 에 의해 번호가 붙여지는 일련의 스케일링 함수  $\phi_N$ 와 이에 대응하는  $\psi_N$ 가 있으며,  $N$ 과 함께 매끄러움이 증가한다. 즉,

$$\begin{aligned} \phi_N(x) &= 2 \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi(2x-k) \\ \psi_N(x) &= \sum_{k=-2N}^{-1} q_k \phi_N(2x-k) \quad q_k = (-1)^k p_{1-k} \end{aligned} \quad (25)$$

로부터

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} p_k &= 2 \\ \sum_{k=0}^{2N-1} p_k p_{k-2m} &= 0, \quad m=1,2,\dots,N-1 \\ \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k k^l p_k &= 0, \quad l=0,1,\dots,N-1 \end{aligned} \quad (26)$$

를 만족하는  $2N$ 개의 식으로부터 구해진다. 예를 들어,  $N=3$ 인 경우는

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{16}(1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) \\ p_1 &= \frac{1}{16}(5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) \\ p_2 &= \frac{1}{8}(5 - \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) \\ p_3 &= \frac{1}{8}(5 - \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) \\ p_4 &= \frac{1}{16}(5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) \\ p_5 &= \frac{1}{16}(1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) \end{aligned} \quad (27)$$

와 같으며,  $N=10$ 인 경우도 유사하게 구해낼 수 있다. 그림 22는  $N=3$  및  $N=8$ 인 경우인 Daubechies 웨이브릿을 나타낸 것이다. 인 경우,

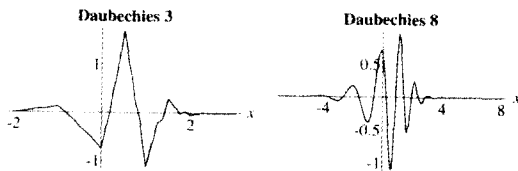


그림 22 Daubechies 웨이브릿

$\phi_1$  및  $\psi_1$ 은 각각 Harr의 스케일링 함수와 웨이브릿으로 귀착한다.

### 9) Symlet 웨이브릿

Daubechies 웨이브릿은 대칭성을 갖는 디지털 필터로 취급될 때의 위상 특성이 선형이 아니므로, 위상 특성이 가능한 한 선형에 가깝게 되려면, 완벽한 대칭성을 갖는 직교 웨이브릿을 실제로 갖지 않는 것으로 알려져 있지만, 일의적인 아닌 해들 중에서 거의 대칭에 가까운 것으로 선택할 수가 있는 데, Symlet 웨이브릿은 이것을 개량하기 위해 극력 비대칭성을 억제한 직교 웨이브릿이며, Daubechies에 의해 얻어진 값과는 다른  $\{p_k\}$ 에 의해 만들어진 것이다. 그림 23은 몇 일 때의 Symlet 웨이브릿을 도시한 것이다.

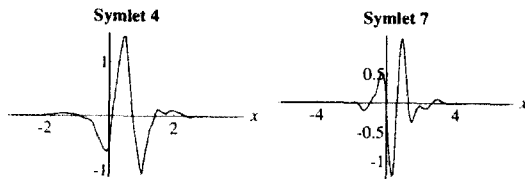


그림 23 Symlet 웨이브릿

### 10) Coiflet

Daubechies는 다음과 같이 모멘트가 0 즉,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^l \psi(x) dx = 0, \quad l=0,1,N-1 \quad (28)$$

로 되는 조건을 만족한다. 따라서, 전개 계수의 계산에서

$$d_k^{(l)} = \int \psi_N(2x-k) f(x) dx \quad (29)$$

로 되며  $f(x)$ 가  $N-1$ 차 다항식이면  $d_k^{(l)}=0$ 으로 된다. 스케일함수에도 동일한 조건을 부과하면 응용에 적합하게 된다. Coifman은 다음의 조건을 제창하였다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^l \phi(x) dx = 0, \quad l=0,1,N-1 \quad (30)$$

이 조건을 만족하는  $\phi$ 와 기본 웨이브릿이 Daubechies에 의해서 만들어 졌는데 이를 Coiflet 이라고 한다.

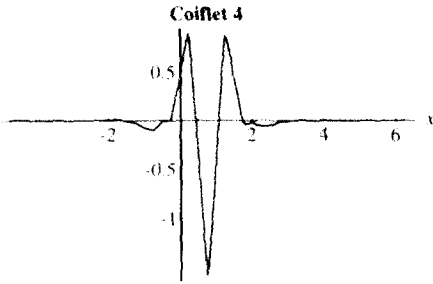


그림 24 Coiflet 웨이브릿

$$x^N R(1-x) + (1-x)^N R(x) = 1 \quad (31)$$

을 만족하는 하나의 특수해  $R(x)$ 와 우변이 0으로 되는

$$x^N(1-x)^N T(x) + (1-x)^N x^N T(1-x) = 1 \quad (32)$$

를 만족하는 보조해  $x^N T(x)$ 로 부터 일반해는  $R(x) + x^N T(x)$ 로 주어진다. 그림 24은 이로부터  $N=4$ 일 때의 Coiflet를 도시한 것이다.

11) Spline 웨이브릿

Harr 함수의 최대의 결점은 연속이 아니라는 것이다. Daubechies 함수는 컴팩트한 서포트, 직교성, 연속성이 현저하나, 함수 자체가 아주 복잡하고 기저의 함수로 표현할 수가 없다. 따라서, 임의 변수값에 대한 함수값을 용이하게 구할 수도 없으며, 그 적분 또한 용이하지 않다. 그러나,

$$N_2(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{기타} \end{cases} \quad (33)$$

로부터, 그림 5.1과 같이 구간 직선인 함수의 support는  $\text{supp}N_2 = [0, 2]$ 이며, 2계 스플라인은



그림 25 2계 스플라인

다음과 같이 간단한 2 스케일 관계를 만족한다.

$$N_2(x) = \sum_{k=0}^2 p_k N_2(2x-k) \quad p_1 = 1 \quad (34)$$

여기서 스케일은 각각  $p_0=1/2$ , 및  $p_2=1/2$ 이다. 그리고, 직교하지 않는 기저에 대해서는 쌍대 기저를 만들 수가 있다.  $N_2$ 에 쌍대인 기저는 다음의 함수로부터 생성된다.

$$(x) = \sum_k \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^k N_2(x-k) \quad (35)$$

이를 나타낸 것이 그림 26이다.

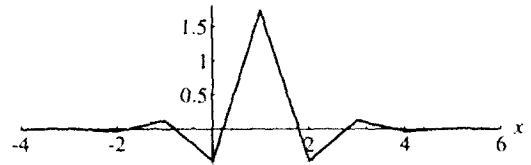


그림 26 2계 스플라인에 쌍대인 함수

$m$ 계의 현수형 스플라인은 2 스케일을 만족하는 함수이나, 정수만큼 천이되므로 직교하지 않는다. 직교 웨이브릿을 취급하는 방식에 따라 2가지의 스플라인 웨이브릿이 제시된다. 하나는 스케일 함수의 선형결합으로 직교화하는 방법으로 구성되며, Battle-Lemarie의 스케일 함수와 기본 웨이브릿으로 불리운다. 직교 기저의 각각은 무한개의 B 스플라인을 선형 결합한 것이며, 따라서, 서포트 컴팩트하지 않다. 특히 2계의 스플라인으로부터 만들어진 직교화 웨이브릿 스플라인은 Franklin 웨이브릿으로서 알려져 있다.

다른 하나는 직교화를 행하지 않고 B 스플라인을 그대로 기저로 사용하는 방법으로 필요에 따라 이것에 직교하는 쌍대인 기저를 사용한다. 이와 같은 계를 쌍 직교라한다. 1991년에 Hui와 Wang가 컴팩트한 서포트의 B 스플라인 웨이브릿을 만들

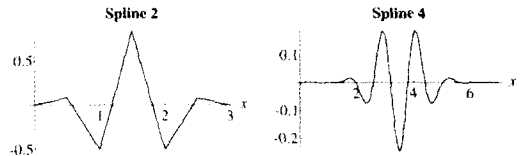


그림 27 스플라인 웨이브릿

었다.  $m=1$  및  $m=4$ 인 경우를 그림 27에 도시하였다.  $m=1$ 인 경우는 Harr의 함수에 대응한다.

### 5.3 각 웨이브릿 함수의 특성 비교

#### 1) 직교 또는 비직교

직교 웨이브릿 해석에서는 각 스케일에서의 컨벌루션 수가 그 스케일에서의 웨이브릿 기저의 폭에 비례한다. 이것으로 인해, 웨이브릿 스펙트럼이 이산 블록형태로 나타날 수 있으며, 이는 신호를 가장 간단하게 표현할 수 있는 장점으로 인해 신호 처리에 매우 유용하게 활용된다. 그러나, 시계열의 해석에서는 시계열이 비주기적으로 천이되면 웨이브릿 스펙트럼이 완전하게 달라진다. 반대로 비직교 해석은 스케일이 매우 커서 아주 유용하다. 이 때 인접한 시간의 웨이브릿 스펙트럼은 상관이 높아진다. 비직교 변환은 웨이브릿 진폭이 매끄럽고 연속적으로 변화하므로, 시계열의 해석에 매우 유리하다.

#### 2) 복소 또는 실수

복소 웨이브릿 함수는 진폭과 위상에 관한 정보를 제공하며, 진동적인 특성을 포착하는 데 유리하다. 반면 실 웨이브릿 함수는 진폭과 위상 중 하나의 성분만을 제공하며, 피이크나 불연속성을 검출하는 데 유용하다.

#### 3) 폭

웨이브릿 함수의 폭은 웨이브릿 진폭의 감쇠시간(예 : e-folding time 등)으로 정의된다. 웨이브릿 함수의 분해능은 실공간에서의 폭과 푸리에 공간에서의 폭과의 적절한 균형에 의해 결정되어진다. 폭이 협소한 함수는 시간 분해능을 좋게 하나 주파수 분해능은 저하시킨다. 반면 폭이 넓은 함수는 시간 분해능이 빈약해지고, 주파수 분해능은 향상된다.

#### 4) 형태

웨이브릿 함수는 시계열에 나타나는 특성이 어떠한지 잘 가늠할 수 있게 하여야 한다. 신호가 갑자기 변화하거나 스텝상이면 Harr와 같은 구형과 형태의 함수가 좋다. 그러나, 시계열이 천천히 변화하면 제동형의 여현 함수와 같은 완만한 함수를

사용한다. 웨이브릿 전력 스펙트럼에 치중한다면 웨이브릿 함수는 그리 중요하지 않다.

## 6. 연속 웨이브릿 변환과 이산 웨이브릿 변환의 비교

### 6.1 연속 웨이브릿 변환

앞서 논의한 바와 같이 시간 변위 윈도우 신호  $f(x)g(x-b)$ 의 푸리에 변환을 수행할 때 복소 함수  $e^{-j\omega x}$ 가 기저임을 보였다. 그런데, 이를 달리 생각하면 시간 변위 윈도우 복소 함수  $g(x-b)e^{-j\omega x}$ 를 신호  $f(x)$ 에 인가되는 기저함수로 취급할 수가 있다. 따라서, 위치  $b$ 를 포함하는 함수  $g(x-b)$ 와 주파수  $\omega$ 의 함수  $e^{-j\omega x}$ 에 대해, 두 개의 지수를 포함하는 함수  $k_{b,\omega}(x)=g(x-b)e^{-j\omega x}$ 로부터

$$STFT W(b,\omega)=\int f(x)k_{b,\omega}(x)dx \quad (36)$$

를 얻게 된다. 웨이브릿 변환도 비슷한 방법으로 기술될 수 있다. 그러나, 웨이브릿에서는 주파수가 직접 사용되어지지 않으나 천이 변수  $b$ 와 아주 흡사하다. 일반적으로 다른 웨이브릿 기저함수를 만들기 위해 하나의 함수 즉 스케일 함수  $\phi$ 만을 사용하게 된다. 이 경우  $a$ 배 스케일링하고  $b$ 만큼 천이시키면,

$$\phi(ax-b) \quad (37)$$

로 표시된다.  $a$ 가 커지면  $\phi$ 는 더욱 협소해지고, 반대로 작아지면 더욱 넓게 확대된다.  $b$ 가 양이면  $\phi$ 를 우측으로 천이시킨다. 부가적으로 스케일되어지고 천이된 기본 웨이브릿 함수  $\psi_{a,b}(x)$ 에 대한 신호  $f(x)$ 의 연속 웨이브릿 변환은

$$CWT(a,b)[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}^*(x)f(x)dx = \langle \psi_{a,b} \mid f(x) \rangle \quad (38)$$

로 표현되어진다. 여기서,  $\langle \psi_{a,b} \mid f(x) \rangle$ 는 신호  $f(x)$ 와 기본 웨이브릿 함수  $\psi_{a,b}(x)$ 로의 투영 또는 이것과의 내적을 의미한다. 여기서,  $a$ 가 0이 될 수 없다는 것 이외에는 어떠한 제약조건도 없다. 연속 웨이브릿 변환에서  $(a,b)$ 의 선택할 때 전 시간 스케일  $((a,b))$ 영역에 걸쳐서 연속적이라고

가정한다. 함수의 연속 웨이브릿 변환이 주어지면 다음의 수식적인 관계를 이용하여 신호를 완전하게 복원할 수도 있다.

$$f(x) = \frac{1}{C} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty CWT(a,b) \psi_{a,b} \frac{1}{a^2} da db \quad (39)$$

여기서,  $C$ 는

$$C = \int_0^\infty \frac{\psi(\omega) \psi^*(\omega)}{\omega} d\omega \quad (40)$$

를 의미한다. 동시에 연속 웨이브릿 변환은 웨이브릿의 모든 연속 스케일에 대해, 신호  $f(x)$ 와 웨이브릿 함수의 연속 합성적분으로도 표현될 수 있다. 따라서, 연속 웨이브릿 변환은 1차원 함수를 2차원 함수로도 사상할 수 있는 융통성이 매우 풍부한 변환이다.

### 6.2 이산 웨이브릿 변환

이산 웨이브릿 변환과 연속 웨이브릿 변환의 주된 차이는 변수의 선택에 있다. 연속 웨이브릿 변환에서는 이들 두 개의 좌표의 선택에 제약이 없었고 전체 평면에서 사상할 수 있었다. 그러나 이산 웨이브릿 변환에서는 다음과 같은 제약이 따른다.

$$a = a_0^j, b = kb_0 a_0^j \quad (41)$$

여기서  $k$ 와  $j$ 는 음과 양의 값을 갖는 정수들이다. 여기서  $a_0=2$  및  $b_0=1$ 인 직교 웨이브릿에 대해 관심을 갖고자 한다. 이를 2 기준의 확대 및 천이라

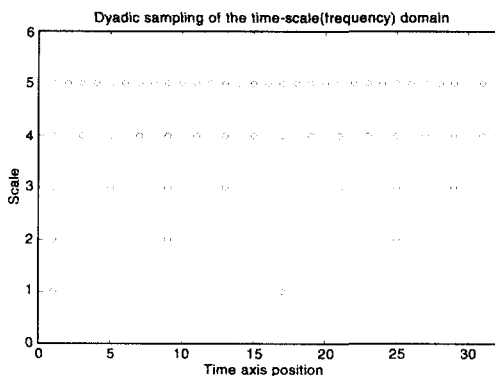


그림 28 시간 스케일 영역의 2 기준 샘플링법

고 한다. 시간 주파수 영역의 2 기준 샘플링이 다음의 그림 28에서 제시된다.

여기서, 스케일 변수는  $j$ 로 표현되고, 천이 변수는  $k$ 로 표현된다.  $j$ 는 주파수로 해석될 수 있으나 동일한 개념은 아니다. 여기서,  $j$ 가 커지면 스케일이 커지고 주파수가 높아지며 스텝은 작아진다. 그리고,  $j$ 가 작아지면 스케일이 작아지고 주파수는 낮아지고 스텝은 커진다.

기본 웨이브릿가 2의 멱승으로 다시 스케일되어 지거나, 확대되어지며 정수배로 천이되어짐에 주의를 요한다. 웨이브릿 기저를 특별히 흥미있게 만드는 것은 스케일과 확대에 따른 자기 상사성이다. 기본 웨이브릿 함수에 대한 것을 알면 기저에 대한

Continuous time "continuous" analysis	Continuous time "discrete" analysis	Discrete time ( $\Delta=1$ ) "discrete" analysis
$C(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$	$W(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(n) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{n-b}{a}\right) dn$	$C(a,b) = C(\Delta,b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \psi\left(\frac{n-b}{a}\right)$
$a \in \mathbb{R}^+ - \{0\}, b \in \mathbb{R}$	$a = \Delta 2^j, b = \Delta k 2^j, (j,k) \in \mathbb{Z}$	$a = 2^j, b = k 2^j, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$

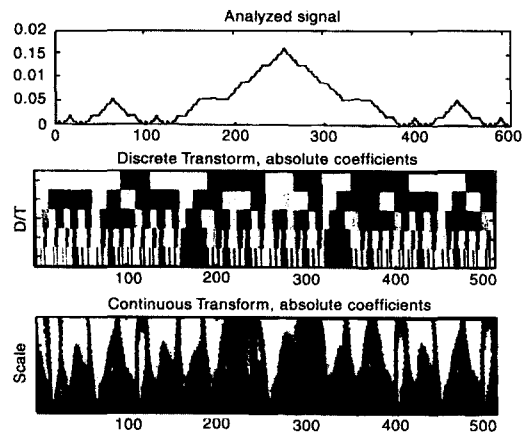


그림 29 연속 웨이브릿 변환과 이산 웨이브릿 변환

모든 것도 알 수 있다.

그림 29은 연속 웨이브릿 변환과 이산 웨이브릿 변환의 차이점을 요약한 것으로 시찰에 의해 파악될 수 있다.

## 7. 응용

다음의 예는 많은 연구들 중의 일부에 해당될 뿐이다.

### 7.1 컴퓨터 및 휴먼 비전

1980년대 초기, David Marr 는 로봇의 인공시각에 관한 MIT의 인공지능연구실에서 연구한바 있다. 당시 그는 인간의 시각 시스템에 대한 전문가로서, 그가 목표로 한 것은 로봇이 왜 주변을 인식 할 수 없는가에 대해 연구하는 것이었다. Marr 는 비전에 대한 과학적인 기초를 설립하는 것이 중요하다고 생각되어, 인간의 비전 시스템에 대한 영상 처리 과정에서 망막에서의 빛의 세기 변화에 초점을 두었다. 이때 사용한 비전 필터는 한 영상에서도 많은 스케일을 작용시켜 최적의 검출이 가능하게 되며, 갑작스런 빛의 세기가 감지되면 영상의 1계 미분으로부터 구해질 수 있다고 하였다. 이때 사용된 임의 스케일로 동조될 수 있고 미분 가능한 연산자가 바로 Marr 웨이브릿로 불리워지고 있다.

### 7.2 FBI 지문 압축

1924년과 현재에 이르기까지, 미연방수사국(FBI)은 약 3천만개의 지문을 보유하고 있다. 종이 판위에 주로 잉크로 찍은 것이다. 이러한 지문을 팩시밀리로 전송할 때, 디지털화 품질이 저하되기 마련이었다. 따라서 이를 증거로 채택할 경우 낮은 품질로 인해, 재판에 문제가 되었다. 이는 곧 디지털화 및 데이터 압축 기술에 대한 요구를 촉발시켰다. 1993년 FBI에서는 데이터의 디지털화 및 압축법에 대한 표준을 제시하기에 이르렀다. 손가락 하나의 지문은 픽셀당 256 그레이 레벨로 인치당 500픽셀의 해상도로 디지털화 되었다. 하나의 지문은 70만 픽셀을 요구하고, 약 0,6MByte의 용량을 요구하였다. 따라서, 양손인 경우, 비압축시



그림 30 지문 인식

6MByte가 요구되었다. 따라서, 당시 1 Gbyte당 900불에 상당하였으므로, 20억 달러가 소요되었다.

### 7.3 Noise가 함유된 데이터의 노이즈제거

행성 연구로부터 분자 분광기술에 이르기까지 다양한 분야에서, 고학자들은 불완전하고 noise가 함유되어 있고, 간접적인 데이터로부터, 원래의 신호를 회복시킬 수 있는 문제에 직면하게 되었다. 웨이브릿이 이 문제를 푸는 데 도움을 줄 수 있을까? David Dohono 가 수년간에 걸쳐서 연구한 웨이브릿 축소법(shrinkage) 및 문턱법(thresholding method)라 불리는 기법을 이용하면 된다. 이 기법은 웨이브릿을 사용해서 데이터를 분해할 때, 평균필터로 동작하는 필터와 D(detail)를 생산하

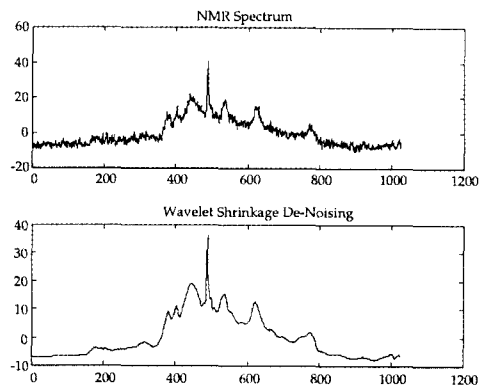


그림 31 핵자기 공명 신호의 처리 전후 결과

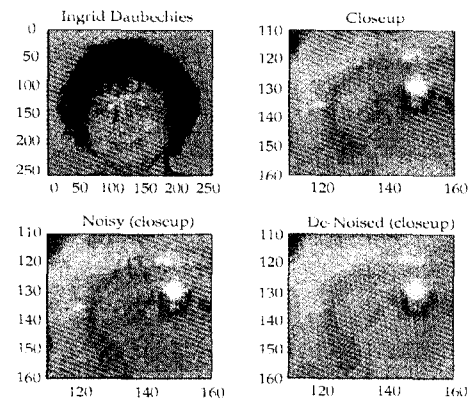


그림 32 Ingrid Daubeichies의 Dohono에 의해 만들어진 영상

는 필터를 사용한다.  $D$ 가 작으면, 주요한 데이터의 특성에 영향을 거의 미치지 않게 소거해 버린다. 이들 계수는 데이터를 복원할 때 역 웨이브릿 변환에서 사용된다. 그림 31은 핵자기 공명 신호의 처리 전후 결과를 보인 것이다. 신호는 변환되며, **threshold** 되어지며, 역변환된다. 이 기법은 노이즈 제거가 날카로운 구조를 손상시키지 않고 수행되므로 노이즈가 함유된 데이터를 다루는 데 매우 중요한 전단계이다. 이 결과는 중요한  $D$ (**detail**)를 그대로 간직하게 하여 깨끗한 신호를 준다. 그림 32은 **Ingrid Daubeichies**의 **Dohono**에 의해 만들어진 영상이다. 그는 **compact support** 직교 웨이브릿의 창시자이기도 하였는데, 원래의 눈, 노이즈가 부가된 영상, 노이즈 제거된 영상 영상의 노이즈 제거를 위해, 세 개의 0점을 갖는 **Coiflet**를 사용하여 영상을 웨이브릿 영역으로 변환하고 이를 다시 두 개의 표준 편차로 **threshold**를 인가하였으며, 마지막으로 처리된 영상을 신호 영역으로 역변환하였다.

#### 7.4 시계열에서의 자기 상사성 검출

웨이브릿 해석은 시간 스케일이 넓은 특성 특히 자기 상사성을 갖는 경우에 매우 유용하다.

1993년 **Scargle**과 **Nasa** 무기 연구 센터에 근무하던 그의 동료 및 기타는 준주기적인 진동(QPOs) 및 행성에서의 **Xray** 증가원인 **ScoX-1**으로부터 송출되는 매우 낮은 주파수 잡음(VLFN)을 연구하였다. 그로부터 얻어진 **5-20keV EXOSAT** 행성의 시계열은 **2ms**로부터 **10시간**에 이르는 시간 스케일이 넓은 시계열 신호였다. 연구자들은 **Sco X-1**의 발광이 자기 상사적인 방법으로 변화하며, 다른 시간 분해능에서 조사된 발광의 통계학적인 특성은 동일하게 유지되는 것으로 밝혀 졌다. 웨이브릿의 큰 강도 중의 하나가 다른 스케일에서 정보를 효과적으로 처리할 수 있으므로, **Scargle**는 시계열의 특성을 해석하기 위해 **scalediagram**이라고 하는 웨이브릿 도구를 사용하였다.

**Scargle**는 시계열의 **scalediagram**을 주어진 스케일에서의 웨이브릿 계수의 자승 평균으로 정의하였다. 그 결과는 주파수의 함수로 도시된 푸리에 전력 스펙트럼과 같이 다양한 정보를 제공한다.

#### 7.5 음악의 합성을 위한 웨이브릿 패킷

**Victor Wickerhauser**는 웨이브릿 해석이 소리 합성에 유용하다는 것을 제안하였다. 그의 생각은 하나의 웨이브릿 패킷 발생기가 많은 발진기를 대치할 수 있다는 것을 실험으로 규명하였다. 즉, 그는 실제로 음악가가 만들어내는 소리를 대치할 수 있는 웨이브릿 패킷을 개발하였던 것이다. **Wickerhauser**는 악기 소리를 합성하는 경우, 악기가 내는 음을 웨이브릿 패킷의 계수로 분해하였고, 음의 재생시는 이들 계수를 웨이브릿 패킷 발생기로 다시 로딩하여 결과를 다시 연주할 수 있음을 보였던 것이다. 따라서, 웨이브릿 패킷을 기반으로 한 음악 합성기는 다음과 같은 이유로 아주 복잡한 음도 저장할 수 있다.

- 웨이브릿 패킷 계수는 웨이브릿 계수와 같으며, 디지털 샘플해도 매우 소수이다.
- 데이터의 압축시 사전 결정된 차단 영역이하의 계수를 생략하더라도 오차가 극히 적다.

유사하게 웨이브릿 패킷 기반의 음성 합성기는 고압축된 음성 신호를 재구성하는 데도 사용될 수 있다. 그림 32은 웨이브릿 음악 곡조 또는 발생된 곡조(**toneburst**)를 나타낸 것이다.



그림 33 음악용 웨이브릿 패킷에 의한 곡조의 발생

## 8. 결 론

이상으로부터 웨이브릿 변환에 대한 기본적인 개념과 그 종류를 중심으로 대부분의 기본적인 웨이브릿을 고찰하였다. 대부분의 수학자들이 웨이브릿 변환을 대단히 어렵게 받아들임으로 인해 그 발전 속도가 현저히 느린 편이다. 따라서, 보다 많은 연구를 진척시켜 웨이브릿 변환의 일반화 및 확장, 그리고 웨이브릿 패킷 기술의 확장을 도모해야 할 것이다. 웨이브릿의 미래는 아직 응용 영역이 미확정되어 있을 뿐만 아니라, 웨이브릿 응용 기술 또한 실제적인 데이터 해석과 같은 응

용을 위해 아직은 많은 미해결의 연구 과제를 갖고 있으므로 장차 많은 연구가 수행될 것이라 확신한다. 더욱이, scalar 웨이브릿 변환에 비해 많은 잇점을 가지고 있으며, 신호와 영상 처리 분야, 제어 시스템 등 매우 다양한 분야에서 각광받기에 충분한 행렬 웨이브릿 방정식을 이용한 다중 웨이브릿 변환에 대한 연구도 진행되어야 할 것으로 본다.

참고문헌

[1] Steven G. Krantz, "Wavelets: Mathematics and Applications", CRC Press, Inc, 1994.

[2] M. Holschneider, "Wavelets An Analysis Tool", Clarendon Press/Oxford, Inc, 1995.

[3] Mary Beth Ruskai, "Wavelets and Their Applications", Jones and Bartlett Publishers, Inc, 1992.

[4] Charles K. Chui, "An Introduction to Wavelets", Academic Press, Inc, 1992.

[5] V.Strela, P.N.Heller, G.Strang, P.Topiwala, C.Heil, "The Application of Multiwavelet Filter Banks to Image Processing", IEEE Trans. on Image Processing, EDICS category: IP 1.6.

[6] Kanwaldip Singh Anant, Farid U.Dowla, "Wavelet Transform Methods for Phase Identification in Threecomponent Seismograms", Bulletin of the Seismological Society of America, Vol 87, No 6, 1997.

[7] Jaideva C. Goswami, Andrew K. Chan, "Fundamentals of Wavelets. Theory, Algorithms, and Applications", John Wiley & Sons, Inc, 1999.

[8] C. Sidney Burrus, Ramesh A. Gopinath, Haitao Guo, "Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms", Prentice-Hall, Inc, 1998.

[9] Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim, Jean-Michel Poggi, "Wavelet Toolbox User's Guide", The MathWorks, Inc, 1996.

[10] Christopher Torrence, Gilbert P.Compo, "A Practical Guide to Wavelet Analysis", American Meteorological Society, pp.1~18, 1998

[11] 榑原 進, "ウェーブレット ヒルベルト変換の応用", 東京電機大學出版, 1995