

초청논문

선형 탄성방정식의 유한요소해법과 잠김현상

이창욱

요약문. 이차원 선형 탄성방정식을 소개하고 약한 형식의 타원성을 보여준다. (P-1) 순응 유한요소를 사용할 때 나타나는 잠김현상을 설명하고 그 해결책으로서 비순응 유한요소법과 penalty 항을 가진 혼합문제, 일계 최소자승법 등을 소개한다.

제 1 절 서론

영역 Ω 를 이차원 평면 \mathbb{R}^2 상에서 경계 Γ 를 가지는 볼록다각형 또는 $C^{1,1}$ 영역이라 하자. μ 와 λ 를 $(\mu, \lambda) \in [\mu_1, \mu_2] \times (0, \infty)$ 를 만족하는 라메(Lamé)상수라 하자. 여기서 μ_1 과 μ_2 는 $0 < \mu_1 < \mu_2$ 인 상수이다. 혼합 경계조건을 가지는 이차원 선형탄성방정식은

$$(1.1) \quad \begin{aligned} -\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) &= \mathbf{f} \text{ in } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n} &= \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_T, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_D \end{aligned}$$

와 같이 주어진다. 기호 Δ 와 ∇ , $\nabla \cdot$ 는 각각 라플라스 작용소와 그래디언트, 발산 연산자를 나타낸다. 즉,

$$\nabla = (\partial_1, \partial_2)^t, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \nabla \cdot = \nabla^t$$

이다. $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^t$ 는 변위를 나타내고 $\Delta \mathbf{u}$ 는 Δu_i 의 벡터표현, $\text{grad}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u}^t)^t$ 를, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^t$ 는 탄성체에 가해지는 힘, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^t$ 는 경계 Γ 에서의 외향단위법선을 나타낸다. 또한

$$(1.2) \quad \sigma(\mathbf{u}) := 2\mu \epsilon(\mathbf{u}) + \lambda \text{tr}(\epsilon(\mathbf{u})) \delta,$$

$$(1.3) \quad \epsilon(\mathbf{u}) = (\epsilon_{ij}(\mathbf{u}))_{2 \times 2}, \quad \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j)$$

Received September 17, 2001.

2000 Mathematics Subject Classification: 65N30, 74B05.

Key words and phrases: 이차원 선형탄성역학, 라메 상수, 잠김현상, 비순응 유한요소법, 혼합문제, 일계 최소자승법.

이 논문은 2000년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2000-015-DP0045).

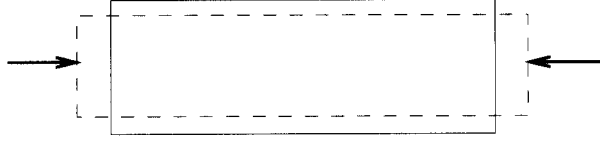


그림 1. 한쪽 방향으로 물체를 압축하면 다른 방향으로 늘어난다. 그 상대적인 크기가 포아송 윌 ν 에 의해 주어진다.

는 각각 응력(stress) 텐서와 strain 텐서를 나타낸다. 여기서 δ 는 단위 행렬을 나타내고

$$\text{tr}(\epsilon(\mathbf{u})) := \nabla \cdot \mathbf{u}$$

이다. Ω 의 경계 $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_D$ 이고 $\Gamma_T \cap \Gamma_D = \emptyset$ 이다. 만약 $\Gamma_D = \emptyset$ 이면 (1.1)을 순수 traction 문제라 부르며, $\Gamma_T = \emptyset$ 이면 (1.1)을 순수 변위문제(pure displacement problem)라 부른다. 그 외의 경우 (1.1)을 혼합 경계값 문제라 부른다.

라메상수 (μ, λ) 는 영(Young)의 탄성계수 E 와 포아송 윌(Poisson ratio) ν 로 다음과 같이 표시된다.

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu},$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

물리적인 현상을 고려하면 $E > 0, 0 < \nu < \frac{1}{2}$ 이다. 포아송 윌 ν 는 그림 1에서처럼 서로 직교하는 방향의 변위에 대한 응력의 영향을 나타낸다. 많은 물질의 경우 $\nu \approx 1/3$ 이다. 반면에 거의 비압축성일 경우 $\lambda \gg \mu$, 즉, ν 가 $1/2$ 에 매우 가깝다.

조각적 선형 ($P-1$) 요소를 이용한 표준 갤러킨(Galerkin) 유한 요소법이 적당한 λ 에 대하여 잘 수렴하지만 $\lambda \rightarrow \infty$ 에 따라 (즉, 탄성체가 거의 비압축성으로 변할 때) 그 수렴도가 심하게 떨어진다는 것이 잘 알려져 있다 [5, 34]. 이러한 현상을 잠김현상(locking phenomenon, [1, 3, 4, 6])이라 부르는데, 이것을 극복하기 위하여 여러가지 방법들이 개발되었다. [2, 9, 26, 33]에서는 주로 penalty 항을 가지는 스토크스(Stokes) 방정식과 비슷한 혼합문제의 모양으로 (1.1)을 변형하여 다루고 있다. 반면에 [10, 15, 22, 27]에서는 혼합문제의 모양으로 바꾸지 않고 원래의 방정식에 비순응 유한요소법과 감소적분법을 적용하여 잠김현상을 해결하였다. 최근에는 [12, 13, 14]에서는 (1.1)을 일계 최소화승법을 이

용하여 범함수를 만들고 이를 최소화함으로써 대칭이며 양의 정부호를 가지는 문제로 변형하여 다루고 있다.

이 논문에서는 먼저 잠김현상에 대하여 살펴본 후에 잠김현상을 해결하는 여러가지 수치해법에 대하여 살펴보고자 한다. 고전적인 탄성방정식에 대한 이론적인 배경은 [6, 17, 18, 19, 28, 30, 32]에 있다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 다음 절에서는 약한 형식과 그 타원성을 보여준다. 3절에서는 $(P-1)$ 순응 유한요소를 사용할 때 나타나는 잠김현상을 설명한다. 마지막 절에서는 잠김현상의 해결책으로서 비순응 유한요소법과 penalty 항을 가진 혼합문제, 일계 최소자승법 등을 소개한다.

제 2 절 약한 형식과 타원성

이 절에서는 2차원 선형 탄성방정식에서 유도되는 약한 형식과 그 타원성을 다루고 있다.

우리는 소볼레프(Sobolev)공간 $[H^k(\Omega)]^2$ ($k > 0$)에 대한 표준적인 표기법과 정의를 사용하고자 한다. $(\cdot, \cdot)_k$ 는 내적을 나타내고 $\|\cdot\|_k$ 와 $|\cdot|_k$ 는 각각 노름과 반노름을 나타낸다. $[L^2(\Omega)]^2$ 공간은 $[H^0(\Omega)]^2$ 공간으로 해석되며 (\cdot, \cdot) 과 $\|\cdot\|, |\cdot|$ 은 각각 내적과 노름, 반노름을 나타낸다. 다른 문헌에서처럼 $H_0^k(\Omega)$ 는 노름 $\|\cdot\|_k$ 에 대하여 $C_0^\infty(\Omega)$ 의 닫힘(closure)을 나타내고 $L_0^2(\Omega)$ 는 $\int_\Omega p dx = 0$ 인 $L^2(\Omega)$ 함수 p 들의 공간을 나타낸다. 또한 $H_0^{-1}(\Omega)$ 와 $H^{-1}(\Omega)$ 는 각각 $H_0^1(\Omega)$ 과 $H^1(\Omega)$ 의 쌍대공간으로 정의되며 노름은 각각

$$\|\phi\|_{-1,0} = \sup_{0 \neq \psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{(\phi, \psi)}{\|\psi\|_1},$$

$$\|\phi\|_{-1} = \sup_{0 \neq \psi \in H^1(\Omega)} \frac{(\phi, \psi)}{\|\psi\|_1}$$

으로 정의된다. 소볼레프 공간에 대한 보다 자세한 것은 [16]에 있다.

우리는 2-벡터함수

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

에 대하여 성분별로 연산자를 작용하여 이를 열로 가지는 2×2 의 행렬을 만든다. 예를 들면

$$\nabla \mathbf{u} = (\nabla u_1, \nabla u_2)$$

이다. 2×2 행렬 $\tau = (\tau_{ij})$ 와 $\eta = (\eta_{ij})$ 에 대하여 프로베니우스 곱

$$\tau : \eta = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \eta_{ij}$$

을 정의하자.

이제 $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^2$ 가 (1.1)을 만족한다고 가정하자. 그러면 (1.1)의 경계조건을 만족하는 $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2$ 에 대하여 부분적분을 사용하면

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, dx \\
 (2.1) \qquad &= \int_{\Omega} \{2\mu \epsilon(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{tr}(\epsilon(\mathbf{u})) \delta\} : \operatorname{grad}(\mathbf{v}) \, dx \\
 &= \int_{\Omega} \{2\mu \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v})\} \, dx
 \end{aligned}$$

가 된다. 대칭인 곱선형 형식 (bilinear form) $a(\cdot, \cdot) : [H^2(\Omega)]^2 \times [H^2(\Omega)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 을

$$(2.2) \qquad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \{2\mu \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v})\} \, dx$$

로 정의하자. 이것을 약한 형식(weak form)이라고도 부른다.

2.1. $\operatorname{meas}(\Gamma_D) > 0$ 인 경우

여기서 $\operatorname{meas}(\Gamma_D)$ 는 1차원적인 측도를 나타낸다. 이 논문에서는 C 를 포괄적인 의미의 양의 상수라 하자. 즉, 영역 Ω 에 의존하면서 쓰이는 장소에 따라 값이 달라지는 상수이다.

이제 해가 존재하는 공간

$$\mathcal{V}_D := \{\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2 : \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_T, \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_D\}$$

를 정의하자. (1.1)에 대응되는 약한 문제(weak problem) 또는 변분문제(variational problem)는 주어진 $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^2$ 에 대하여

$$(2.3) \qquad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_D$$

를 만족하는 $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_D$ 를 찾는 것이다.

다음 결과는 [6, 7, 20, 32]에 있는 고전적인 콘(Korn)의 부등식과 그것에 의해 유도되는 결과들이다.

정리 2.1 (콘의 부등식).

$$\|\epsilon(\mathbf{v})\| + \|\mathbf{v}\| \geq C\|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2$$

을 만족하는 양의 상수 C 가 존재한다.

따름정리 2.1 (콘의 제 1 부등식). $\text{meas}(\Gamma_D) > 0$ 이라 하자. 그러면

$$\|\epsilon(\mathbf{v})\| \geq C\|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall \mathbf{v} \in \{\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2 : \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_D\}$$

을 만족하는 양의 상수 C 가 존재한다.

따름정리 2.1에 의하여 $\text{meas}(\Gamma_D) > 0$ 인 경우 곱선형 형식 (2.2)의 coercivity가 보여졌으며, 연속성은 자명하다. 따라서 다음 타원성(ellipticity)이 성립한다:

$$(2.4) \quad \alpha\|\mathbf{v}\|_1^2 \leq a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \beta\|\mathbf{v}\|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_D.$$

여기서 $\alpha \leq \mu$ 이고 $\beta \geq \lambda + \mu$ 이다. 이 타원성에 의하여 다음 정리가 성립한다.

정리 2.2. $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^2$ 이고 $\text{meas}(\Gamma_D) > 0$ 이면 변분문제 (2.3)은 유일한 해를 가진다.

2.2. 순수 traction 문제 ($\text{meas}(\Gamma_D) = 0$ 인 경우)

집합 \mathcal{N} 을 강제운동(rigid motion)공간

$$\mathcal{N} := \left\{ \mathbf{u} : \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a + bx_2 \\ c - bx_1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

이라 하자. 그러면

$$\epsilon(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{N}.$$

따라서 \mathcal{N} 은 동차(homogeneous)의 순수 traction 문제의 핵(kernel)이 된다. \mathcal{N}^\perp 을 $[H^1(\Omega)]^2$ 공간에서 $[L^2(\Omega)]^2$ 노름에 의한 \mathcal{N} 의 직교여공간이라 하고 \mathcal{N}^c 을 $[H^1(\Omega)]^2$ 에서 $[H^1(\Omega)]^2$ 노름에 의한 \mathcal{N} 의 직교여공간이라 하자.

좌표계의 원점이 Ω 의 무게 중심이라고 가정하면 \mathcal{N} 은 정규직교인 기저

$$\psi_1 = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_3 = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

를 가진다. 여기서 $\omega = \sqrt{\int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2}$ 이다.

연산자 $T_{\perp}^c : \mathcal{N}^\perp \rightarrow \mathcal{N}^c$ 와 $T_c^\perp : \mathcal{N}^c \rightarrow \mathcal{N}^\perp$ 을

$$T_{\perp}^c \mathbf{u} := \mathbf{u} - \frac{\omega}{2|\Omega|} \left(\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u} dx \right) \psi_3,$$

$$T_c^\perp \mathbf{u} := \mathbf{u} - \left(\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \psi_3 dx \right) \psi_3$$

로 정의하자. 여기서

$$\nabla \times \mathbf{u} := \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1, \quad \nabla^\perp q := \begin{pmatrix} \partial_2 q \\ -\partial_1 q \end{pmatrix}$$

이다. 그러면

$$(2.5) \quad \begin{aligned} T_c^\perp(T_\perp^c \mathbf{u}) &= \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{N}^\perp, \\ T_\perp^c(T_c^\perp \mathbf{u}) &= \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{N}^c, \\ \epsilon(\mathbf{u}) &= \epsilon(T_\perp^c \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{N}^\perp, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla \cdot (T_\perp^c \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{N}^\perp \end{aligned}$$

이다. 더욱이

$$C_1 \|T_\perp^c \mathbf{u}\|_1 \leq \|\mathbf{u}\|_1 \leq C_2 \|T_\perp^c \mathbf{u}\|_1 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{N}^\perp$$

이 되는 양의 상수 C_1 과 C_2 가 존재한다. 또한 프리드리흐스(Friedrichs)의 부등식([29])에 의하여

$$C_1 |T_\perp^c \mathbf{u}|_1 \leq |\mathbf{u}|_1 \leq C_2 |T_\perp^c \mathbf{u}|_1 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{N}^\perp$$

이 성립한다.

주목 2.1. $|\mathbf{u}|_1$ 은 \mathcal{N}^\perp 에서 노름이 된다.

식 (2.5)에 의하여 $\mathbf{u} \in \mathcal{N}^c$ 일 필요충분조건은

$$(2.6) \quad \int_{\Omega} \mathbf{u} dx = \mathbf{0},$$

$$(2.7) \quad \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u} dx = \mathbf{0}$$

이다. 순수 traction 문제의 경우 해가 유일하기 위하여 제약조건 $\mathbf{u} \in \mathcal{N}^c$ 를 부과한다. 따라서 해가 존재하는 공간은

$$\mathcal{V}_T := \{\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2 : \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma\} \cap \mathcal{N}^c$$

이다. 순수 traction 문제에서 변분문제는 (2.3)에서 테스트 함수 \mathbf{v} 와 해 \mathbf{u} 를 \mathcal{V}_D 대신 \mathcal{V}_T 에서 찾는 것이다. 즉, 주어진 $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^2$ 에 대하여

$$(2.8) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_T$$

를 만족하는 $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_T$ 를 찾는 것이다. 해가 존재하기 위하여 외력 $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^2$ 은 반드시 양립조건(compatible condition)

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{N}$$

을 만족해야 한다. 즉, $\mathbf{f} \in \mathcal{N}^\perp$ 이다. (자세한 것은 [6, 7]을 보라.) 순수 traction 문제를 다룰 때는 항상 이 양립조건을 가정하고 있다.

정리 2.3 (콘의 제 2 부등식).

$$\|\epsilon(\mathbf{v})\| \geq C\|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 \cap \mathcal{N}^c$$

를 만족하는 양의 상수 C 가 존재한다.

정리 2.3에 의하여 순수 traction 문제에 있어서 겹선형 형식 (2.2)의 coercivity가 보여졌으며 연속성은 자명하다. 따라서 다음 타원성(ellipticity)이 성립한다.

$$(2.9) \quad \alpha\|\mathbf{v}\|_1^2 \leq a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \beta\|\mathbf{v}\|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_T.$$

여기서 $\alpha \leq \mu$ 이고 $\beta \geq \lambda + \mu$ 이다. 타원성에 의하여 다음 정리가 성립한다.

정리 2.4. $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^2 \cap \mathcal{N}^\perp$ 이고 $\text{meas}(\Gamma_D) = 0$ 이면 변분문제 (2.8)은 유일한 해를 가진다.

다음 타원 정칙성(elliptic regularity)은 (2.3) 또는 (2.8)에 대한 수치 근사가 라메상수에 독립적임을 보이는 데 있어서 필수적인 역할을 하는 것이다 ([7], [10]).

정리 2.5. Ω 를 \mathbb{R}^2 상에서 볼록다각형 영역이라 하자. 변분문제 (2.3)과 (2.8)의 유일한 해는 $[H^2(\Omega)]^2$ 에 속하게 되며 타원 정칙성

$$(2.10) \quad \lambda\|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{u}\|_2 \leq C\|\mathbf{f}\|$$

가 성립한다. 여기서 양의 상수 C 는 라메상수 (λ, μ) 에 독립적이다.

제 3 절 유한요소근사와 잠김현상

영역 Ω 는 서로 겹치지 않는 준 정삼각형(quasi-regular triangle)들의 집합 \mathcal{T}_h 로 나누어 진다. 즉, $\Omega = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ 이며 한 삼각형의 꼭지점이 다른 삼각형의 모서리에 있지 않는다. $\text{diam}(T)$ 가 삼각형 T 의 지름을 나타낸다고 할 때 $h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T)$ 라 하자. 해가 존재하는 공간 $\mathcal{V}_D, \mathcal{V}_T$ 모두 편의상 \mathcal{V} 로 표시하자. 영역 Ω 의 삼각화(triangulation)와 결부된 (P-1) 유한요소공간

$$(3.1) \quad \mathcal{V}_h := \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} \text{ 는 } \Omega \text{에서 연속이며, } \mathbf{u}|_T \text{ 는 모든 } T \in \mathcal{T}_h \text{에서 선형함수임}\}$$

를 생각하자. 그러면 \mathcal{V}_h 는 \mathcal{V} 의 유한차원 부분공간이 되고 \mathcal{V}_h 에서 변분문제를 고려함으로써 변분문제를 이산화시킨다. 접선형 형식 $a(\cdot, \cdot)$ 의 타원성에 의하여 다음과 같은 유한요소오차 추정을 할 수 있다.

정리 3.1. $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ 를 (1.1)의 해라 하고 \mathbf{u}_h 를 약한 문제 (2.3) 또는 (2.8)의 해라 하자. 그러면

$$(3.2) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| + h\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 \leq C(\alpha, \beta)h^2\|\mathbf{u}\|_2$$

인 양의 상수 $C(\alpha, \beta)$ 가 존재한다. 여기서 α, β 는 타원성 (2.4) 또는 (2.9)에서의 상수이다.

고무와 같은 물질은 거의 비압축성이다. 즉, 부피의 변화를 일으키려면 많은 에너지를 필요로 한다. 이 경우 라메 상수가

$$\lambda \gg \mu$$

인 상태를 가진다. 시아(Céa)의 보조정리에 의하면 유한요소 오차분석 (3.2)에서

$$C(\alpha, \beta) \approx \frac{\beta}{\alpha} \geq \frac{\lambda}{\mu} + 1$$

이 되어 그 오차가 매우 커지리라 예상이 되고 또한 이러한 현상이 실제 계산에서 관찰이 되는데 이를 잠김현상이라 부른다. 공학자들은 주로 유한요소해가 실제보다 훨씬 작은 변위를 가질 때 잠김현상의 개념을 사용하여 volume locking이라 부른다. 이 외에도 shear locking과 membrane locking도 있다.

이제 구체적인 예로써 잠김현상을 보이도록 하자 [7]. 영역 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ 에서 $\mu = 1$ 인 순수 변위문제

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \left\{ 2\epsilon(\mathbf{u}^\lambda) + \lambda \operatorname{tr}(\epsilon(\mathbf{u}^\lambda)) \delta \right\} &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u}^\lambda &= \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma \end{aligned}$$

를 생각하자. 주어진 \mathbf{f} 에 대하여 $\lambda \rightarrow \infty$ 함에 따라 (2.10)에 의하여 $\|\nabla \cdot \mathbf{u}^\lambda\|_1 \rightarrow 0$ 이다. 즉, $\lambda \rightarrow \infty$ 일 때 물체는 거의 비압축성으로 변한다. λ 에 대한 의존성을 강조하기 위하여 응력텐서 (1.2)와 변분문제 (2.2)를 λ 를 포함하여 나타내도록 하자. 즉,

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(\mathbf{u}) &= 2\epsilon(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{tr}(\epsilon(\mathbf{u})) \delta, \\ a_\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_\Omega \{ 2\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) \} dx \end{aligned}$$

이다.

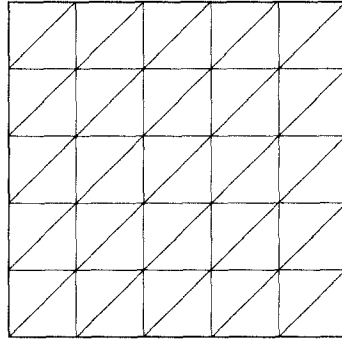


그림 2. 단위 정사각형에서의 정규 삼각화

\mathcal{T}_h 를 그림 2와 같은 정규 삼각화라 하고 유한요소공간은 (3.1)에서 정의된 \mathcal{V}_h 를 사용한다. 임의의 $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2$ 에 대하여 변분 문제

$$a_\lambda(\mathbf{u}_h^\lambda, \mathbf{v}) = \int_\Omega [-\nabla \cdot \sigma_\lambda(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h$$

의 \mathcal{V}_h 에 있는 유일해를 \mathbf{u}_h^λ 라 하자.
이제

$$L_{\lambda,h} := \sup \left\{ \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^\lambda\|_1}{\|\nabla \cdot \sigma_\lambda(\mathbf{u})\|} : \mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2 \right\}$$

를 정의하고

$$(3.3) \quad \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} L_{\lambda,h} \geq C$$

가 되는 양의 상수 C 가 존재함을 보이겠다. 물론 여기서 C 는 h 에 독립적이어야 한다. 이 부등식의 의미는 만약 λ 가 충분히 크면 h 가 아무리 작더라도 상대오차 $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^\lambda\|_1 / \|\nabla \cdot \sigma_\lambda(\mathbf{u})\|$ 가 h 에 독립적인 상수에 의하여 아래로 유계가 되는 $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2$ 를 반드시 찾을 수 있다는 것이다. 다른 말로 하면 유한요소법의 수렴성이 큰 λ 에 대하여 나빠진다는 것이다.

먼저

$$\{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\} = \{\mathbf{0}\}$$

임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 $\mathbf{v} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v}$ 인 사상은 유한차원 공간 \mathcal{V}_h 에서 $L^2(\Omega)$ 로 보내는 일대일 사상이며

$$(3.4) \quad \|\mathbf{v}\|_1 \leq C(h) \|\nabla \cdot \mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h$$

인 양의 상수 $C(h)$ 가 존재한다.

함수 ψ 를 Γ 에서 $\nabla^\perp \psi = \mathbf{0}$ 이 되며 $\|\epsilon(\nabla^\perp \psi)\| = 1$ 이 되는 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 함수라 하고 $\mathbf{u} := \nabla^\perp \psi$ 라 하자. 그러면 $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2$ 이며 또한

$$(3.5) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$(3.6) \quad \|\epsilon(\mathbf{u})\| = 1,$$

$$(3.7) \quad \sigma_\lambda(\mathbf{u}) = 2\epsilon(\mathbf{u})$$

가 성립한다.

식 (3.5), (3.6)와 (2.1)를 이용하면

$$(3.8) \quad - \int_{\Omega} \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \, dx = \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u}) \, dx = 1$$

이 된다. 따라서 (3.7)와 (3.8)에 의하여

$$(3.9) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \nabla \cdot \sigma_\lambda(\mathbf{u}) = 2\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$$

이다. 유한요소근사의 기본 성질에 의하여

$$\begin{aligned} \sqrt{a_\lambda(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^\lambda, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^\lambda)} &= \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h} \sqrt{a_\lambda(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})} \\ &\leq \sqrt{a_\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \end{aligned}$$

이다. (3.5)와 (3.6)에 의하여

$$a_\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2$$

가 성립한다. 따라서 충분히 큰 λ 에 대하여

$$(3.10) \quad \sqrt{a_\lambda(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^\lambda, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^\lambda)} \leq 2$$

가 된다.

충분히 큰 λ 에 대하여 (3.5)와 (3.10)에 의하여

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h^\lambda\| &= \sqrt{\lambda} \|\nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^\lambda)\| \\ &\leq \sqrt{a_\lambda(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^\lambda, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^\lambda)} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

이고 이것은

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h^\lambda\| = 0$$

임을 의미한다. 따라서 (3.4)에 의하여

$$(3.11) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_h^\lambda\|_1 = 0$$

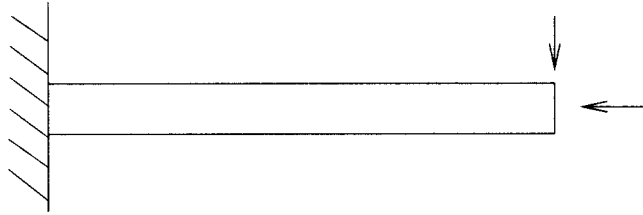


그림 3. 캔틸레버 빔(cantilever beam)에 있어서 조건이 나쁘다는(poorly conditioned) 것은 자명하다. 수직 방향의 힘은 같은 크기의 수평방향의 힘보다 모양을 훨씬 크게 변형시킨다. 경계의 아주 작은 부분에만 디리크레(Dirichlet) 경계조건이 주어졌기 때문에 큰의 부등식에서 상수가 아주 작다.

이 된다. 마지막으로 (3.6)와 (3.9), (3.11)에 의하여

$$\begin{aligned} \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} L_{\lambda,h} &\geq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^\lambda\|_1}{\|\nabla \cdot \sigma_\lambda(\mathbf{u})\|} \\ &= \frac{\|\mathbf{u}\|_1}{\|\nabla \cdot \sigma_\lambda(\mathbf{u})\|} > 0 \end{aligned}$$

가 성립한다. 따라서 (3.3)을 증명하였다.

결국 잠김현상이란 집합

$$\{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\} = \{\mathbf{0}\}$$

이기 때문에 거의 비압축성인 물질에 대한 유한요소공간으로서 \mathcal{V}_h 가 적절하지 못하다는 것임에 기인한다. 즉, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 이기 때문에 $a_\lambda(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^\lambda, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^\lambda)$ 가 작기 위해서는 $\|\nabla \cdot \mathbf{u}_h^\lambda\|$ 가 작아야만 한다. 그러나 $\|\mathbf{u}_h^\lambda\|$ 가 작기 때문에 \mathbf{u}_h^λ 가 $[H^1(\Omega)]^2$ 공간상에서 \mathbf{u} 를 근사시킬 수가 없다.

주목 3.1. 수학적 관점에서 보면 잠김현상이라 부르는 것보다 조건이 아주 나쁜(poorly conditioned) 것이라고 부르는 것이 낫다.

제 4 절 잠김현상의 해결

잠김현상을 해결하는 방법으로는 여러 가지가 있다. 이 절에서는 그 중에서도 비순응 유한요소법과 penalty 항을 가지는 혼합문제, 그리고 일계 최소자승법을 소개한다.

4.1. 비순응 유한요소법: 삼각형 요소

이 절에서는 [7, 9, 10]에 있는 결과를 소개한다. 먼저 볼록 다각형 영역 Ω 에서 동차의 순수변위문제에 대한 비순응(nonconforming) 조각적 선형 유한요소공간을 생각하자. 이 유한요소공간의 장점은 발산이 0이 되는 조건을 가진 함수에 대하여 좋은 근사를 할 수 있다는 것이다. 순수 변위문제에 대한 변분문제와 타원성, 해의 유일성, 타원 정칙성 등은 2절에서 잘 설명이 되어 있다. 유계인 겹선형 형식

$$a^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mu \int_{\Omega} \text{grad}(\mathbf{u}) : \text{grad}(\mathbf{v}) \, dx + (\mu + \lambda) \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, dx$$

를 $[H_0^1(\Omega)]^2$ 에서 정의하면 이것은 (2.2)의 약한 형식 $a(\cdot, \cdot)$ 와 동치이다.

이제 \mathcal{T}_h 를 Ω 의 삼각화라 하고 \mathcal{V}_h^* 를 Crouzeix-Raviart의 비순응 선형 유한요소라 하자. 즉,

$$\mathcal{V}_h^* = \{v \in L^2(\Omega) : \text{모든 } T \in \mathcal{T}_h \text{에 대하여 } v|_T \text{는 선형이고} \\ \text{각 요소들의 경계의 중점에서 연속이며} \\ \text{경계 } \Gamma \text{에 있는 변의 중점에서는 0임}\}$$

이다.

$[\mathcal{V}_h^*]^2 \not\subseteq [H^1(\Omega)]^2$ 이기 때문에 $[\mathcal{V}_h^*]^2$ 상에서의 모든 미분연산자는 조각적으로 정의되어야 한다. 즉, $\mathbf{v} \in [\mathcal{V}_h^*]^2$ 이면 모든 $T \in \mathcal{T}_h$ 에 대하여

$$\begin{aligned} (\text{grad}_h(\mathbf{v}))|_T &:= \text{grad}(\mathbf{v}|_T) \\ (\nabla_h \cdot \mathbf{v})|_T &:= \nabla \cdot (\mathbf{v}|_T) \end{aligned}$$

이다. 이렇게 조각적으로 정의된 미분연산자를 이용하여 약한 형식 $a_h^s(\cdot, \cdot)$ 로부터 $[\mathcal{V}_h^*]^2 + [H_0^1(\Omega)]^2$ 에서 대칭이며 양의 정부호를 가지는 겹선형 형식

$$a_h^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mu \int_{\Omega} \text{grad}_h(\mathbf{u}) : \text{grad}_h(\mathbf{v}) \, dx + (\mu + \lambda) \int_{\Omega} (\nabla_h \cdot \mathbf{u})(\nabla_h \cdot \mathbf{v}) \, dx$$

를 정의하자. 그러면 이산화된 변분문제는

$$(4.1) \quad a_h^s(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in [\mathcal{V}_h^*]^2$$

를 만족하는 $\mathbf{u}_h \in [\mathcal{V}_h^*]^2$ 를 찾는 것이다. $a_h^s(\cdot, \cdot)$ 가 양의 정부호를 가지기 때문에 (4.1)은 유일해를 가진다.

$[\mathcal{V}_h^*]^2 + [H_0^1(\Omega)]^2$ 상에서 비순응 에너지 노름

$$\|\mathbf{v}\|_h := a_h^s(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}$$

을 정의하면

$$\|\text{grad}_h(\mathbf{v})\| \leq \mu_1^{-1/2} \|\mathbf{v}\|_h$$

가 성립한다.

우리는 (4.1)의 유한요소해가 $\lambda \rightarrow \infty$ 함에 따라 고르게 수렴한다는 것을 보이고 싶다. 이를 위하여 두가지 구성요소가 필요한데 첫번째는 다음 도움정리이다.

도움정리 4.1. 영역 Ω 를 다각형 영역이라 하자. 모든 $p \in L^2(\Omega)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= p \\ \|\mathbf{v}\|_1 &\leq C\|p\| \end{aligned}$$

를 만족하는 $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2$ 가 존재한다. 여기서 상수 C 는 p 에 독립적이다. 더욱이 $\int_{\Omega} p dx = 0$ 이면 $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ 라 가정할 수 있다.

두번째 구성요소는

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \implies \nabla_h \cdot (\Pi_h \mathbf{u}) = 0$$

이라는 성질을 가지는 보간연산자 $\Pi_h : [H^2(\Omega)]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2 \rightarrow [\mathcal{V}_h^*]^2$ 이다. m_e 를 모서리 e 의 중점이라 하면

$$(\Pi_h \mathbf{u})(m_e) := \frac{1}{|e|} \int_e \mathbf{u} ds$$

로써 Π_h 를 정의하자. 그러면

$$\nabla \cdot (\Pi_h \mathbf{u})|_T = \frac{1}{|T|} \int_T \nabla \cdot \mathbf{u} dx \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

가 성립하고

$$\|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\| + h \|\text{grad}_h(\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u})\| \leq Ch^2 |\mathbf{u}|_2$$

인 양의 상수 C 가 존재한다. 여기서 C 는 h 에 독립적이다.

이 두가지 구성요소를 사용하여 다음 정리를 증명할 수 있다.

정리 4.1. $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2$ 과 $\mathbf{u}_h \in [\mathcal{V}_h^*]^2$ 를 각각 (2.3)과 (4.4)의 해라 하자. 그러면 최적의 오차 추정

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| + h \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h \leq Ch^2 \|\mathbf{f}\|$$

인 양의 상수 C 가 존재한다. 여기서 C 는 h 와 λ 에 독립적이다.

4.2. 비순응 유한요소법: 사각형 요소

이 절에서는 [27]에 있는 결과를 소개한다. 먼저 (2.3)의 근사해를 찾기 위하여 사각형 요소([20, 21, 11, 31])에 기반을 둔 비순응 유한요소법을 생각하자. $\mathcal{P}_\ell(E)$ 을 영역 E 에서 정의된 l 차 이하의 다항식의 집합이라 하자. [21]에서와 같이

$$\theta_\ell(t) := \begin{cases} t^2, & \ell = 0, \\ t^2 - \frac{5}{3}t^4, & \ell = 1, \\ t^2 - \frac{25}{6}t^4 + \frac{7}{2}t^6, & \ell = 2 \end{cases}$$

라 하자. 그리고

$$(4.2) \quad \mathcal{Q}_\ell = \text{Span} \{1, x_1, x_2, x_1x_2, \theta_\ell(x_1) - \theta_\ell(x_2)\}, \quad \ell = 0, 1, 2$$

를 $\hat{R} = [-1, 1]^2$ 에서의 기준공간이라 하고

$$\mathcal{Q}_\ell(Q) = \left\{ v : v = \hat{v} \circ F^{-1}, \hat{v} \in \mathcal{Q}_\ell(\hat{R}) \right\}$$

에 의하여 사각형요소 Q 에서의 기저 $\mathcal{Q}_\ell(Q)$ 를 정의하자. 여기서 $F : \hat{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 는 겹선형 사상이고 $Q = F(\hat{R})$ 이다 [7, 16].

이 절에서는 \mathcal{T}_h 를 준 정사각형 Ω_j ($j = 1, \dots, J$)로 이루어진 Ω 의 사각화라 하자. 편의상 삼각화와 사각화 모두 삼각화라 부르겠다. 또한

$$\begin{aligned} \Gamma_j &= (\partial\Omega \cap \partial\Omega_j)^\circ, \\ \Gamma_{jk} &= \Gamma_{kj} = (\partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k)^\circ, \\ S_h &= [\cup_{j,k} \Gamma_{jk}] \cup [\cup_j \Gamma_j] \end{aligned}$$

라 하자. 여기서 A° 는 집합 A 의 내부를 나타낸다. 또한 Γ_j 와 Γ_{jk} 중점을 각각 ξ_j 와 ξ_{jk} 라 하자.

먼저 $l = 1, 2$ 일 때

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\sim}^{\mathcal{C}^h} &= \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v}_j = \mathbf{v}|_{\Omega_j} \in \mathcal{Q}_\ell(\Omega_j), j = 1, \dots, J; \right. \\ &\quad \left. \mathbf{v}_j(\xi_{jk}) = \mathbf{v}_k(\xi_{kj}), \forall \{j, k\} \right\} \end{aligned}$$

라 하면 비순응 유한요소 공간을

$$\mathcal{N}_{\sim}^{\mathcal{C}^h_0} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\sim}^{\mathcal{C}^h} \mid \Gamma_j \text{의 모든 중점 } \xi_j \text{에 대하여 } \mathbf{v}(\xi_j) = \mathbf{0} \text{임} \right\}$$

으로 정의한다. 반면에 $\ell = 0$ 인 경우에는

$$\mathcal{N}\tilde{C}^h = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v}_j = \mathbf{v}|_{\Omega_j} \in \mathcal{Q}_0(\Omega_j), j = 1, \dots, J; \int_{\Gamma_{jk}} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k) ds = \mathbf{0} \forall \{j, k\} \right\}$$

라 하고 비순응 유한요소 공간을

$$\mathcal{N}\tilde{C}_0^h = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{N}\tilde{C}^h \mid \int_{\Gamma_j} \mathbf{v} ds = \mathbf{0} \forall j \right\}$$

로 정의한다.

주목 4.1. $\mathcal{N}\tilde{C}^h$ 의 정의에 의하여 4개의 국소적 자유도(degree of freedom)가 결정된다. 남은 하나의 자유도는

$$\int_{\Omega_j} f(x_1, x_2) x_1 x_2 \det(J_{F^{-1}}(x_1, x_2)) dx_1 dx_2$$

에 의하여 결정된다. 여기서 $\det(J_{F^{-1}}(x_1, x_2))$ 는 $\Omega_j = F(\hat{R})$ 일 때 곱셈형 사상 $F : \hat{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 의 역의 야코비(Jacobi) 행렬식을 나타낸다.

주목 4.2. 만약 Ω_j 가 직사각형이거나 평행사변형이면 유한요소공간 $\mathcal{N}\tilde{C}_0^h$ 의 요소 중에서 (4.2)에서 주어진 기준공간 \mathcal{Q}_ℓ 에서 $x_1 x_2$ 에 대응되는 요소를 제거할 수 있다. 이 경우 유한요소의 최적 수렴도를 잃지 않는다. 일반적인 사각형요소의 경우 $x_1 x_2$ 에 대응되는 요소는 기포(bubble)모양을 하고 있다.

다음 정리는 유한요소법의 최적 수렴도를 보이는데 있어서 가장 중요한 역할을 하는 것이다 [21].

명제 4.1. 위에서 정의한 유한요소공간은

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k, \mathbf{1} \rangle_{\Gamma_{jk}} &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{N}\tilde{C}_0^h, \\ \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{1} \rangle_{\Gamma_j} &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{N}\tilde{C}_0^h \end{aligned}$$

인 직교성을 가지고 있다. 여기서 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ 는 경계 Γ 에서의 내적을 나타낸다.

4.1절에서의 보간연산자 Π_h 과 같은 기능을 하는 보간연산자 $\tilde{\Pi}_h : [H^1(\Omega)]^2 \rightarrow \mathcal{N}\tilde{C}_0^h$ 를

- (i) $[\Pi_h \mathbf{v}(m_e)]_i = \frac{1}{|e|} \langle v_i, 1 \rangle_e$ for $i = 1, 2 \forall \mathbf{v} = (v_1, v_2)^t \in [\mathcal{P}_0(e)]^2$, 여기서 e 는 K 의 모서리이며 m_e 는 e 의 중점임,
(ii) $\int_{\Omega_j} (\Pi_h \mathbf{v}(x_1, x_2) - \mathbf{v}(x_1, x_2)) x_1 x_2 \det(J_{F^{-1}}(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 = 0$
 $\forall \Omega_j \in \mathcal{T}_h$

라고 정의하자. 또한

$$M_h := \{v \in L^2(\Omega) : \Omega_j \text{에서 } v|_{\Omega_j} \text{는 모든 } j \text{에 대하여 상수함수임}\}$$

를 정의하고 $P_0 : H^1(\Omega) \rightarrow M_h$ 는

$$(P_0 v - v, 1)_{\Omega_j} = 0 \quad \forall \Omega_j$$

인 직교사영으로 정의하자. 그러면 표준 오차추정으로부터

$$\|\phi - P_0 \phi\| \leq Ch |\phi|_1 \quad \forall \phi \in H^1(\Omega)$$

가 성립한다. 또한 S_h 상에서 조각적 상수함수들의 집합을 Q_h 라 하고 $Q_0 v : H^1(\Omega) \rightarrow Q_h$ 를 직교사영이라 하면

$$Q_0 v = \frac{1}{|e|} \langle v, 1 \rangle_e, \quad e \in S_h$$

가 성립한다. 표준적인 근사이론에 의하면

$$\left(\sum_j \|q - Q_0 q\|_{0, \partial \Omega_j}^2 \right)^{1/2} \leq Ch^{1/2} \|q\|_1 \quad \forall q \in H^1(\Omega)$$

이다. \mathcal{T}_h 에 의존하는 비순응 소볼레프 노름과 반노름을 각각

$$\|\phi\|_{m, h} = \left[\sum_j \|\phi\|_{m, \Omega_j}^2 \right]^{1/2} ; \quad |\phi|_{m, h} = \left[\sum_j |\phi|_{m, \Omega_j}^2 \right]^{1/2}$$

라고 정의하자.

4.1절에서와 같이 표준적인 브램블(Bramble)-힐버트(Hilbert) 이론에 의하면 $k = 0, 1$ 에 대하여

$$|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}|_{1, h} \leq Ch^k |\mathbf{v}|_{k+1} \quad \forall \mathbf{v} \in [H^{k+1}(\Omega)]^2$$

이다.

$$V_h := \mathcal{N}C_0^h + ([H^2(\Omega)]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2)$$

이라 하고 곱선형 형식 $a_h(\cdot, \cdot) : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ 을

$$(4.3) \quad a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\lambda + \mu)(P_0 \nabla_h \cdot \mathbf{u}, P_0 \nabla_h \cdot \mathbf{v}) + \mu(\text{grad}_h(\mathbf{u}), \text{grad}_h(\mathbf{v}))$$

라고 정의하자. (2.3)에 대한 비순응 갤러킨 근사는

$$(4.4) \quad a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{N}C_0^h$$

의 해 $\mathbf{u}_h \in \mathcal{N}_0^h$ 를 찾는 것이다. 여기서 P_0 라는 연산자를 적용한 후 적분하는 것을 감소적분법(method of reduced integration)이라 부른다. (4.4)의 해 \mathbf{u}_h 의 유일성은 (4.4)에서 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ 이라 하고 $\mathbf{v} = \mathbf{u}_h$ 를 대입하면 얻을 수 있다. 그러면 (4.3)에 의하여 \mathbf{u}_h 는 각 Ω_j 에서 상수함수가 된다. $\mathbf{u}_h(\xi_j) = \mathbf{0} \forall \xi_j \in \Gamma_j$ 이고 모든 중점 ξ_{jk} 에서 \mathbf{u}_h 가 연속이기 때문에 \mathbf{u}_h 는 Ω 전체에서 $\mathbf{0}$ 이 된다.

발산정리와 Π_h 의 정의에 의하여 모든 $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^2$ 에 대하여

$$\int_{\Omega_j} \nabla \cdot (\Pi_h \mathbf{u}) dx = \int_{\Omega_j} \nabla \cdot \mathbf{u} dx \quad \forall \Omega_j$$

가 성립한다. 따라서

$$P_0 \nabla_h \cdot (\Pi_h \mathbf{u}) = P_0 \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^2$$

이다. 이를 이용하여 최적의 유한요소오차 추정을 얻을 수 있다.

정리 4.2. $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2$ 와 $\mathbf{u}_h \in \mathcal{N}_0^h$ 를 각각 (2.3)과 (4.4)의 해라 하자. 그러면 최적의 오차 추정

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| + h\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h \leq Ch^2\|\mathbf{f}\|$$

가 성립한다. 여기서 $C > 0$ 는 $(\lambda, \mu) \in (0, \infty) \times [\mu_1, \mu_2]$ 에 독립적이다.

4.3. Penalty 항을 가지는 혼합문제

이 절에서는 [26]에 있는 결과를 소개한다. 먼저 변분문제 (2.3)에서

$$\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} = p$$

라 하면

$$(4.5) \quad \int_{\Omega} \{2\mu \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) + p \nabla \cdot \mathbf{v}\} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q dx - \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} p q dx = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega)$$

를 만족하는 $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{V} \times L_2(\Omega)$ 를 찾는 문제를 얻는다. 접선형 형식 $\int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v})$ 가 \mathcal{V} 에서 타원성을 가지기 때문에 (4.5)는 스토크스 방정식과 매우 유사하다. 순수변위문제의 경우에는 $\int_{\Omega} p dx = 0$ 이 되고 $L^2(\Omega)$ 대신 $L_0^2(\Omega)$ 를 사용한다.

Penalty 항을 가지는 혼합문제의 이론에 의하면 $\lambda \rightarrow \infty$ 함에 따라 (4.5)의 해는

$$(4.6) \quad \int_{\Omega} \{2\mu \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) + p \nabla \cdot \mathbf{v}\} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q dx = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega)$$

의 해로 수렴한다. 이것은 이차 형식 $\int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) dx$ 가 발산이 0인 함수뿐만 아니라 전공간에서 coercive하고 또한 penalty 항은 정착섭동(regular perturbation)이기 때문이다. 따라서 스토크스 문제에서와 같은 유한요소를 사용하여 (4.5)를 풀 수 있다. 즉, LBB 안정성 조건을 만족하는 적당한 유한요소 공간을 사용하면 비압축 상태에서 안정적인 유한요소해를 얻는다. (4.6)의 유한요소해의 안정성은 (4.5)로부터 이어받은 것이다.

다음은 [26]에 있는 것으로서 순수 traction 문제에 대한 결과이다. 먼저 곱선형 형식

$$\mathcal{B}((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) := \int_{\Omega} \left(\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) + p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})q - \frac{1}{\gamma} pq \right) dx$$

를 정의하자. 그러면 방정식 (4.5)와 동치문제로서 모든 $(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{N}^{\perp} \times L^2(\Omega)$ 에 대하여

$$(4.7) \quad \mathcal{B}((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx$$

를 만족하는 $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{N}^{\perp} \times L^2(\Omega)$ 를 찾는 문제를 얻는다. $\mathcal{N}^{\perp} \times L^2(\Omega)$ 에서 래디젠스카야(Ladyzenskaya)-바부스카(Babuška)-브레지(Brezzi) 안정성조건이 성립하기 때문에 (4.7)은 유일해를 가진다. LBB 안정성조건은 두가지 구성요소를 가지는데 하나는 콘의 제2 부등식(정리 2.3)이고 다른 하나는 도움정리 4.1과 유사한 성질을 가지는 발산연산자의 역의 존재성이다. (보다 자세한 것은 [8]을 보라.)

$\{T^k\} (k \geq 0)$ 를 Ω 의 삼각화의 집합이라 하자. 여기서 \mathcal{T}^{k+1} 은 \mathcal{T}^k 의 삼각형의 변의 중점을 이어서 만들어진다. $h_k := \max_{T \in \mathcal{T}^k} \text{diam}(T)$ 라 하면 $h_k = 2h_{k+1}$ 이다. \mathcal{V}_k 를 (P-1) 유한요소공간 (3.1)이라 하자. 순수 traction 문제를 풀고 있기 때문에 여기서 사용하는 유한요소 공간은

$$\mathcal{V}_k^{\perp} := \mathcal{V}_k \cap \mathcal{N}^{\perp}$$

이다. 혼합유한요소법을 설명하기 위하여

$$\mathcal{Q}_k := \{q \in L^2(\Omega) : q|_T \text{ 는 모든 } T \in \mathcal{T}^k \text{에 대하여 상수함수임}\}$$

을 정의하자. 그러면 $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{V}_{k+1} \subset [H^1(\Omega)]^2$ 이고 $\mathcal{V}_k^{\perp} \subset \mathcal{V}_{k+1}^{\perp} \subset \mathcal{N}^{\perp}$ 이다.

임의의 k 에 대하여

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}_k((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) \\ & := \int_{\Omega} \left(\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) + p(P_{k-1}\nabla \cdot \mathbf{v}) + (P_{k-1}\nabla \cdot \mathbf{u})q - \frac{1}{\gamma}pq \right) dx \end{aligned}$$

는 $[H^1(\Omega)]^2 \times L^2(\Omega)$ 에서 정의된 곱선형 형식이다. 여기서 P_{k-1} 은 Q_{k-1} 로의 L^2 -정사영이다. \mathcal{B}_k 는 대칭이며 부정부호를 가지는 형식이다. 코시-슈바르츠 부등식에 의하여 모든 $(\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V}_k^\perp \times Q_{k-1}$ 에 대하여

$$|\mathcal{B}_k((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q))| \leq C(\|\mathbf{u}\|_1 + \|p\|)(\|\mathbf{v}\|_1 + \|q\|)$$

를 만족하는 양의 상수 C 가 존재한다. 여기서 C 는 (\mathbf{u}, p) 와 (\mathbf{v}, q) 에 독립적이다.

따라서 모든 $(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V}_k^\perp \times Q_{k-1}$ 에 대하여

$$(4.8) \quad \mathcal{B}_k((\mathbf{u}_k, p_k), (\mathbf{v}, q)) = \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx$$

를 만족하는 $(\mathbf{u}_k, p_k) \in \mathcal{V}_k^\perp \times Q_{k-1}$ 을 찾고자 한다. 이것은 [22]에서 Falk가 제안한 것의 변형으로서 (4.7)의 이산화이다. 여기서 P_{k-1} 이라는 연산자를 적용한 후 적분하는 것도 (4.3)과 같이 감소적분법이라 부른다.

다음 도움정리는 정리 2.3과 유사한 결과이다.

도움정리 4.2. 주어진 $q \in Q_{k-1}$ 에 대하여

$$P_{k-1}\nabla \cdot \mathbf{u} = q \quad \& \quad \|\mathbf{u}\|_1 \leq C\|q\|$$

을 만족하는 $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_k$ 가 존재한다. 여기서 C 는 \mathbf{u} 와 q 에 독립적이다.

명제 4.1 (LBB 안정성 조건). 모든 $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{V}_k \times Q_{k-1}$ 에 대하여

$$\sup_{(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V}_k^\perp \times Q_{k-1} \setminus \{0,0\}} \frac{\mathcal{B}_k((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q))}{\|\mathbf{v}\|_1 + \|q\|} \geq C(\|\mathbf{u}\|_1 + \|p\|)$$

를 만족하는 양의 상수 C 가 존재한다. 여기서 C 는 (\mathbf{u}, p) 에 독립적이다.

정리 4.3. $(\mathbf{u}, p) \in ([H^1(\Omega)]^2 \cap \mathcal{N}^\perp) \times L^2(\Omega)$ 를 (4.7)의 해라 하고 $(\mathbf{u}_k, p_k) \in \mathcal{V}_k \times Q_{k-1}$ 를 (4.8)의 해라 하자. 그러면

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k\| + h_k(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k\|_1 + \|p - p_k\|) \leq Ch_k^2\|\mathbf{f}\|$$

이다. 여기서 C 는 (\mathbf{u}, p) 와 (\mathbf{u}_k, p_k) 에 독립적이다.

4.4. 일계 최소자승법

이 절에서는 [14]의 결과로서 순수 traction 문제만 다룬다. 먼저 2-벡터함수 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^t$ 에 대하여 성분별로 연산자를 작용하면 이를 블럭 열벡터로 가지는 벡터가 만들어진다. 예를 들면

$$\nabla \mathbf{u} = (\partial_1 u_1, \partial_2 u_1, \partial_1 u_2, \partial_2 u_2)^t$$

이다. 이는 2절에서의 정의와는 다르나 일계 최소자승법을 기술하기에는 훨씬 편리하다. 이 절에서는 이 정의를 따른다. 또한 만약 \mathbf{U}_1 과 \mathbf{U}_2 가 2-벡터함수라면

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix}$$

라고 표기하자. 만약 D 가 2-벡터함수에 대하여 정의되어 있다면

$$D\mathbf{U} = \begin{pmatrix} D\mathbf{U}_1 \\ D\mathbf{U}_2 \end{pmatrix}$$

는 블럭 열벡터로의 확장이다. 예를 들어 $D = \nabla \cdot, \nabla \times$ 등이다. 열 벡터함수에 대한 내적과 노름은 성분별로 $\|\mathbf{U}\|^2 = \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{U}_i\|^2$ 에 의하여 자연스럽게 정의된다. 이제 변위 유동(flux)변수 $\mathbf{U} = \nabla \mathbf{u}$ 를 도입하자.

일반성을 잃지 않고 $\mu = 1$ 이라 하자. 그러면 문제 (1.1)은

$$(4.9) \quad \begin{aligned} -\nabla \cdot (A\nabla \mathbf{u}) &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{n} \cdot (A\nabla \mathbf{u}) &= \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma \end{aligned}$$

로 간단하게 쓸 수 있다. 여기서

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

이다. \mathbf{U} 의 정의로 부터 Ω 에서 $\nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{0}$ 이기 때문에

$$\begin{aligned} \mathbf{U} - \nabla \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \\ -\nabla \cdot A\mathbf{U} &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla \times \mathbf{U} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{n} \cdot A\mathbf{U} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma \end{aligned}$$

는 (4.9)와 동치이다. 실제로 이렇게 확장된 것보다 더 중요한 것은

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot A\mathbf{U} &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla \times \mathbf{U} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{n} \cdot A\mathbf{U} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma \end{aligned}$$

으로서 \mathbf{U} 에만 연루되어 있으며 소위 1단계라 불리운다. 이 축소된 방정식계가 잘 구성이 된(well posed) 것이라는 것이 [14]에 있다. 일단 \mathbf{U} 를 찾은 후에 2단계라고 불리우는

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= \mathbf{U} \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{n} \cdot A \nabla \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma \end{aligned}$$

를 풀어서 변위 \mathbf{u} 를 찾을 수 있다.

우리는 (4.9)를 \mathcal{V}_T 공간에서 풀기 때문에 (2.7)에 의하여

$$\int_{\Omega} (U_2 - U_3) dx = 0, \quad \text{i.e., } \mathbf{U} \perp (0, 1, -1, 0)^t$$

이다. 따라서 새로운 변수에 대한 공간으로서

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 &= \{ \mathbf{U} \in [H^1(\Omega)]^4 : \mathbf{n} \cdot A \mathbf{U} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma, \mathbf{U} \perp (0, 1, -1, 0)^t \} \\ \mathcal{W}_{-1} &= \{ \mathbf{U} \in [L^2(\Omega)]^4 : \nabla \cdot A \mathbf{U} \in [L^2(\Omega)]^2, \mathbf{n} \cdot A \mathbf{U} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma, \\ &\quad \mathbf{U} \perp (0, 1, -1, 0)^t \} \end{aligned}$$

를 정의한다. 또한 범함수

$$\begin{aligned} G(\mathbf{U}, \mathbf{u}; \mathbf{f}) &= \|\mathbf{f} + \nabla \cdot A \mathbf{U}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{U}\|^2 + (A(\mathbf{U} - \mathbf{u}), \mathbf{U} - \mathbf{u}) \\ &\quad \text{for } (\mathbf{U}, \mathbf{u}) \in \mathcal{W}_0 \times \mathcal{V}_T, \\ G_0(\mathbf{U}; \mathbf{f}) &= \|\mathbf{f} + \nabla \cdot A \mathbf{U}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{U}\|^2 \quad \text{for } \mathbf{U} \in \mathcal{W}_0, \\ G_{-1}(\mathbf{U}; \mathbf{f}) &= \|\mathbf{f} + \nabla \cdot A \mathbf{U}\|_{-1}^2 + \|\nabla \times \mathbf{U}\|_{-1}^2 \quad \text{for } \mathbf{U} \in \mathcal{W}_{-1} \end{aligned}$$

과

$$\begin{aligned} M(\mathbf{U}, \mathbf{u}) &= \|\mathbf{U}\|_1^2 + \lambda^2 \|\nabla \text{tr} \mathbf{U}\|^2 + \lambda \|\text{tr} \mathbf{U}\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} \text{grad}(\mathbf{u})\|^2 \\ &\quad \text{for } (\mathbf{U}, \mathbf{u}) \in \mathcal{W}_0 \times \mathcal{V}_T, \\ M_0(\mathbf{U}) &= \|\mathbf{U}\|_1^2 + \lambda^2 \|\nabla \text{tr} \mathbf{U}\|^2 \quad \text{for } \mathbf{U} \in \mathcal{W}_0, \\ M_{-1}(\mathbf{U}) &= \|\mathbf{U}\|^2 + \lambda^2 \|\text{tr} \mathbf{U}\|^2 \quad \text{for } \mathbf{U} \in \mathcal{W}_{-1} \end{aligned}$$

을 정의하자.

목표는 $G(\mathbf{U}, \mathbf{u}; \mathbf{0})$ 가 $\mathcal{W}_0 \times \mathcal{V}_T$ 에서 정의된 H^1 형태의 노름인 $M(\mathbf{U}, \mathbf{u})$ 와 고르게 동등(uniform equivalence)하다는 것을 보이는 것이다. 이를 위하여 방정식 (4.9)에 대한 표준적인 H^1 정칙성 추정(cf. [23, 24])

$$(4.10) \quad \lambda \|\nabla \cdot \mathbf{u}\| + \|\mathbf{u}\|_1 \leq C \|\nabla \cdot A \nabla \mathbf{v}\|_{-1} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_T$$

를 이용한다. 만약 영역 Ω 가 볼록다각형 또는 $C^{1,1}$ 경계를 가지면 표준 H^2 정칙성 추정(cf. [23, 24])

$$(4.11) \quad \|\mathbf{u}\|_2 \leq C \|\nabla \cdot A \nabla \mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_T \cap [H^2(\Omega)]^2$$

을 이용한다. 또한 스토크스 방정식에 대한 유사한 추정이 필요하다. 실제로 임의의 상수 $\rho > 0$ 에 대하여 스토크스 방정식의 H^1 정칙성에 의하여

$$(4.12) \quad \|\rho \mathbf{v}\|_1^2 + \|p\|^2 \leq C \| -\rho \nabla \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) + \nabla p \|_{-1,0}^2 \\ \forall p \in L_0^2(\Omega), \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$$

이 성립한다. 여기서 \mathbf{v} 는 발산이 0이다. 또한 스토크스 방정식의 H^2 정칙성(cf. [24, 25])에 의하여

$$(4.13) \quad \|\rho \mathbf{v}\|_2^2 + \|p\|_1^2 \leq C \| -\rho \nabla \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) + \nabla p \| \\ \forall p \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}, \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2 \cap [H^2(\Omega)]^2$$

이며 \mathbf{v} 는 발산이 0이다. (4.10)과 (4.11), (4.12), (4.13)을 이용하여 다음 정리를 증명할 수 있다.

정리 4.4. 범함수 $G_0(\mathbf{U}; \mathbf{0})$ 와 $M_0(\mathbf{U})$ 는 고른 동치 관계

$$\frac{1}{C} M_0(\mathbf{U}) \leq G_0(\mathbf{U}; \mathbf{0}) \leq C M_0(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{W}_0$$

을 만족한다. 또한 범함수 $G_{-1}(\mathbf{U}; \mathbf{0})$ 와 $M_{-1}(\mathbf{U})$ 는 고른 동치 관계

$$\frac{1}{C} M_{-1}(\mathbf{U}) \leq G_{-1}(\mathbf{U}; \mathbf{0}) \leq C M_{-1}(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{W}_{-1}$$

을 만족한다.

따름정리 4.1. 범함수 $G(\mathbf{U}, \mathbf{u}; \mathbf{0})$ 와 $M(\mathbf{U}, \mathbf{u})$ 는 고른 동치 관계

$$\frac{1}{C} M(\mathbf{U}, \mathbf{u}) \leq G(\mathbf{U}, \mathbf{u}; \mathbf{0}) \leq C M(\mathbf{U}, \mathbf{u}) \quad \forall (\mathbf{U}, \mathbf{u}) \in \mathcal{W}_0 \times \mathcal{V}_T$$

를 만족한다.

참고 문헌

- [1] D. N. Arnold, *Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem*, Numer. Math. **37** (1981), 405–421.
- [2] D. N. Arnold, F. Brezzi, and J. Douglas, Jr., *PEERS: A new mixed finite element for plane elasticity*, Japan J. Appl. Math. **1** (1984), 347–367.
- [3] I. Babuška and M. Suri, *Locking effect in the finite element approximation of elasticity problem*, Numer. Math. **62** (1992), 439–463.
- [4] ———, *On locking and robustness in the finite element method*, SIAM J. Numer. Anal. **29** (1992), 1261–1293.
- [5] I. Babuška and B. Szabo, *On the rates of convergence of the finite element method*, Internat. J. Numer. Meth. Engng. **18** (1982), 323–341.

- [6] D. Braess, *Finite Elements: Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [7] S. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical theory of finite element methods*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1994.
- [8] S. C. Brenner, *An optimal-order multigrid method for P1 nonconforming finite elements*, Math. Comp. **52** (1989), 1–15.
- [9] ———, *A nonconforming mixed multigrid method for the pure traction problem in planar linear elasticity*, Math. Comp. **63** (208) (1994), 435–460, S1–S5.
- [10] S. C. Brenner and L. Y. Sung, *Linear finite element methods for planar linear elasticity*, Math. Comp. **59** (1992), 321–338.
- [11] Z. Cai, J. Douglas, Jr., J. E. Santos, D. Sheen, and X. Ye, *Nonconforming quadrilateral finite elements: A correction*, CALCOLO **37** (2000), 253–254.
- [12] Z. Cai, C.-O. Lee, T. A. Manteuffel, and S. F. McCormick, *First-order system least squares for linear elasticity: numerical results*, SIAM J. Sci. Comput. **21** (2000), no. 5, 1706–1727.
- [13] Z. Cai, T. A. Manteuffel, and S. F. McCormick, *First-order system least squares for the Stokes equations, with application to linear elasticity*, SIAM J. Numer. Anal. **34** (1997), no. 5, 1727–1741.
- [14] Z. Cai, T. A. Manteuffel, S. F. McCormick, and S. Parter, *First-order system least squares (FOSLS) for planar linear elasticity: pure traction problem*, SIAM J. Numer. Anal. **35** (1998), no. 1, 320–335.
- [15] X. Cheng, W. Han, and H. Huang, *Finite element methods for Timoshenko beam, circular arch and Reissner-Mindlin plate problems*, J. Comput. Appl. Math. **79** (1997), no. 2, 215–234.
- [16] P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [17] ———, *Mathematical Elasticity, Volume I: Three Dimensional Elasticity*, volume 20 of *Studies in Mathematics and its Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [18] ———, *Mathematical Elasticity, Volume II: Theory of Plates*, volume 27 of *Studies in Mathematics and its Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1997.
- [19] ———, *Mathematical Elasticity, Volume III: Theory of Shells*, volume 29 of *Studies in Mathematics and its Applications*, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [20] M. Crouzeix and P.-A. Raviart, *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary stokes equations I*, RAIRO Anal. Numér. Sér. **7** (1973), 33–75.
- [21] J. Douglas Jr., J. E. Santos, D. Sheen, and X. Ye, *Nonconforming Galerkin methods based on quadrilateral elements for second order elliptic problems*, RAIRO Math. Model. Numer. Anal. **33** (1999), no. 4, 747–770.
- [22] R. S. Falk, *Nonconforming finite element methods for the equations of linear elasticity*, Math. Comp. **57** (1991), 529–550.
- [23] P. Grisvard, *Problèmes aux limites dans les ploygones*, Mode d'emploi, EDF Bull. de la Direction des Etudes et Recherches Ser. C Mathematiques, Informatique, **1** (1986), 21–59.
- [24] ———, *Singularités en élasticité*, Arch. Rat. Mech. Anal. **107** (1989), 157–180.
- [25] R. B. Kellogg and J. E. Osborn, *A regularity result for the stokes problem in a convex polygon*, J. Functional Anal. **21** (1976), 397–431.

- [26] C.-O. Lee, *A conforming mixed finite element method for the pure traction problem of linear elasticity*, Appl. Math. Comp. **93** (1998), 11–29.
- [27] C.-O. Lee, J. Lee, and D. Sheen, *A locking-free nonconforming finite element method for planar linear elasticity*, KAIST DAM Research Report 01-1.
- [28] J. E. Marsden and T. Jr. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover, New York, 1983.
- [29] J. Nečas, *Les méthodes direct en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [30] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, and G. A. Yosifian, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, volume 26 of *Studies in Mathematics and its Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [31] R. Rannacher and S. Turek, *Simple nonconforming quadrilateral Stokes element*, Numerical Methods for Partial Differential Equations **8** (1972), 97–111.
- [32] Ch. Schwab, *p- and hp- Finite Element Methods*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [33] R. Stenberg, *A family of mixed finite elements for the elasticity problem*, Numer. Math. **53** (1988), 513–538.
- [34] M. Vogelius, *An analysis of the p-version of the finite element method for nearly incompressible materials. Uniformly valid, optimal error estimates*, Numer. Math. **41** (1983), no. 1, 39–53.

이 창 옥

한국과학기술원 응용수학전공

대전시 유성구 구성동 373-1

305-701

E-mail: colee@amath.kaist.ac.kr