

LP강판의 좌굴계수

황 원 섭* 김 현 민**

1. 서 론

초기의 경제적인 강교량의 설계 방법중 하나로 구조물의 위치별 저항내력의 차이를 두께가 다른 여러 개의 강판을 용접하여, 부재를 구성함으로써 강증을 최소화하는 방법이 일반적으로 사용되어 왔다. 그러나 두께가 다른 강판을 여러 개 사용하게 되면, 용접이음부의 증가에 따라 많은 경비가 소요되고, 피로에 대해 취약해지는 문제가 발생하게 된다. LP강판(Longitudinally Profiled Plate)은 길이방향으로 두께를 변화시킨 새로운 부재로써 단면력의 변화에 대응하여, 판의 두께를 선형적으로 변화시키면서 사용할 수 있어, 강제중량의 절감 및 용접이음부의 감소등 구조적 간략화의 효과를 얻을 수 있으며, 이미 유럽과 일본 등지에서 다수의 교량에 적용되어 왔다.

그러나 이러한 LP 강판을 교량에 적용하기 위해서는 새로운 설계기준의 확립이 필요하며, 특히 현행 도로교시방서는 동일두께강판의 강도를 기초로 한 것이므로 이를 LP 강판에 적용하는 경우, 그 강도특성을 충분히 반영한 설계가 이루어지기 어

려운 실정이라고 할 수 있다. 따라서 두께변화에 따른 LP강판의 특성을 반영한 설계법이 제안하기 위해 기초작업으로써 LP강판의 좌굴계수를 유도하였으며, 좌굴계수에 미치는 두께비의 영향을 검토하였다.

2. 판형부재의 압축강도

2.1 일반평판의 기준강도식

판 부재를 사용하는 압축부재는 평판요소가 두께에 비하여 폭이 넓은 경우 부재전체가 좌굴하기 전에 구성판에 먼저 부분적인 좌굴이 발생할 가능성이 있으며, 그 결과 압축부재의 강도가 저하하게 된다. 이와 같이 부재의 전체 좌굴에 앞서 구성판 요소에 먼저 좌굴이 발생하는 현상을 국부좌굴(local buckling)이라고 한다. 따라서 부재 전체의 좌굴 뿐만 아니라 평판요소의 국부좌굴을 검토할 필요가 있으며 평판의 좌굴응력은 식 (1)과 같다.

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \tag{1}$$

* 정회원 · 인하대 토목공학과 부교수, 공학박사
 ** 인하대 대학원 토목공학과, 석사과정

식 (1)로부터 구한 평판의 국부좌굴 응력 σ_{cr} 을 항복응력 σ_y 로 나누어 표시하면

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} = \frac{1}{R^2} \quad (2)$$

여기서, R은 평판의 폭-두께비 파라미터로 정의되며 다시 정리하면 아래와 같이 주어진다

$$R = \sqrt{\frac{(12(1-\nu^2))}{\pi^2 k}} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \left(\frac{b}{t}\right) \quad (3)$$

현행 도로교시방서에서는 초기결함이나 잔류응력등의 영향으로 인하여 비탄성 영역에서의 내하력이 현저하게 감소되며 얇은 판의 내하력은 좌굴후의 강도상승효과로 인하여 탄성좌굴응력보다 크게 나타나는 것을 고려하여 평판의 기준내하력을 다음과 같이 정하고 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} &= 1.0 & R \leq 0.7 \\ &= \frac{0.5}{R^2} & R > 0.7 \end{aligned} \quad (4)$$

2.2 LP강판의 기준강도식

평판의 기준강도식은 폭-두께비파라미터 R로 표현되므로, 두께변화를 고려한 LP강판의 폭-두께비 파라미터 R_{LP} 를 구하면 LP강판의 기준강도식이 정의될 수 있다. 단순한 방법으로써 다음과 같이 일반평판의 좌굴계수 k 대신 k_{LP} 를 도입하여 LP강판의 폭-두께파라미터를 식 (5)와 같이 구하고 이것을 적용하면 LP강판의 기준강도식이 된다.

$$R = \sqrt{\frac{(12(1-\nu^2))}{\pi^2 k_{LP}}} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \left(\frac{b}{t}\right) \quad (5)$$

3. LP강판의 좌굴계수

3.1 LP강판의 지배방정식

LP강판의 응력-변형률의 관계는 일반평판과 동

일하며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (6)$$

변형률을 w 에 관해서 재정의하여 식 (6)을 다시 정리하면 식 (8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

단위 길이당 모멘트와 힘을 합응력이라 하며 다음과 같은 방법으로 구한다

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} z dz \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)에 식 (8)을 대입하여 다시 정리하면

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

따라서, LP강판의 합응력과 외력에 대한 평형방정

식은 다음과 같다

$$\frac{\partial^2 Mx}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 Mxy}{\partial x \partial y} + \partial^2 My = -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (11)$$

여기서 강성 D는 일반판과 달리 상수가 아닌 x, y에 관한 함수로써 x, y에 대하여 편미분되어야 하므로 식 (11)의 각 항을 전개하면 식 (12)와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Mx}{\partial x^2} &= -D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ &\quad - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D\nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ &\quad - 2\nu \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 My}{\partial y^2} &= -D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\ &\quad - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D\nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ &\quad - 2\nu \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \nu \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 Mxy}{\partial x \partial y} &= -D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\ &\quad - \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ &\quad + D\nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \nu \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\ &\quad + \nu \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)를 식 (11)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} D \nabla \nabla w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla w \\ + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla w + \nabla D \nabla w \\ - (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

x방향으로만 선형변화하는 일방향 LP강판의 휨강성은 식 (14)와 같이 정의된다.

$$D = D_0 + D_1 \cdot x \quad (14)$$

여기서, D_0 와 D_1 은 상수

따라서 식 (13)을 다시 정리하면 다음과 같이 일방향 LP강판의 지배방정식이 유도된다.

$$(D_0 + D_1 x) \nabla \nabla w + 2 D_1 \frac{\partial}{\partial x} \nabla w = N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (15)$$

3.2 유한차분법에 의한 계산

x방향으로 두께가 변화하는 일방향 LP강판의 두께함수는 식 (16)과 같이 가정되며 휨강성 D는 식 (17)과 같다

$$t = t_0 (1 + \alpha \frac{x}{a})^{1/3} \quad (16)$$

$$D = \frac{E t_0^3 (1 + \alpha \frac{x}{a})}{12(1 - \nu^2)} \quad (17)$$

지배방정식 식 (13)을 무차원 파라미터 ξ 와 η 로 다시 표시하면 다음과 같다

$$\begin{aligned} (1 + \alpha \xi) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right) \\ + 2 \alpha \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) + N_x \frac{\alpha^2}{D_0} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

여기서, $D_0 = \frac{E t_0^3}{12(1 - \nu^2)}$

위의 식을 각각 유한차분법으로 풀기 위해 유한차분으로 나타내면

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx \Delta^2 w_{i,j} = (w_{i+h,j} - 2w_{i,j} + w_{i-h,j})/h^2$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \approx \Delta^4 w_{i,j} = (w_{i+2h,j} - 4w_{i+h,j}$$

$$\begin{aligned}
 & +6w_{i,j}-4w_{i-h,j}+w_{i-2h,j})/h^4 \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & = (w_{i,j+h}-2w_{i,j}+w_{i,j-h})/h^2 \\
 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} & = (w_{i,j+2h}-4w_{i,j+h} \\
 & +6w_{i,j}-4w_{i,j-h}+w_{i,j-2h})/h^4 \\
 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} & \approx [(w_{i+h,j+h}-2w_{i+h,j}+w_{i+h,j-h}) \\
 & -2(w_{i,j+h}-2w_{i,j}+w_{i,j-h}) \\
 & + (w_{i-h,j+h}-2w_{i-h,j}+w_{i-h,j-h})]/h^4 \\
 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} & = (w_{i+2h,j}-2w_{i+h,j}+2w_{i-h,j} \\
 & -w_{i-2h,j})/(2h^3) \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) & = (w_{i+h,j+1}-w_{i-h,j+h}-2w_{i+h,j} \\
 & +2w_{i-h,j}+w_{i+h,j-h}-w_{i-h,j-h})/(2h^3)
 \end{aligned}$$

위 식을 식 (18)에 대입하여 구한 LP장판의 유한차분식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 (1+\alpha \xi_i) & [w_{i+2,j}-4w_{i+1,j}+6w_{i,j}-4w_{i-1,j} \\
 & +w_{i-2,j}+2\{w_{i+1,j+1}-2w_{i+1,j}+4w_{i-1,j-1} \\
 & -2(w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1})+w_{i-1,j+1} \\
 & -2w_{i-1,j}+w_{i-1,j-1}\} \\
 & +w_{i,j+2}-4w_{i,j+1}+6w_{i,j}-4w_{i,j-1}+w_{i,j-2}] \\
 & +ah[w_{i+2,j}-2w_{i+1,j}+2w_{i-1,j}-w_{i-2,j} \\
 & +w_{i+1,j+1}-2w_{i+1,j}+w_{i+1,j-1} \\
 & +2w_{i-1,j}-w_{i-1,j+1}-w_{i-1,j-1}] \\
 & +N_x \frac{a^2}{D_o} h^2 (w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j})=0 \quad (19)
 \end{aligned}$$

여기서 경계조건은

$$\begin{aligned}
 w_{i,j} & = 0, \quad w_{i+1,j} = -w_{i-1,j} \\
 & \quad (i=0, n, \quad j=0, 1, 2, \dots, n) \\
 w_{i,j} & = 0, \quad w_{i,j+1} = -w_{i,j-1} \\
 & \quad (i=0, 1, 2, \dots, n, \quad j=0, n)
 \end{aligned}$$

식 (19)는 식 (20)과 같이 연립방정식의 형태로 나

타낼 수 있으며

$$\begin{aligned}
 (1+\alpha \xi_i) & (w_1, w_2, w_3, \dots) \\
 & + (ah)\{w_1, w_2, w_3, \dots\} \\
 & + N_x \frac{a^2}{D_o} h^2 \{w_1, w_2, w_3, \dots\} = 0 \quad (20)
 \end{aligned}$$

연립방정식을 Nx에 대해서 풀고 그 해를 구하면 다음의 형태로 나타낼 수 있으며 k값을 결정할 수 있다.

$$N_x = k\pi^2 \frac{D_o}{a^2} \quad (21)$$

일반평판은 두께비가 1.0, LP장판은 1.1, 1.2, 1.3, 1.4로 하여 해석한 결과를 그림 1에 나타내었다. 횡축은 좌굴계수를 종축은 두께비 Tr을 나타내며 여기서 Tr은 박부층두께에 대한 후부층 두께의 비이다. 그림으로부터 두께비의 증가에 따라 좌굴계수는 거의 선형적으로 증가하며, 좌굴강도가 상승된다는 것을 알 수 있다.

k_{LP}를 적용한 폭-두께비파라미터를 기준강도식에 대입하면, 기존의 일반평판의 두께를 박부층으로 가지는 LP장판의 강도는 그림 2와 같이 16~70%정도 상승한다. 그러나 LP장판은 양단의 두께 차이로 인한 국부적인 소성화현상등의 문제등을 내포하고 있으므로, 이와 같은 수치의 상승은 기대하기 어려우며, LP장판의 비선형거동등에 대한 차후의 연구가 필요하나 하겠다.

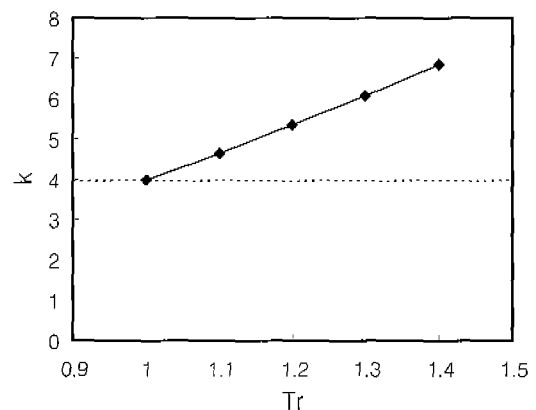


그림 1 좌굴계수와 두께비 관계

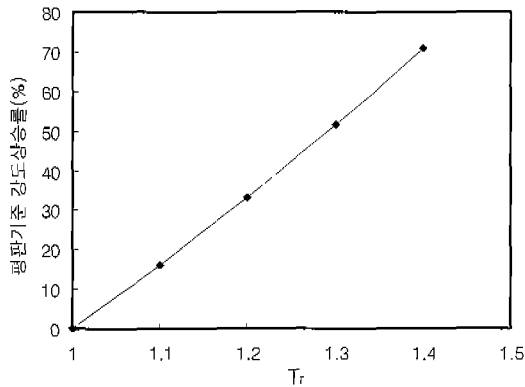


그림 2 LP강판의 강도상승률

4. 결 론

1. 두께비의 변화를 고려한 LP강판의 좌굴계수 k_{LP} 를 휨강성 D 를 판 길이방향으로 선형변화하는 1차함수로 가정함으로써 유도하였다.

2. LP강판의 좌굴계수 k_{LP} 는 두께비에 따라 거의 선형적으로 증가한다.
3. 일반평판의 두께를 박부족으로 갖는 LP강판의 강도는 두께비에 따라 선형적으로 증가한다.
4. k_{LP} 만 적용한 강도평가는 LP강판의 비선형적인 특성을 충분히 고려치 않았으므로 이에 대한 차후의 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

1. 김명모, 이재혁, 윤태양, "LP강판의 강교량 적용성에 관한 실험적 연구", RIST 연구논문, 제14권 제3호, 2000
2. 김상식, 구조안정해석, 문운당, 1998
3. 건설교통부, 도로교표준시방서, 1995
4. Rudolph Szilard, Theory and Analysis of Plates, Prentice Hall, 1974