

사면의 지하수 흐름에서 Bayesian 이론을 이용한 매개변수 추정

Parameter Estimation of Groundwater Flow in Hillside Slopes Using Bayesian Approach

이 인 모*¹ Lee, In-Mo
이 주 공*² Lee, Joo-Gong
김 영 옥*³ Kim, Young-Uk

Abstract

An increase of porewater pressure caused by the increase of groundwater levels can cause slope instability. However, it is not an easy task to predict groundwater levels in hillside slopes because there are many sources of errors encountered such as modelling error, model parameter uncertainties, etc.. To overcome the uncertainties encountered and to obtain the optimized parameters for assessing the groundwater levels, inverse analysis is used with the automated parameter estimation techniques. Numerical model adopted for parameter estimation can account for unsaturated flow as well as saturated flow. The major parameters to be estimated were the saturated permeability(K_s), the saturation suction(ψ_e) and the parameter b used for the unsaturated permeability function. Three parameter estimation techniques are adopted in this study: the Maximum Likelihood(ML); the Maximum-A-Posterior(MAP); and the Extended Bayesian- an Method(EBM). The ability of predicting the groundwater levels utilizing three methods is compared. It was confirmed that the EBM which can overcome the matching problem between the observation data and the prior information by introducing the hyperparameter β is superior to the MAP and the ML for evaluating appropriate parameter values and parameter uncertainties.

요 지

지하수위의 상승에 따른 간극수압의 증가는 사면의 불안정을 야기할 수 있다. 그러나 모델링 오차, 계측오차, 모델변수의 불확실성 등과 같은 오차로 인하여 사면에서의 지하수위 변동을 예측하는 것은 매우 어렵다. 이러한 불확실성을 극복하고 지하수위 변동을 평가하기 위한 최적의 모델변수를 구하기 위하여 역해석 기법이 사용되고 있다. 본 논문에서는 사면에서의 지하수위 변동을 예측하기 위하여 포화대에서의 지하수 흐름과 불포화대에서의 지하수 흐름을 동시에 고려할 수 있는 수치해석 모델과 변수예측기법을 적용하였다. 따라서, 본 논문에서는 포화투수계수(K_s), 포화흡인력(ψ_e) 및 불포화 투수 계수의 함수에 사용되는 경험적인 상수(b)를 주요 매개변수로 선정하여 역해석을 실시하였다. 그리고, 역해석 기법 가운데 Maximum Likelihood(ML), Maximum-A- Posterior(MAP) 및 Extended Bayesian Method(EBM)에 대하여 비교연구를 실시하였다. 위의 세가지 방법 가운데 EBM은 가상의 변수(Hyperparameter) β 를 도입함으로써 현장계측치와 사전정보를 가장 잘 조화시키는 방법으로 다른 ML, MAP 보다 탁월한 방법인 것을 알 수 있었다.

Keywords : Inverse analysis, Groundwater, Suction, Permeability, Parameter estimation

*1 정희원, 고려대학교 공과대학 토목환경공학과 교수

*2 정희원, 고려대학교 공과대학 토목환경공학과 박사과정

*3 정희원, 명지대학교 SOC공학부 토목환경공학과 조교수

1. 서론

사면에서 지하수위 변동에 대한 예측은 사면의 안정성을 평가하는데 있어서 매우 중요한 요소이다. 따라서, 사면내 지하수위 변동을 적절히 예측하기 위하여 경험적인 방법, 해석적인 방법, 수치해석적인 방법 등의 많은 노력이 수행되었다. 그러나, 이러한 수학적인 모델을 이용한 지하수위의 예측은 여러가지 간편화과정이 수반되므로 모델링 오차, 매개변수의 불확실성에 의한 오차 등으로 인하여 정확한 지하수위 변동에 대한 예측을 어렵게 한다. 매개변수의 숫자가 많아질수록 모델링에 의한 오차는 감소하지만 매개변수의 불확실성은 증가하게 된다. 따라서, 이러한 한계를 극복하기 위하여 모델변수는 현장계측치를 이용하여 수정되어야 한다. 따라서, 본 논문에서는 이러한 모델변수의 불확실성을 평가하고, 유한요소법을 이용한 지하수거동 해석모델에 대하여 모델변수를 최적화함으로써 사면에서의 지하수위 변동을 사전에 예측하고자 하였다. 또한, 현재 많이 사용되고 있는 ML, MAP 및 EBM 등의 역해석기법을 비교연구 하였다.

2. 지하수 흐름 방정식

2.1 비정상 포화 흐름방정식

Darcy의 법칙과 질량보존의 법칙을 이용하여 지하수의 흐름방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{순수유입유량} &= \text{유입량} - \text{유출량} \\ &= \rho \cdot v_x - \left[\rho \cdot v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_x)\Delta x \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_x)\Delta x \end{aligned} \quad (1)$$

위의 방정식을 y, z 방향으로 확장하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_x)\Delta x - \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v_y)\Delta y \\ - \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot v_z)\Delta z &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot n) \end{aligned} \quad (2)$$

위의 식으로부터 다음과 같이 흐름방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y \frac{\partial h}{\partial y})$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(K_z \frac{\partial h}{\partial z}) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3)$$

여기에서 S_s 는 저류계수로써 다음과 같이 정의 된다.

$$S_s = \rho g(\alpha + n\beta) \quad (4)$$

여기에서 α 는 지반의 압축성을 나타내며, β 는 지하수의 압축성을 나타낸다.

2.2 비정상 불포화 흐름방정식

불포화토에서의 흐름의 경우 포화도가 시간에 따라 변화하므로, 위의 식(2)에서 $\rho \cdot n$ 대신에 $\rho \cdot n \cdot \theta'$ 를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_x)\Delta x - \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v_y)\Delta y \\ - \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot v_z)\Delta z &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot n \cdot \theta') \end{aligned} \quad (5)$$

위의 식으로부터 불포화토에서의 지하수흐름은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(K_x(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y}) \\ + \frac{\partial}{\partial z}(K_z(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z}) &= C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned} \quad (6)$$

2.3 유한요소법을 이용한 수치모형화

위에서 설명한 지하수 흐름방정식의 해를 구하기 위하여 유한요소법을 사용하였으며, 비정상류 상태에 대한 해는 다음과 같이 구할 수 있다(Istok, 1989).

$$\begin{aligned} \hat{h}^{(e)}(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n N_i^{(e)} h_i \\ &= [N_1^{(e)}(x, y, z) \cdots N_n^{(e)}(x, y, z)] \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

위의 식(7)을 식(3)에 대입하면 한요소내에서의 수두(Pressure head)를 근사해로 얻을 수 있다. 또한, 불포화토에서는 $\hat{h}^{(e)}$ 대신에 $\hat{\psi}^{(e)}(x, y, z)$ 를 대입하여 해를 구한다.

3. 역해석 기법

역해석 기법은 크게 수동적인 방법(manual trial and error)과 자동화 방법(automated parameter estimation)으로 구분할 수 있다. 연구가 수행되었던 초기에는 주로 수동화 작업에 의한 방법이 사용되었으나 최근에는 자동화된 매개변수 분석법이 사용되고 있다. 특히 최소자승법(Least square), Bayesian estimation, Maximum Likelihood estimation 등과 같은 확률론에 근거한 방법이 많은 학자에 의하여 사용되었다. 본 논문에서는 이와 같이 확률론에 근거한 Maximum Likelihood, Maximum-A-Posterior, Extended Bayesian 방법을 사면의 지하수 흐름에 적용하여 매개변수 분석을 수행하였다(이주공, 1996).

3.1 Extended Bayesian Method

EBM은 크게 두가지 요소로 구성된다. 첫째는 계측에 의한 모델, 둘째는 사전정보에 의한 모델이다. 지하수위의 변동은 예측값과 계측값 사이에 차이가 발생하므로 지하수위의 변동에 대한 모델은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u^{*k} = u^k(x | \theta) + \varepsilon^k \quad (8)$$

여기에서 u^{*k} 및 u^k 는 k 번째 단계에서의 계측치와 수학적 모델을 이용한 예측치를 나타내고, ε^k 는 k 번째 단계에서의 오차 벡터, x 는 알고 있는 입력값, θ 는 분석하고자 하는 매개변수이다.

또한, 사전정보는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta = p + \delta \quad (9)$$

여기에서, p 는 초기 예측된 매개변수의 평균값이고, δ 는 사전 정보의 불확실성이다.

위에서 언급한 계측에 의한 모델과 사전정보에 의한 모델이 정규분포 한다고 가정하고, Bayesian 이론을 적용하여 다음과 같이 목적함수를 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} J(\theta | \beta) &= \sum_{k=1}^K \{u^{*k} - u^k(x | \theta)\}^T V_u^{-1} \{u^{*k} - u^k(x | \theta)\} \\ &+ \beta (\theta - p)^T V_p^{-1} (\theta - p) \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서, k 는 측정단계, β 는 불확실성을 나타내는 스칼라량, V_p 는 매개변수의 분산, V_u 는 오차벡터 ε^k 의 분산이

다. 위의 식에서 알 수 있듯이 EBM과 기존의 Bayesian 방법의 근본적인 차이는 모델에 의한 예측치와 계측치 사이의 부조화가 발생하였을 경우 이를 효과적으로 조화시켜 주는 가상변수(hyperparameter) β 의 도입이다. 이러한 β 는 다음의 식에서 구할 수 있다(Yuske 등, 1994).

$$\begin{aligned} l(\beta | \theta) &= \ln \{L(\beta | u^*, p)\} \\ &\approx -\frac{1}{2} NK \ln \{J_0(\theta) + \beta J_p(\theta)\} \\ &+ \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{\beta^M |V_p^{-1}|}{\left| \sum_{k=1}^K S^{(k)T} V_u^{-1} S^{(k)} + \beta V_p^{-1} \right|} \right\} + const. \end{aligned} \quad (11)$$

여기에서 N 은 측정의 개수, M 은 매개변수의 개수, S 는 매개변수 각각에 대한 민감도이다. 위의 식(11)에서 가상의 변수 β 가 0에 근접하면 두 번째항이 매우 작은 값을 가지며, 첫 번째 항은 유한한 임의의 값을 갖게 된다. 따라서 위의 식(11)은 매우 작은 값을 갖는다. 이와는 반대로 β 가 매우 큰 값을 갖는다면 위의 경우와 반대로 첫 번째 항이 매우 작은 값을 가지며, 두 번째 항은 거의 영에 가까운 값을 갖게된다. 따라서, 위의 식(11)을 최대가 되게하는 β 가 존재하게 된다. 따라서, 위의 식(11)을 최대화시키는 β 값을 다음에 정의한 AIC(Akaike Information Criterion) 값을 이용하여 다음의 식(12)에 의하여 구한다.

$$\begin{aligned} AIC &= -2 \ln \{L(\beta | u^*, p)\} \\ &+ 2(\text{모델에 사용된 매개변수의 수}) \end{aligned} \quad (12)$$

3.2 Maximum-A-Posterior

MAP방법은 앞에서 설명한 EBM의 특수한 경우로써 가상의 변수 β 를 1로 고정시킨 경우이다. 이러한 MAP 방법은 Beck 등(1977)에 의하여 잘 설명되고 있다. MAP 방법의 목적함수는 다음의 식(13)과 같다.

$$\begin{aligned} J(\theta | \beta) &= \sum_{k=1}^K \{u^{*k} - u^k(x | \theta)\}^T V_u^{-1} \{u^{*k} - u^k(x | \theta)\} \\ &+ (\theta - p)^T V_p^{-1} (\theta - p) \end{aligned} \quad (13)$$

3.3 Maximum Likelihood

ML 방법도 위의 MAP 방법과 마찬가지로 EBM 방법의 특수한 경우로써 가상의 변수 β 를 0으로 고정시킨 경우

이다. ML 방법의 목적함수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$J(\theta | \beta) = \sum_{k=1}^K \{u^{*k} - u^k(x | \theta)\}^T V_u^{-1} \{u^{*k} - u^k(x | \theta)\} \quad (14)$$

4. 매개 변수의 선정

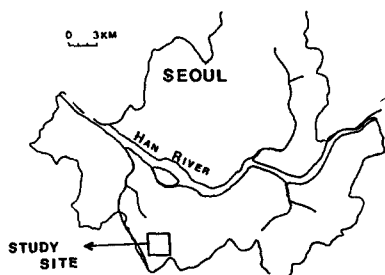
사면에서의 지하수 흐름은 포화대에서의 흐름과 불포화대에서의 흐름이 동시에 발생하므로, 포화대에서의 모델변수와 불포화대에서의 모델변수를 선정하여야 한다. 포화대에서의 지하수 흐름에 대한 모델변수는 포화투수계수(K_s)를 선택하였다. 그러나 불포화대에서의 지하수 흐름은 포화대에서의 지하수 흐름과 달리 간극의 일부가 공기로 채워져 있으므로, 본 논문에서는 이러한 영향을 고려하기 위하여 불포화투수계수 및 비함수능($C(\psi)$, specific moisture capacity)을 체적함수비(volumetric moisture content)와 모관수두(capillary head)로 정의하였다. 이들의 상관관계는 다음의 식(15)에 나타내었다(Campbell, 1974).

$$K(\psi) = K_s \left(\frac{\psi_e}{\psi}\right)^{3+2b}$$

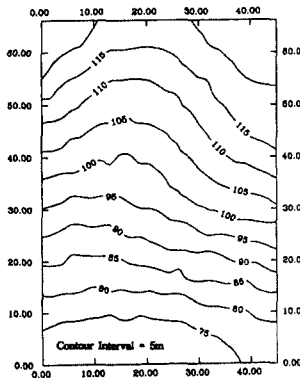
$$C(\psi) = \theta_s \psi_e \left(-\frac{1}{b}\right) \psi^{-\frac{1}{b}-1} \quad (15)$$

위에서 설명한 바와 같이 포화대와 불포화대에서의 흐름을 동시에 해석하기 위한 모델 변수는 포화투수계수(K_s), 흡인력(ψ_e , suction) 및 경험적인 상수 b 를 매개변수로 선정하였다. 이를 식으로 나타내면 다음의 식(16)과 같다.

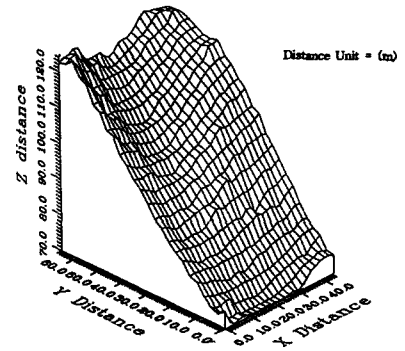
$$\theta = \begin{bmatrix} \ln K_s \\ \psi_e \\ b \end{bmatrix} \quad (16)$$



(a) Location of study site



(b) photography of study site



(c) 3-D profile of test site

그림 1. 대상지역 현황

5. 예제 해석

5.1 지반 조건

본 논문의 해석대상 지역은 1977년과 1987년에 크고 작은 사면의 붕괴가 발생했던 지역으로써 경사가 약 30° 정도이고, 투수계수가 약 25 cm/hr 이며, 통일 분류법에 따르면 지반은 SM-SC로 구분된다. 대상지역의 지반현황은 다음의 그림 1.에 나타내었다(서정복, 1993).

5.2 민감도 분석

본 논문에서 선정한 모델변수의 초기값은 문헌조사를 통하여 $K_s=25 \text{ cm/hr}$, $\psi_e=9.0 \text{ cm}$, $b=4.38$ 로 추정하였으며, 각 변수가 지하수위 변화에 미치는 영향을 알아보기 위하여 민감도 분석을 수행하였다. 민감도 분석은 그림 2.~그림 4.에 그결과를 나타내었다. 해석은 각각의 모델변수에 대하여 다른 변수는 초기 추정된 값으로 고정하고 해석을 실시하였다. 다음의 그림에서 알 수 있듯이 모든 변수가 지하수위의 변동에 커다란 영향을 미치므로 매개변수의 선정은 적절한 것으로 판단된다.

5.3 해석 결과

5.3.1 ML(Maximum Likelihood) 방법

ML 방법에 의하여 얻어진 매개변수의 값은 다음의 표 1.에 수록하였으며, 얻어진 매개변수를 이용한 지하수위변동 해석결과는 다음의 그림 5.에 나타내었다. 그림 5.에서 알 수 있듯이 ML을 이용하여 얻은 매개변수 값을 이용한

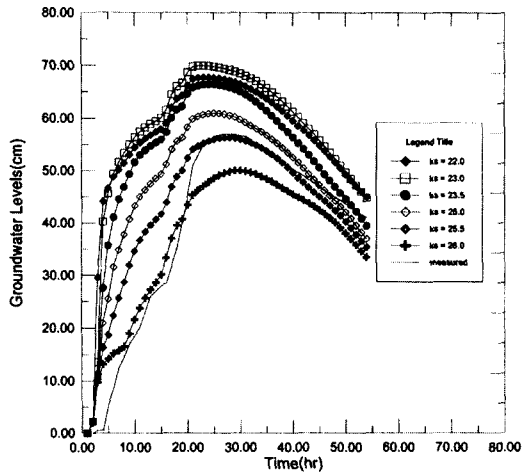


그림 2. 포화투수계수에 대한 민감도 분석

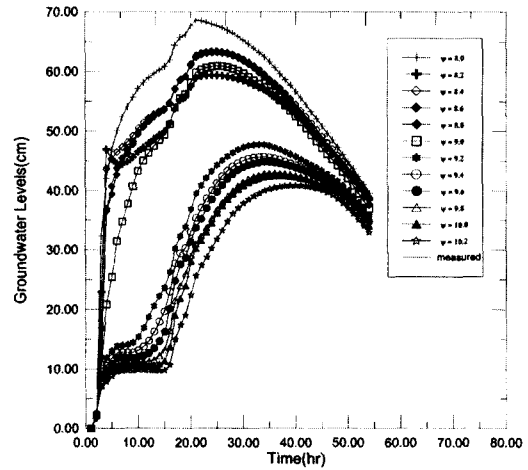


그림 3. 흡인력(suction)에 대한 민감도 분석

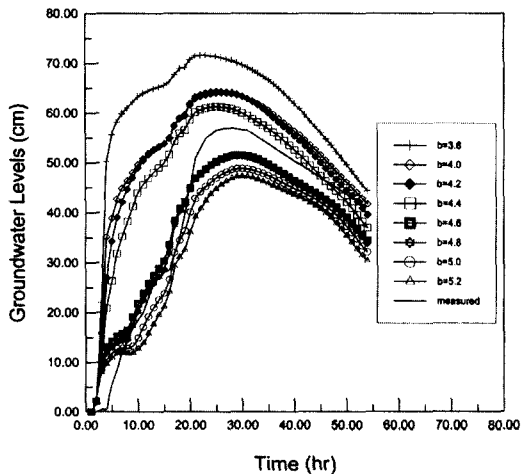


그림 4. 경첩계수 b에 대한 민감도 분석

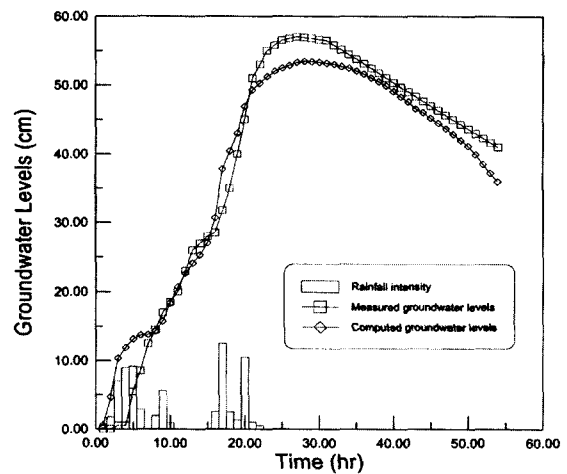


그림 5. ML로부터 예측된 지하수위의 변화

지하수위 변화는 계측한 값과 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

5.3.2 MAP(Maximum-A-Posterior) 방법

MAP 방법에 의하여 얻어진 매개변수의 값은 다음의 표 2에 수록하였으며, 이 매개변수를 이용한 해석결과는 다음의 그림 6에 나타내었다. MAP 방법 또한 계측결과와 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

5.3.3 EBM(Extended Bayesian Method) 방법

위에서 제시한 두 방법과는 달리 EBM 방법을 적용하기 위해서는 가상의 변수 β 를 우선 구해야 한다. 가상의 변수 β 는 앞에서 제시한 식 (11)을 최소화하는 값으로서 β 와 AIC 값의 관계는 다음의 그림 7과 그림 8에

표 1. ML에 의한 매개변수 추정값

	$\ln(K_s)$	ψ_e	b	목적함수
0	3.219	9.0	4.38	8485.29
1	3.155	9.5833	4.4146	3155.98
2	3.119	9.4445	5.2821	2703.25
3	3.092	9.4457	5.6002	909.50
4	3.069	9.6231	5.8559	803.90
5	3.060	9.6277	5.8392	768.89
6	3.062	9.6113	5.8196	640.76

나타내었다. 이러한 과정을 거쳐 EBM 방법에 의하여 얻어진 매개변수의 값은 다음의 표 3에 정리하였으며, 이를 이용한 해석결과는 다음의 그림 9에 나타내었다. EBM 방법에 의한 지하수위의 변동 역시 계측치와 잘 일치함을 알 수 있다.

표 2. MAP을 이용한 매개변수의 추정값

	$\ln(K_s)$	ϕ_e	b	목적함수
0	3.219	9.0	4.38	8485.29
1	3.155	9.5832	4.4145	3156.65
2	3.152	9.2658	5.2736	2564.17
3	3.154	9.2489	5.2732	2191.41
4	3.143	9.0080	5.2102	1189.86
5	3.137	9.0143	5.2487	949.76
6	3.140	8.9838	5.2039	886.91

표 3. EBM을 이용한 매개변수의 추정값

	$\ln(K_s)$	ϕ_e	b	목적함수
0	3.219	9.0	4.38	8485.29
1	3.148	9.6416	4.4180	3239.08
2	3.119	9.3639	5.3667	1432.70
3	3.075	9.3665	5.6002	1236.40
4	3.031	9.4462	5.8284	1050.61
5	3.016	9.5138	5.8188	896.58
6	3.012	9.6818	5.7801	587.60

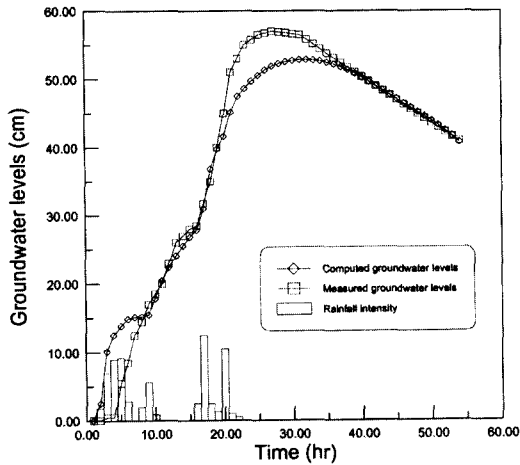


그림 6. MAP으로부터 예측된 지하수위의 변동

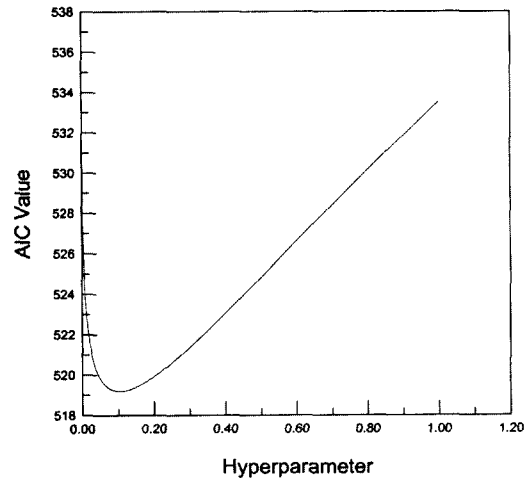


그림 7. AIC 값과 β 값의 상관관계(초기단계)

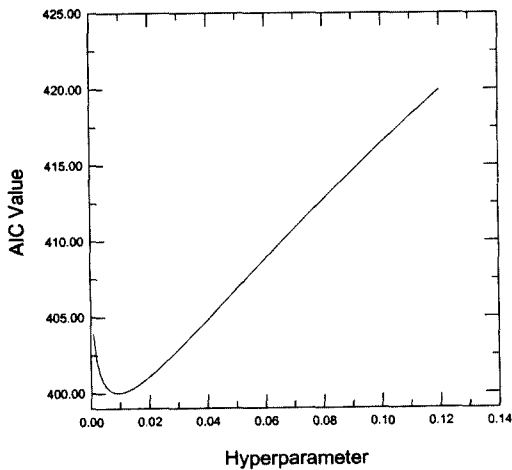


그림 8. AIC 값과 β 값의 상관관계(최종단계)

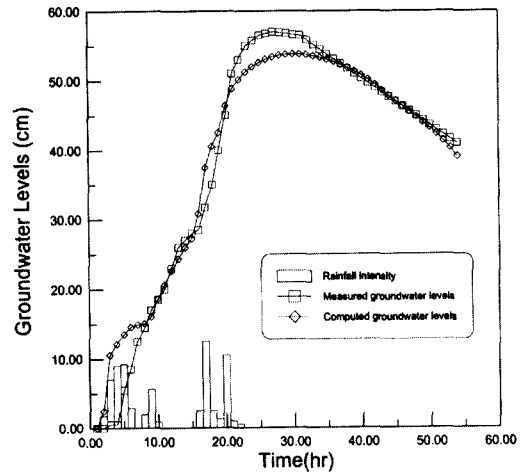


그림 9. EBM으로부터 예측된 지하수위의 변동

표 4. 매개변수 분석 요약

	투수계수 ($\ln(K_s)$)	흡인력 (ϕ_e)	경험계수 b
ML	3.06	9.61	5.81
MAP	3.14	8.98	5.20
EBM	3.01	9.68	5.78

앞에서 제시한 표 1., 표 2. 및 표 3.으로부터 얻어진 매개변수의 값을 정리하면 표 4.와 같다.

앞의 표 4.에서 알 수 있듯이 ML을 이용하여 얻은 매개변수의 값은 EBM에 의하여 얻은 매개변수의 값과 매우 유사함을 알 수 있다. 이는 위의 MAP 방법에서는 β 값을 1로 고정하여 계측값과 사전정보가 동일한 중요도를 갖도록 하였으므로 역해석결과가 ML 및 EBM과 매우 다른 것으로 판단된다. 이와는 반대로 ML을 이용한 역해석결과는 β 를 0으로 고정하였으나 EBM에서의 β 값이 0에 가까우므로 비슷한 결과를 얻은 것으로 판단된다. 또한, 앞에서 적용한 세가지 방법 가운데 가상의 변수를 도입하여 모델에 의한 예측치와 계측치의 부조화를 효과적으로 조화시켜주는 EBM 방법이 다른 ML이나 MAP 방법에 비하여 훨씬 우수한 결과를 나타내고 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 유한요소법과 유한차분법을 이용한 지하수흐름 해석모델을 이용하여 여러 가지 역해석 방법에 대한 비교연구를 실시하였다. 역해석 방법으로는 ML, MAP 및 EBM을 적용하였으며, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

(1) 민감도 분석을 살펴보면 본 논문에서 선정한 매개변수는 지하수위의 변동에 미치는 영향이 큰 것으로 판단된다. 이는 각각의 모델변수가 독립적인 값이 아니라 상호 의존적으로 지하수의 흐름에 영향을 주기 때문이다. 따라서 본 논문에서 선정한 매개변수는 적절한 것으로 사료된다.

(2) 가상의 변수 β 를 EBM 방법에 도입함으로써 사전정보와 계측치의 부조화라는 MAP 방법 및 ML 방법의 한계를 극복할 수 있었다.

(3) 가상의 변수 β 는 계산 횟수가 증가할수록 감소한다. 이는 계측치가 점차 중요성을 얻어가는 과정을 잘 설명하고 있다.

(4) ML, MAP 및 EBM의 비교연구를 통하여 Bayesian 이론을 이용한 역해석 기법의 효율성을 검증할 수 있었다. 특히, 위의 세가지 방법 가운데 EBM 방법은 사전정보와 계측치를 조화시킬 수 있는 방법으로써 해석결과도 다른 두가지 방법보다 양호한 결과를 나타냄을 알 수 있다.

참 고 문 헌

1. 서정복(1993), "Numerical analysis of porewater pressure predictions on hillside slopes", 석사학위 논문, 고려대학교.
2. 이주공(1996), "사면의 지하수 흐름에서 Bayesian 이론을 이용한 매개변수 분석", 석사학위 논문, 고려대학교.
3. Beck, J. V., and Arnold, K. J.(1977), *Parameter estimation in engineering and sciences*, John Wiley & Sons, Inc.
4. Campbell, G. S.(1974), "A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data", *Soil Sci.*, Vol 117, 311-314.
5. Istok J.(1989), "Groundwater modeling by the finite element method", *American Geophysical Union*, Washington.
6. Yuske, H., Liu, W. T. and Soumitra, G.(1994), "Inverse analysis of an embankment on soft clay by extended bayesian method." *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 18, pp. 709-734.
7. Yuske, H., Liu, W. T., and Sakajo, S.(1994), "Application of Akaike information criterion statistics to geotechnical inverse analysis : extended Bayesian method". *Structural safety*, Vol. 14, pp. 5-29.

(접수일자 2000. 8. 29)